

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA



Superfici minime a curvatura totale finita

Tesi Sperimentale di Laurea in Geometria

Relatore

Prof. Riccardo Piergallini

Laureanda

Marilena Cifani

Anno Accademico 2001 – 2002

Indice

Introduzione	iii
1 Curve e Superfici in \mathbb{R}^3	1
1.1 Differenziabilità	1
1.2 Varietà differenziabili	2
1.3 Curve in \mathbb{R}^3	4
1.4 Superfici in \mathbb{R}^3	7
1.5 Geometria delle superfici: prima e seconda forma fondamentale	11
1.6 Curve in superfici differenziabili regolari in \mathbb{R}^3	20
1.7 Isometrie e conformità tra superfici di \mathbb{R}^3	24
1.8 Teorema di esistenza delle coordinate isoterme e sue conseguenze	28
1.9 Teoria globale	31
1.10 Superfici di rotazione e superfici rigate	33
1.11 Richiami di geometria differenziale complessa	34
2 Le superfici minime	52
2.1 Superfici minime	52
2.2 Equazione delle superfici minime	58
2.3 Esempi di superfici minime	60
2.4 Variazione prima del funzionale area	72
2.5 Rappresentazione di Weierstrass	79
2.6 Esempi di rappresentazioni di Weierstrass	91
3 Le superfici minime complete	93
3.1 Il principio del massimo	93
3.2 Superfici minime complete e loro curvatura totale	94
3.3 “Fini” di una superficie minima completa	99

3.4	Comportamento asintotico delle fini	104
3.5	Flusso di \mathcal{S} lungo una curva chiusa γ	107
3.6	Teorema del semispazio	110
3.7	Teoremi di esistenza e unicità	113
3.8	Teorema di unicità	121
	Conclusioni	122
	Appendice A	127
	Appendice B	131
	Bibliografia	135
		137

Introduzione

Questa tesi è volta allo studio delle *superfici minime* nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Oggi questa teoria ha una vasta gamma di applicazioni, esse vengono utilizzate in vari settori della ricerca a partire dalla chimica, alla biologia e all'architettura.

Ma che cos'è una *superficie minima*?

La terminologia è dovuta a Lagrange che per primo nel 1762 definì *minime* le superfici che *localmente sono di area minima*, cioè le superfici per le quali ogni punto possiede un intorno la cui area è la minima tra le aree di tutte le superfici sostenute dallo stesso contorno. E' facile dimostrare che l'area (finita) di una qualsiasi superficie in R^3 si può sempre aumentare con piccole deformazioni, così nessuna superficie può essere un massimo locale per il funzionale d'area. Nel corso della trattazione, dimostreremo che condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie sia minima è che la *curvatura media* \mathcal{H} , sia nulla in ogni punto, o altrimenti detto che le due *curvature principali* k_1, k_2 siano opposte in ogni punto.

Ai nostri giorni i matematici usano il termine *superficie minima* per qualsiasi superficie soddisfacente $\mathcal{H} \equiv 0$, anche se non sempre queste superfici forniscono un minimo per il funzionale area.

Nella metà del diciannovesimo secolo *Plateau* osservò che fisicamente possiamo realizzare una superficie minima come una *pellicola di sapone*. Così il problema di determinare dato un contorno una superficie minima con fissata topologia è noto come *Problema di Plateau* [21].

Sarà capitato a ciascuno di noi, almeno una volta nella vita, di vedere cosa succede se si immerge un contorno di filo in una soluzione di acqua e sapone. Se l'esperimento è eseguito delicatamente, quando si estrae il contorno dall'acqua si osserva che su di esso è rimasta appoggiata una pellicola che a seconda del contorno assume forme diverse e spesso spettacolari.

Se ci si sofferma ad osservare attentamente queste pellicole si scopre che esse nascondono inaspettate proprietà geometriche. Infatti la lamina di sapone si dispone, in assenza di forze che non siano quelle esercitate dall'aria, a formare una superficie la cui area sia la minima possibile tra quelle aventi quel dato contorno. Il teorema di *Poisson-Laplace* stabilisce un legame tra la *curvatura media* di una superficie, vista come interfaccia tra due mezzi omogenei in equilibrio (aria-aria), e la pressione che quest'ultimi esercitano su di essa: *Dette P_1, P_2 le pressioni esercitate su ciascun lato dell'interfaccia dai due mezzi, la curvatura media*

$$\mathcal{H} = h(P_1 - P_2)$$

dove la costante $\lambda = \frac{1}{h}$ è il coefficiente di tensione superficiale e $(P_1 - P_2)$ è la pressione risultante. Poiché per una pellicola di sapone, in assenza di forze esterne, la pressione esercitata dall'aria su entrambe le facce è la stessa, si ha che $\mathcal{H} \equiv 0$ che è la condizione di minimalità. Chiaramente, se si esercita una leggera pressione sull'interfaccia, osserviamo che questa si incurva e maggiore è la pressione, maggiore sarà la curvatura. La superficie che si ottiene non è più minima.

Se il contorno, ad esempio, è costituito da due cerchi coassiali paralleli sufficientemente vicini, la superficie che si osserva è il *catenoide* e non il cilindro, come saremmo indotti a pensare. Infatti, anche se le curve verticali che costituiscono le generatrici del catenoide sono più lunghe dei segmenti di retta che abbiamo nel cilindro, la nostra superficie è però più stretta al centro, e questo ci fa risparmiare area.

Se il contorno è un'elica quella che si ottiene è l'*elicoide* che ha la sorprendente forma di una scala a chiocciola. Utilizzando contorni più complicati si ottengono diverse superfici minime. Il catenoide e l'elicoide sono gli esempi classici di superfici minime nello spazio euclideo. Essi ricorreranno spesso nella nostra trattazione e in particolare proveremo che il *catenoide* è l'*unica superficie di rotazione che sia anche minima oltre il piano* e per l'elicoide dimostremo che *esso è l'unica superficie rigata che sia anche minima oltre il piano*. Tuttavia non tutte le superfici minime sono realizzabili mediante pellicole di sapone, in tal caso data una *parametrizzazione* per la superficie, un calcolatore ci permetterà di visualizzare la forma di quest'ultima.

Nel corso del diciannovesimo secolo, furono molti i matematici a dedicarsi allo studio delle superfici minime. Tra questi ricordiamo Riemann, Catalan, Enneper, Weierstrass, Costa, ... Ma tra tutti, maggior interesse è rivolto ai lavori di Enneper-Weierstrass. Quest'ultimi dimostrarono che ogni superficie minima ammette una parametrizzazione in termini di due funzioni complesse (f, g) detta *rappresentazione di Weierstrass*. Tale rappresentazione è molto importante perché in primo luogo stabilisce un legame tra la teoria delle superfici minime e l'analisi complessa: infatti dimostreremo che ogni superficie minima (ma ciò è vero per una qualsiasi superficie in \mathbb{R}^3) ammette una naturale *struttura di superficie di Riemann* e questo ci permetterà di estendere molti risultati noti per l'analisi complessa, alle superfici minime; inoltre perché è proprio partendo da una rappresentazione di Weierstrass che si possono costruire nuovi ed interessanti esempi di superfici minime *complete* di cui ci occuperemo particolarmente.

Lo studio delle superfici minime complete ebbe inizio con i lavori di Huber e Osserman. Le superfici minime di questo tipo, quali il catenoide, il piano, l'elicoide ed altre ancora che troveremo nel corso della trattazione, hanno un particolare comportamento asintotico all'infinito che è sorprendentemente relazionato con *la topologia della superficie* (con il *genere* e con il numero delle *fini*). Nello studio di tali superfici, un ruolo importante è svolto dalla *curvatura totale*. Si dimostra che superfici minime complete di curvatura totale finita, ammettono una semplice struttura topologica. Le superfici di questo tipo sono caratterizzate dal fatto che le quantità numeriche che le definiscono, *grado della mappa di Gauss* m , *genere* g della superficie, il numero k delle *fini* e la *molteplicità* d_i di ciascuna fine, sono legate dalla relazione

$$m = g - 1 + \frac{k}{2} + \frac{\sum_{i=1}^k d_i}{2}.$$

Nel caso di superficie minima completa *immersa* tale relazione diviene

$$m = g + k - 1.$$

Fissando quindi uno dei parametri presente nell'equazione è possibile fare una classificazione di tali superfici.

Il lavoro è stato così strutturato. Dopo aver esposto nel primo capitolo, senza entrare nei dettagli, alcuni richiami ai concetti principali concernenti la geometria delle superfici in \mathbb{R}^3 , nel secondo capitolo si tratteranno

specificatamente le superfici minime di cui verranno esposte le principali proprietà: l'essere *estremali del funzionale area*, le proprietà della *mappa di Gauss*, l'*equazione delle superfici minime* a cui devono soddisfare e ultima, ma non per importanza, la *rappresentazione di Enneper-Weierstrass*, fornendo alcuni esempi classici. Nel terzo ed ultimo capitolo si prenderà in esame lo studio delle superfici minime immerse complete di curvatura totale finita e daremo prova dei maggiori risultati noti ai nostri giorni.

Capitolo 1

Curve e Superfici in \mathbb{R}^3

In questo capitolo riporteremo alcune nozioni di geometria utili per lo studio delle superfici minime nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Per maggiori dettagli rimandiamo a [24], [3] e [6].

1.1. Differenziabilità

Sia $f : U \rightarrow V$ con $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ aperti

$$f(x_1, \dots, x_m) = (f^1(x_1, \dots, x_m), \dots, f^n(x_1, \dots, x_m)).$$

Definizione 1.1.1. f si dice **differenziabile** in U se ammette derivate parziali continue di qualsiasi ordine:

$$\frac{\partial^k f^j}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \quad \forall i_1, \dots, i_k, j, k$$

La condizione di differenziabilità si esprime anche dicendo che f è una funzione di classe C^∞ . Se $f \in C^\infty$, in particolare $f \in C^1$ quindi è possibile approssimare l'incremento della f con una applicazione lineare cioè:

$$f(x) - f(\bar{x}) = d_{\bar{x}}f(x - \bar{x}) + \varepsilon(x - \bar{x}) = \mathcal{J}_{\bar{x}}f \cdot (x - \bar{x}) + \varepsilon(x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in U$$

dove l'applicazione lineare $d_{\bar{x}}f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta **differenziale di f in \bar{x}** e

$$\mathcal{J}_{\bar{x}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

è la **Jacobiana di f in \bar{x}** .

Non vale il viceversa di quanto appena detto, cioè non basta l'esistenza di una approssimazione lineare per garantire la differenziabilità di una funzione f .

Proposizione 1.1.2 (Regola della catena). *Siano $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ differenziabili con $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^l$ aperti, $\bar{x} \in U$. Allora $g \circ f : U \rightarrow W$ è differenziabile e*

$$d_{\bar{x}}(g \circ f) = d_{f(\bar{x})}g \circ d_{\bar{x}}f, \quad \mathcal{J}_{\bar{x}}(g \circ f) = \mathcal{J}_{f(\bar{x})}g \cdot \mathcal{J}_{\bar{x}}f.$$

Definizione 1.1.3. $f : U \rightarrow V$ con $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ è detta **regolare in $\bar{x} \in U$** se $\mathcal{J}_{\bar{x}}f$ ha rango massimo.

Ricordiamo che il *rango* di una matrice è il massimo numero delle righe o delle colonne linearmente indipendenti.

Definizione 1.1.4. f si dice **regolare in U** se è regolare in ogni punto $\bar{x} \in U$.

Teorema 1.1.5 (Teorema della funzione inversa). *Se $f : U \rightarrow V$ con $U, V \subset \mathbb{R}^m$ è differenziabile e regolare in $\bar{x} \in U$ ($\mathcal{J}_{\bar{x}}f$ invertibile). Allora esiste $U' \subset U$ intorno aperto di \bar{x} tale che $f|_{U'} : U' \rightarrow V' = f(U')$, $V' \subset V$ aperto, è invertibile con inversa differenziabile.*

Definizione 1.1.6. $f : U \rightarrow V$ è un **diffeomorfismo** se e solo se f invertibile e f, f^{-1} differenziabili, cioè f differenziabile, invertibile e regolare.

1.2. Varietà differenziabili

Diamo ora tutta una serie di definizioni riguardanti le *varietà differenziabili*.

Definizione 1.2.1. Una **m -varietà topologica** \mathcal{M} è uno spazio di Hausdorff in cui ogni punto ammette un intorno omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^m .

Un **atlante** di \mathcal{M} è una collezione \mathcal{A} di triple (R_a, φ_a, U_a) , dette **carte**, dove U_a sono aperti in \mathcal{M} che ricoprono tutta \mathcal{M} , R_a aperti in \mathbb{R}^m e φ_a è un omeomorfismo $\varphi_a : U_a \rightarrow R_a$.

Definizione 1.2.2. Una **struttura differenziabile** su \mathcal{M} è un atlante differenziabile massimale, cioè un atlante i cui cambiamenti di carta $\varphi_a^{-1} \circ \varphi_b$ sono diffeomorfismi.

Una **varietà differenziabile** è una coppia $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ dove \mathcal{M} è una m -varietà topologica e \mathcal{A} è una struttura differenziabile su \mathcal{M} .

Definizione 1.2.3. Un'**orientazione** su $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ è una sottofamiglia di \mathcal{A} che è un atlante orientato massimale, cioè un atlante in cui tutti i cambiamenti di carta conservano l'orientazione (il determinante della matrice Jacobiana associata è positivo).

Una varietà differenziabile $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ si dice **orientabile** se possiede un'orientazione.

Definizione 1.2.4. Una **struttura conforme** su $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ è un atlante massimale in cui i cambiamenti di carta sono applicazioni conformi.

Osservazione 1.2.5. Una struttura conforme sulla varietà differenziabile \mathcal{M} automaticamente determina una orientazione su \mathcal{M} .

Sia \mathcal{M} una varietà differenziabile.

Definizione 1.2.6. Un'applicazione differenziabile $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice **immersione locale** se il suo differenziale $d_p\psi : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\psi(p)}\mathbb{R}^3$ è iniettivo.

Diremo inoltre che un'immersione locale Φ è un'**immersione (globale)** se Φ stabilisce un omeomorfismo tra la varietà differenziabile \mathcal{M} e la sua immagine $\psi(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^3$.

Ovviamente localmente ogni immersione locale è un'immersione, pertanto localmente è possibile identificare la varietà \mathcal{M} con la sua immagine in \mathbb{R}^3 . In questo caso non è possibile distinguere lo spazio tangente $T_p\mathcal{M}$ dalla sua immagine in \mathbb{R}^3 , utilizzando la stessa notazione per entrambi gli oggetti.

Su ogni varietà differenziabile \mathcal{M} è possibile definire una **metrica Riemanniana**, ossia una collezione di prodotti scalari su ogni spazio tangente. La varietà \mathcal{M} con la metrica g è detta **varietà riemanniana**.

Definizione 1.2.7. Una **curva differenziabile** su \mathcal{M} è un'applicazione differenziabile $\gamma(t)$ di un intervallo $[a, b]$ della retta reale in \mathcal{M} .

La **lunghezza** di $\gamma(t)$ è data da

$$\int_a^b h(t) dt,$$

dove $h(t) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 g_{ij}(\gamma(t))u'_1u'_2}$, $(g_{ij}) = \mathcal{G}_a$ è la matrice della metrica nella carta locale (R_a, φ_a, U_a) e (u_1, u_2) sono coordinate in R_a .

Definizione 1.2.8. Un **cammino divergente** su \mathcal{M} è un'applicazione continua $\gamma(t)$, $t \geq 0$, dell'asse non negativo in \mathcal{M} , tale che per ogni sottoinsieme compatto K di \mathcal{M} , esiste un t_0 tale che per ogni $t > t_0$ $\gamma(t) \notin K$.

Se un cammino divergente è differenziabile, possiamo definire la sua lunghezza come

$$\int_0^\infty h(t)dt. \quad (1.1)$$

Definizione 1.2.9. Una varietà \mathcal{M} si dice **completa** se rispetto alla metrica Riemanniana l'integrale 1.1 diverge per ogni cammino divergente in \mathcal{M} .

Ogni 2-varietà \mathcal{M} ammette un *rivestimento universale*.

Definizione 1.2.10. Diremo che una 2-varietà semplicemente connessa $\widetilde{\mathcal{M}}$ è un **rivestimento universale** di \mathcal{M} se esiste un'applicazione suriettiva $\pi : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ tale per ogni punto $p \in \mathcal{M}$ esiste un intorno V in \mathcal{M} la cui controimmagine mediante π è costituita da un insieme finito di aperti disgiunti in $\widetilde{\mathcal{M}}$ ciascuno dei quali viene mandato, mediante π , omeomorficamente su V .

Mediante la π ogni struttura su \mathcal{M} induce una corrispondente struttura su $\widetilde{\mathcal{M}}$. Diremo quindi che \mathcal{M} è *completa rispetto alla sua metrica riemanniana* se e solo se $\widetilde{\mathcal{M}}$ è *completa rispetto alla metrica indotta*.

1.3. Curve in \mathbb{R}^3

Definizione 1.3.1. Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ è una **curva regolare** nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 se per ogni punto $p \in \mathcal{C}$ esiste un intorno V di p in \mathbb{R}^3 e un'applicazione $\alpha : I = [a, b] \rightarrow V \cap \mathcal{C}$ con $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tale che:

(a) α è differenziabile, cioè posto

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ hanno derivate continue di ogni ordine in I ;

(b) α è un omeomorfismo;

(c) (Condizione di regolarità) $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ dove

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

è il **vettore tangente** o **vettore velocità** della curva α .

α è detta **parametrizzazione locale regolare della curva \mathcal{C}** , con parametro t .

Spesso con abuso di linguaggio si è soliti indicare una curva \mathcal{C} con una sua parametrizzazione α .

Sia $\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare, fissato un punto $t_0 \in I$ definiamo la funzione **lunghezza d'arco**

$$\begin{aligned} s : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \end{aligned}$$

dove la quantità $s(t)$ è detta *lunghezza dell'arco di curva α tra t_0 e t* e $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ è la lunghezza del vettore velocità. $s \in C^\infty$ e, poiché α è regolare, $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0 \forall a \leq t \leq b$, quindi s definisce un diffeomorfismo di $[a, b]$ sull'immagine $s([a, b])$ che è un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Indichiamo con $t(s)$ la sua inversa. Se scegliamo sulla curva α come parametro la lunghezza d'arco s , si ha

$$|\alpha'(s)| = \frac{|\alpha'(t)|}{s'(t)} = 1 \quad \forall s \in J.$$

Se $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$, α è detta *parametrizzazione naturale* o *parametrizzazione a velocità unitaria*.

Quanto detto porta alla seguente proposizione:

Proposizione 1.3.2. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva regolare, esiste sempre una riparametrizzazione di α che ha velocità costante uguale ad 1.*

Dimostrazione. Basta considerare la funzione $\beta(s) = \alpha(t(s))$ che è una riparametrizzazione di α a velocità unitaria [24]. \square

Supponiamo α parametrizzazione naturale, allora $\forall p = \alpha(s) \in \mathcal{C}$ tale che $\alpha''(s) \neq 0$ sono ben definiti:

- (a) $\mathbf{T}(p) = \alpha'(s)$ il versore tangente della curva in p .
 (b) $\mathbf{N}(p) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$ il versore normale in p perpendicolare a $\mathbf{T}(p)$.
 (c) $\mathbf{B}(p) = \mathbf{T}(p) \times \mathbf{N}(p)$ il versore binormale, dove $(- \times -)$ è l'usuale prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 .

Osservazione 1.3.3.

- (a) $\mathbf{T}(p)$ e $\mathbf{B}(p)$ dipendono dall'orientazione scelta sulla curva \mathcal{C} : un'orientazione opposta determina versori opposti, mentre $\mathbf{N}(p)$ non dipende dall'orientazione.
 (b) $\mathbf{T}(p), \mathbf{N}(p), \mathbf{B}(p)$ sono ben definiti $\forall s$, non dipendono cioè né da s né da α e formano una base ortonormale positiva di $T_p(\mathbb{R}^3)$.
 (c) Al variare di s le componenti di $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ variano in maniera differenziabile e dunque sono tre campi di vettori che formano un campo di riferimento ortonormale lungo \mathcal{C} detto **riferimento di Frenet** [24].

Definizione 1.3.4. Sia α una parametrizzazione naturale della curva \mathcal{C} . Si definisce

- (a) **vettore curvatura** il campo vettoriale lungo \mathcal{C}

$$\mathbf{K} = \nabla_{\mathbf{T}}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{T} = k\mathbf{N},$$

dove $\forall p \in \mathcal{C}$ $\nabla_{\mathbf{T}(p)}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{T} \in T_p\mathcal{C}$ è la derivata covariante del campo di vettori \mathbf{T} rispetto al vettore $\mathbf{T}(p)$, che ci dice come varia il campo \mathbf{T} quando ci si muove lungo una curva α uscente da p con velocità $\mathbf{T}(p)$, cioè considerata la restrizione di \mathbf{T} alla curva α , $\nabla_{\mathbf{T}(p)}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{T} = \left. \frac{d(\mathbf{T} \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}$ [24]; \mathbf{K} è sempre parallelo ed equiverso al versore \mathbf{N} in ogni punto $p \in \mathcal{C}$;

- (b) **curvatura** la funzione differenziabile su \mathcal{C}

$$k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{N} = |\mathbf{K}|;$$

- (c) **torsione** la funzione differenziabile su \mathcal{C}

$$\tau = \nabla_{\mathbf{T}}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}.$$

Osservazione 1.3.5.

- (a) $k(p) \geq 0 \forall p \in \mathcal{C}$; $k(p) = 0 \iff$ la curva è un arco di retta.

- (b) $\tau(p)$ è definita $\iff k(p) > 0$; $\tau(p) = 0 \iff$ la curva è piana.
 (c) \mathbf{K}, k, τ non dipendono dall'orientazione scelta sulla curva \mathcal{C} .

In coordinate presa α parametrizzazione naturale di \mathcal{C} :

$$\begin{cases} \mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \\ \mathbf{K}(s) = \alpha''(s) \\ k(s) = |\alpha''(s)| \end{cases}$$

\implies

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s) \end{cases} \quad \forall s \in I$$

quest'ultime sono note come *formule di Frenet*. Da ciò risulta che

$$k(s) = -\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{N}'(s), \quad \tau(s) = \mathbf{N}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) = -\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{B}'(s).$$

Teorema 1.3.6 (Fondamentale delle curve nello spazio). Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ curve differenziabili, regolari, connesse tali che $k_i(p) > 0 \forall p \in \mathcal{C}_i$. Allora sono equivalenti:

- (a) $\exists h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometria tale che $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$;
 (b) $\exists \alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazioni naturali di $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ tali che $k_1(s) = k_2(s), \tau_1(s) = \pm\tau_2(s) \forall s \in I$.

1.4. Superfici in \mathbb{R}^3

Definizione 1.4.1. Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ è una **superficie differenziabile regolare** se, per ogni punto $p \in \mathcal{S}$, esistono un intorno V di p in \mathbb{R}^3 e un'applicazione $X : U \rightarrow V \cap \mathcal{S}$ di un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ in $V \cap \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ tale che:

- (a) X è differenziabile, cioè posto

$$X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)), \quad (u_1, u_2) \in U$$

le funzioni x_j con $j = 1, 2, 3$, hanno derivate parziali continue di ogni ordine in U ;

- (b) X è un omeomorfismo;
 (c) (Condizione di regolarità) Detta \mathcal{E} la matrice jacobiana di X

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

\mathcal{E} ha rango massimo (uguale a 2) o equivalentemente $\exists i, j$ con $1 \leq i < j \leq 3$ tali che $\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$.

X è detta **parametrizzazione locale regolare** o **sistema di coordinate locali** della superficie \mathcal{S} .

Proposizione 1.4.2. [3] Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile di un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$. Allora il grafico di f , cioè, l'insieme

$$\{(u_1, u_2, f(u_1, u_2)) : (u_1, u_2) \in U\} \subset \mathbb{R}^3, \quad (1.2)$$

è una superficie differenziabile regolare.

Quando una superficie \mathcal{S} è espressa mediante la 1.2 si dice che \mathcal{S} è in *forma esplicita*.

Lemma 1.4.3. [3] Sia \mathcal{S} una superficie data mediante una parametrizzazione X , e sia $a \in U$ un punto in cui \mathcal{S} è regolare cioè, \mathcal{S} è regolare in $p = X(a)$. Allora esiste un intorno aperto $U' \subset U$ di a , tale che la superficie Σ ottenuta restringendo X a U' è il grafico di una funzione differenziabile che ha una della seguenti tre forme:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Dimostrazione. Diamo solo un cenno alla dimostrazione. Poiché \mathcal{S} è regolare in $p = X(a)$, allora uno dei determinanti

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u_1, u_2)}$$

è diverso da zero in $a \in U$. Supponiamo che sia

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0. \quad (\star)$$

Sia $\pi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$, consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned}\pi \circ X : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, u_2) &\mapsto (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2)).\end{aligned}$$

Poiché vale la (\star), per il teorema della funzione inversa esiste un intorno U' di a e un intorno V' di $\pi(X(a))$ tale che $\pi \circ X : U' \rightarrow V'$ è un diffeomorfismo. Poiché X è un omeomorfismo $X(U') = V$ è un intorno di p in \mathcal{S} .

Se componiamo $(\pi \circ X)^{-1}$ con la funzione $(u_1, u_2) \mapsto z(u_1, u_2)$, si ha che V è il grafico della funzione differenziabile

$$z = z(u_1(x, y), u_2(x, y)) = f(x, y).$$

□

Sia \mathcal{S} una superficie di \mathbb{R}^3 assegnata mediante una parametrizzazione $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : I \rightarrow U$ una curva nel piano, $\beta(t) = (u_1(t), u_2(t))$. L'applicazione $\alpha = X \circ \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva regolare su \mathcal{S} data

$$\alpha(t) = X(\beta(t)) = (x_1(u_1(t), u_2(t)), x_2(u_1(t), u_2(t)), x_3(u_1(t), u_2(t))), \quad t \in I,$$

con *vettore tangente* nel punto $t = t_0$ dato da

$$\alpha'(t_0) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0), x'_3(t_0)), \quad (1.3)$$

dove

$$x'_j(t_0) = \sum_{k=1}^2 x_{j,k} u'_k \quad j = 1, 2, 3$$

con $x_{j,k} = \partial x_j / \partial u_k$. Quindi le curve regolari α su \mathcal{S} possono essere viste come immagine mediante X di una curva regolare in U . In particolare le immagini $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ mediante X delle curve definite da $u_2 = \text{cost}$ e $u_1 = \text{cost}$ sono dette *curve coordinate* con vettori tangenti \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 rispettivamente.

Lemma 1.4.4. *Sia $a = (u_1(t_0), u_2(t_0))$ un punto regolare per \mathcal{S} , consideriamo l'insieme di tutte le curve α su \mathcal{S} passanti per a , cioè $\alpha(t_0) = X(a)$. Allora la totalità di tutti i vettori tangenti in quel punto forma uno spazio vettoriale bidimensionale.*

Definizione 1.4.5. *Lo spazio vettoriale descritto nel lemma 1.4.4 è detto **piano tangente ad \mathcal{S} in p** , che indichiamo con $T_p(\mathcal{S})$.*

Dunque una superficie \mathcal{S} ammette in ogni punto regolare un piano tangente che, per definizione, è indipendente dai parametri.

Osservazione 1.4.6. $T_p\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $T_p\mathbb{R}^3$ (spazio dei vettori applicati in p).

Da quanto detto, discende la seguente proposizione:

Proposizione 1.4.7. Sia \mathcal{S} una superficie differenziabile, $p \in \mathcal{S}$ e $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{S}$. Allora esiste una curva $\alpha(t) = X(u_1(t), u_2(t))$ con $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tale che

$$\begin{cases} \alpha(0) = p \\ \alpha'(0) = \mathbf{v}. \end{cases}$$

α è detta **curva adattata** a \mathbf{v} .

Ad ogni parametrizzazione regolare X di una superficie differenziabile $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ è possibile associare la seguente terna di campi vettoriali differenziabili:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial X}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \right) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\partial X}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}, \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|}. \quad (1.6)$$

Osservazione 1.4.8.

- (a) $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ dipendono dalla parametrizzazione X .
- (b) $\forall p \in \mathcal{S}$ $\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)\}$ formano una base per $T_p\mathcal{S}$, in generale non ortonormale [24].
- (c) \mathbf{N} definito dalla 1.6 è detto *campo di versori normali lungo \mathcal{S}* .
- (d) \mathbf{N} è univocamente determinato, dipende solo dall'orientazione scelta su \mathcal{S} : un'orientazione opposta determina un versore opposto.
- (e) $\forall p \in \mathcal{S}$ i vettori $\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p), \mathbf{N}(p)\}$ formano una base di $T_p\mathbb{R}^3$ positivamente orientata.

Lemma 1.4.9. [24] Assegnare su una superficie differenziabile \mathcal{S} di \mathbb{R}^3 un campo di versori normali, è equivalente ad assegnare un'orientazione sulla superficie. In particolare è possibile definire su tutta la superficie \mathcal{S} un campo di versori normali se e solo se \mathcal{S} è orientabile.

Osservazione 1.4.10. Una orientazione \mathbf{N} su \mathcal{S} induce una orientazione in ogni spazio tangente $T_p(\mathcal{S})$, $p \in \mathcal{S}$.

Diremo che una base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \in T_p(\mathcal{S})$ è positiva se il vettore $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ ha lo stesso verso di \mathbf{N} , cioè se il prodotto scalare (in \mathbb{R}^3) tra $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e \mathbf{N} è positivo.

Si dimostra facilmente che l'insieme di tutte le basi positive di $T_p(\mathcal{S})$ è un'orientazione per $T_p(\mathcal{S})$.

1.5. Geometria delle superfici: prima e seconda forma fondamentale

Il naturale prodotto interno in \mathbb{R}^3 induce su ogni spazio tangente $T_p\mathcal{S}$ di una superficie regolare, un prodotto interno g_p così definito:

$$\begin{aligned} g_p : T_p(\mathcal{S}) \times T_p(\mathcal{S}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto g_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove $(-\cdot-)$ è l'usuale prodotto scalare in \mathbb{R}^3 .

Osservazione 1.5.1. Il prodotto interno g_p è simmetrico:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_p \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(\mathcal{S}),$$

e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p$ è lineare sia rispetto a \mathbf{v} che a \mathbf{w} .

Assegnare un prodotto scalare su ogni spazio tangente, equivale a dotare la superficie \mathcal{S} di una metrica riemanniana g . La coppia (\mathcal{S}, g) è detta *Superficie riemanniana*.

A g_p possiamo associare una forma quadratica definita positiva

$$\begin{aligned} I_p : T_p(\mathcal{S}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{w} &\longmapsto I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = |\mathbf{w}|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

dove $|\mathbf{w}|$ è la lunghezza del vettore \mathbf{w} .

Definizione 1.5.2. La forma quadratica I_p su $T_p(\mathcal{S})$ data dalla 1.8 è detta **prima forma fondamentale** della superficie regolare $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ in $p \in \mathcal{S}$.

E' possibile esprimere I_p in termini della base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ di $T_p(\mathcal{S})$ associata alla parametrizzazione X .

Sia $\mathbf{w} \in T_p(\mathcal{S})$ e $\alpha(t) = X(u_1(t), u_2(t))$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, curva su \mathcal{S} adattata a \mathbf{w} tale che $\alpha(0) = p$ e $\mathbf{w} = \alpha'(0) = \mathbf{X}_1(u_1(0), u_2(0))u_1'(0) + \mathbf{X}_2(u_1(0), u_2(0))u_2'(0)$. Allora

$$\begin{aligned} I_p(\mathbf{w}) = I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{X}_1 u_1' + \mathbf{X}_2 u_2', \mathbf{X}_1 u_1' + \mathbf{X}_2 u_2' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \rangle_p u_1'^2 + 2\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle_p u_1' u_2' + \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2 \rangle_p u_2'^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} u_i' u_j', \end{aligned} \tag{1.9}$$

dove tutte le funzioni sono valutate in $t = 0$ e le quantità

$$\begin{aligned} g_{11} = E &= \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \rangle_p, \\ g_{12} = g_{21} = F &= \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle_p, \\ g_{22} = G &= \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2 \rangle_p, \end{aligned} \tag{1.10}$$

sono i coefficienti della prima forma fondamentale rispetto alla base $\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)\}$ di $T_p(\mathcal{S})$. Detta \mathcal{G} la matrice $(g_{ij})_{ij}$ si ha che $\mathcal{G} = \mathcal{E}^T \mathcal{E}$ dove con \mathcal{E} abbiamo indicato la matrice jacobiana di X e

$$\det(\mathcal{G}) = |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|^2. \tag{1.11}$$

La prima forma fondamentale ci permette di effettuare delle misure sulla superficie (lunghezza di una curva, l'angolo tra due vettori tangenti, l'area di una regione...) senza dover fare riferimento allo spazio ambiente \mathbb{R}^3 in cui si trova la superficie.

Cominciamo con il definire la lunghezza di una curva su una superficie. Sia \mathcal{S} una superficie con parametrizzazione $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva sulla superficie: $\alpha(t) = X((u_1(t), u_2(t)))$, allora la lunghezza dell'arco di curva da t_0 a t è data

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt.$$

L'angolo ϑ sotto cui due curve regolari $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$, $\beta : I \rightarrow \mathcal{S}$ si incontrano in $t = t_0$ è dato da

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

In particolare l'angolo φ tra le curve coordinate $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ di una parametrizzazione X in un punto (u_1, u_2) è

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle}{|\mathbf{X}_1| |\mathbf{X}_2|} = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

ne segue che le curve coordinate di una parametrizzazione sono ortogonali se e solo se $F(u_1, u_2) = 0$ per tutti (u_1, u_2) . Simili parametrizzazioni sono dette *parametrizzazioni ortogonali*.

L'altra questione metrica che abbiamo detto si può trattare utilizzando la prima forma fondamentale è il calcolo dell'area di una regione limitata di una superficie regolare.

Sia \mathcal{S} una superficie con parametrizzazione $X(u_1, u_2)$ con $(u_1, u_2) \in U$ e D un sottodominio (un sottoinsieme aperto e connesso) di U tale che $\overline{D} \subset U$, dove $\overline{D} = D \cup \partial D$ è la sua chiusura.

Definizione 1.5.3. *Detta Σ la restrizione della superficie \mathcal{S} a D , $\Sigma = X(\overline{D})$, si definisce **area** di Σ il numero positivo*

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int \int_{\overline{D}} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| \, du_1 du_2 \\ &= \int \int_{\overline{D}} \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 du_2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Osservazione 1.5.4. *$A(\Sigma)$ data dalla 1.12 dipende solo dai coefficienti della prima forma fondamentale, pertanto non dipende dalla parametrizzazione X .*

Infatti, sia $\tilde{X} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'altra parametrizzazione di \mathcal{S} e $\tilde{D} = \tilde{X}^{-1}(\Sigma)$. Consideriamo lo Jacobiano $\partial(u_1, u_2)/\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ del cambiamento di coordinate $h = X^{-1} \circ \tilde{X} : \tilde{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$, dove $W = X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U})$. Allora

$$\begin{aligned} \int \int_{\tilde{D}} |\tilde{\mathbf{X}}_1 \times \tilde{\mathbf{X}}_2| d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 &= \int \int_{\tilde{D}} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \right| d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 \\ &= \int \int_{\tilde{D}} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| du_1 du_2. \end{aligned}$$

Detta \mathcal{U} la matrice del cambiamento di coordinate, la prima uguaglianza è dovuta al fatto che $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{E}}^T \tilde{\mathcal{E}}$, pertanto $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{U}^T \mathcal{G}\mathcal{U}$ da cui $|\tilde{\mathbf{X}}_1 \times \tilde{\mathbf{X}}_2| = \sqrt{\det \tilde{\mathcal{G}}} = |\det \mathcal{U}| \sqrt{\det \mathcal{G}} = \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \right| |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|$, mentre la

seconda uguaglianza è dovuta al teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli.

Nel seguito considereremo solo superfici orientate.

Definizione 1.5.5. Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con orientazione \mathbf{N} .
L'applicazione differenziabile

$$\begin{aligned} N : \mathcal{S} &\longrightarrow S^2 \\ p &\longmapsto \mathbf{N}(p) \end{aligned} \tag{1.13}$$

dove $\mathbf{N}(p)$ è il versore normale ad \mathcal{S} in p e S^2 è la sfera unitaria:

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

è detta **superficie normale** o **mappa di Gauss** di \mathcal{S} .

Osservazione 1.5.6. La mappa di Gauss N mette in relazione la geometria di \mathcal{S} con quella della sfera S^2 ; in generale N dà informazioni sulla geometria locale di \mathcal{S} e su quanto questa si discosta dall'essere una sfera.

Consideriamo il differenziale della mappa di Gauss:

$$d_p N : T_p(\mathcal{S}) \longrightarrow T_{\mathbf{N}(p)}(S^2),$$

poiché $\forall p \in \mathcal{S}$ si ha

$$T_{\mathbf{N}(p)}(S^2) = \mathbf{N}(p)^\perp = T_p(\mathcal{S})$$

$d_p N$ può essere visto come un operatore su $T_p(\mathcal{S})$:

$$\begin{aligned} d_p N : T_p(\mathcal{S}) &\longrightarrow T_p(\mathcal{S}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto d_p N(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} \in T_p \mathcal{S}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Definizione 1.5.7. Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata. $\forall p \in \mathcal{S}$ definiamo **operatore forma** o **operatore di Weingarten** l'operatore lineare L_p così definito

$$\begin{aligned} L_p : T_p(\mathcal{S}) &\longrightarrow T_p(\mathcal{S}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto -\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} \quad \forall \mathbf{v} \in T_p(\mathcal{S}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

La linearità dell'operatore forma è una conseguenza della linearità della derivata rispetto al vettore per cui si deriva. La terminologia usata, è giustificata dal fatto che L_p descrive la variazione infinitesima del versore normale nella direzione di \mathbf{v} e tale variazione dipende dalla forma di \mathcal{S} in un intorno del punto p .

Osservazione 1.5.8. *Dalla definizione risulta chiaro che l'operatore forma dipende solo dal versore normale \mathbf{N} . Quindi un'orientazione opposta su \mathcal{S} determina un operatore forma opposto.*

Preso α curva adattata a \mathbf{v} , $\alpha'(0) = \mathbf{X}_1 u'_1(0) + \mathbf{X}_2 u'_2(0)$,

$$\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} = \mathbf{N}'(u_1(0), u_2(0)) = \mathbf{N}_1 u'_1 + \mathbf{N}_2 u'_2$$

dove $\mathbf{N}_i = \nabla_{\mathbf{X}_i}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} \in T_p \mathcal{S}$.

Poiché $\mathbf{N}_i \in T_p \mathcal{S}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= -a_{11} \mathbf{X}_1 - a_{21} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{N}_2 &= -a_{12} \mathbf{X}_1 - a_{22} \mathbf{X}_2 \end{aligned}$$

e pertanto

$$\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbb{R}^3} \mathbf{N} = -(a_{11} u'_1 + a_{12} u'_2) \mathbf{X}_1 - (a_{21} u'_1 + a_{22} u'_2) \mathbf{X}_2,$$

dove $\forall p \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

è la matrice associata all'operatore forma L_p rispetto alla base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ di $T_p(\mathcal{S})$.

Definizione 1.5.9. $\forall p \in \mathcal{S}$, definiamo:

$$\mathcal{H}(p) = \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{L},$$

curvatura media di \mathcal{S} in p , e

$$\mathcal{K}(p) = \det \mathcal{L}$$

curvatura gaussiana di \mathcal{S} in p .

Una importante proprietà dell'operatore forma è:

Proposizione 1.5.10. $\forall p \in \mathcal{S}$, L_p è un operatore simmetrico rispetto al prodotto interno g_p , cioè si ha:

$$g_p(L_p(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = g_p(\mathbf{v}, L_p(\mathbf{w})) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(\mathcal{S}). \quad (1.16)$$

Dimostrazione. Essendo $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ una base di $T_p\mathcal{S}$, è sufficiente dimostrare la 1.16 per \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 . Poiché $\langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_1 \rangle = 0 = \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_2 \rangle$, si ha

$$0 = \mathbf{X}_1(\langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_2 \rangle) = \langle \nabla_{\mathbf{X}_1} \mathbf{N}, \mathbf{X}_2 \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{21} \rangle$$

e

$$0 = \mathbf{X}_2(\langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_1 \rangle) = \langle \nabla_{\mathbf{X}_2} \mathbf{N}, \mathbf{X}_1 \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{12} \rangle$$

dove abbiamo posto $\mathbf{X}_{ij} = \nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{X}_j$ e $\mathbf{X}_i(\langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_j \rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_j \rangle}{\partial \mathbf{X}_i}$ è la derivata direzionale, $\forall i, j = 1, 2$.

Pertanto, poiché $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_{21}$ per l'indipendenza dall'ordine di derivazione:

$$\begin{aligned} g_p(L_p(\mathbf{X}_1), \mathbf{X}_2) &= \langle -\nabla_{\mathbf{X}_1} \mathbf{N}, \mathbf{X}_2 \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{21} \rangle \\ &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{12} \rangle = \langle -\nabla_{\mathbf{X}_2} \mathbf{N}, \mathbf{X}_1 \rangle = g_p(\mathbf{X}_1, L_p(\mathbf{X}_2)). \end{aligned}$$

□

Il fatto che L_p sia un operatore simmetrico ci permette di applicare il teorema spettrale.

Teorema 1.5.11. *Esiste una base ortonormale $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\}$ di $T_p(\mathcal{S})$ rispetto alla quale la matrice associata a L_p ha la forma*

$$\mathcal{L}_{\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\}} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

dove k_1, k_2 sono gli autovalori di L_p .

Definizione 1.5.12. $\forall p \in \mathcal{S}$ $k_1(p), k_2(p)$ sono dette **curvature principali** di \mathcal{S} in p e i relativi autospazi sono individuati dai versori $\mathbf{T}_1(p), \mathbf{T}_2(p)$ detti **direzioni principali**.

Osservazione 1.5.13.

- $\mathbf{T}_1(p), \mathbf{T}_2(p)$ sono univocamente determinati a meno del segno e dell'ordine se $k_1(p) \neq k_2(p)$;

- $k_1, k_2 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue, differenziabili in $\mathcal{S} - \{k_1(p) = k_2(p)\}$; un'orientazione opposta su \mathcal{S} determina curvatures opposte.

In questi termini, rispetto alla base $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\}$ si ha per ogni p in \mathcal{S}

$$\mathcal{H}(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) \quad (1.17)$$

$$\mathcal{K}(p) = k_1(p) \cdot k_2(p). \quad (1.18)$$

Quest'ultime possono essere riscritte come

$$k^2 - 2\mathcal{H}k + \mathcal{K} = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} k_1 &= \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H} - \mathcal{K}} \\ k_2 &= \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H} - \mathcal{K}}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Possiamo associare all'operatore forma L_p una forma bilineare l_p su $T_p(\mathcal{S})$ così definita:

$$\begin{aligned} l_p : T_p(\mathcal{S}) \times T_p(\mathcal{S}) &\longrightarrow T_p(\mathcal{S}) \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto l_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_p(L_p(\mathbf{v}), \mathbf{w}). \end{aligned}$$

l_p è detta **seconda forma fondamentale** di \mathcal{S} in p .

Osservazione 1.5.14. Anche l_p , come L_p , dipende dal segno di $\mathbf{N}(p)$ e quindi dalla parametrizzazione X .

Proposizione 1.5.15. $\forall p \in \mathcal{S}$ la seconda forma fondamentale è una forma bilineare simmetrica su $T_p(\mathcal{S})$.

Dimostrazione. E' una conseguenza del fatto che L_p è simmetrico, infatti $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(\mathcal{S})$ si ha:

$$l_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_p(L_p(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = g_p(\mathbf{v}, L_p(\mathbf{w})) = g_p(L_p(\mathbf{w}), \mathbf{v}) = l_p(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

□

Rispetto alla base $\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)\}$ di $T_p(\mathcal{S})$ la matrice associata alla seconda forma fondamentale è:

$$\mathcal{B} = (b_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} b_{11} &= e = l_p(\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_1(p)) = \langle -\nabla_{\mathbf{X}_1} \mathbf{N}, \mathbf{X}_1 \rangle_p = \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{11} \rangle_p \\ b_{12} = b_{21} &= f = l_p(\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)) = \langle -\nabla_{\mathbf{X}_1} \mathbf{N}, \mathbf{X}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{12} \rangle_p \\ b_{22} &= g = l_p(\mathbf{X}_2(p), \mathbf{X}_2(p)) = \langle -\nabla_{\mathbf{X}_2} \mathbf{N}, \mathbf{X}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{22} \rangle_p. \end{aligned}$$

Dalla definizione di l_p si ha:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathcal{L} = \mathcal{G}^{-1} \mathcal{B},$$

dove

$$\mathcal{G}^{-1} = (g^{ij})_{ij} = \frac{1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Pertanto in termini dei coefficienti della prima e seconda forma fondamentale si ha

$$\mathcal{H}(p) = \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{Eg + Ge - 2Ff}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \sum g^{ij} b_{ij} \quad (1.20)$$

e

$$\mathcal{K}(p) = \det \mathcal{L} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}. \quad (1.21)$$

Dallo studio del segno della curvatura gaussiana possiamo classificare i punti di una superficie \mathcal{S} .

Definizione 1.5.16. *Un punto $p \in \mathcal{S}$ si dice:*

- **Ellittico** se $\mathcal{K}(p) > 0$ (**ombelicale** se $k_1(p) = k_2(p)$)
- **Iperbolico** se $\mathcal{K}(p) < 0$
- **Parabolico** se $\mathcal{K}(p) = 0$ e $\mathcal{H}(p) \neq 0$ (una delle due curvature è diversa da zero)
- **Planare** se $\mathcal{K}(p) = 0$ e $\mathcal{H}(p) = 0$ (entrambe le curvature sono nulle).

Un'altra grandezza importante per il nostro studio è la *curvatura totale*.

Definizione 1.5.17. Sia \mathcal{S} una superficie in \mathbb{R}^3 e α una forma d'area su \mathcal{S} . Si definisce **curvatura totale** di \mathcal{S} la quantità

$$\tau(\mathcal{S}) \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{K} \cdot \alpha. \quad (1.22)$$

Proposizione 1.5.18. La curvatura totale di una superficie \mathcal{S} altro non è che l'area "algebrica" della sua immagine sferica mediante la mappa di Gauss N , cioè:

$$\tau(\mathcal{S}) = \pm A(N(\mathcal{S})). \quad (1.23)$$

Dimostrazione. Sia X una parametrizzazione locale regolare per \mathcal{S} con coordinate (u_1, u_2) . Sappiamo dalla 1.21 che $\mathcal{K} = \det \mathcal{L}$ dove \mathcal{L} è la matrice associata all'operatore forma rispetto alla base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ dello spazio tangente $T_p \mathcal{S}$. Si prova che l'area dell'immagine del parallelogramma $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}$ della superficie \mathcal{S} mediante la mappa di Gauss N , cioè $|\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2|$ è uguale all'area del parallelogramma $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}$ moltiplicata per \mathcal{K} :

$$|\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2| = \mathcal{K} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|. \quad (1.24)$$

Consideriamo ora β forma d'area sulla sfera S^2 . Sia $N^* \beta$ la 2-forma su \mathcal{S} così definita:

$$N^* \beta(v, w) = \beta(d_p N(v), d_p N(w)), \quad \forall v, w \in T_p \mathcal{S}, \quad (1.25)$$

con la proprietà

$$N^* \beta = \mathcal{K} \cdot \alpha. \quad (1.26)$$

Poiché una 2-forma è univocamente determinata dai valori che essa assume su due vettori linearmente indipendenti, proviamo la 1.26 sui vettori dello spazio tangente $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}$.

$$\begin{aligned} N^* \beta \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \right) &= \beta \left(d_p N \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right), d_p N \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right) \\ &= \text{area del parallelogramma} \left(d_p N \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right), d_p N \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \mathcal{K} \cdot \text{area del parallelogramma} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \\ &= \mathcal{K} \cdot \alpha \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \right), \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (1) discende dalla 1.24. Pertanto considerato un dominio $U \subset \mathcal{S}$ in cui la curvatura Gaussiana non cambia segno si ha

$$\int_U \mathcal{K} \cdot \alpha = \int_U N^* \beta = \pm \int_{N(U)} \beta = \pm \text{area del dominio } N(U) \subset S^2,$$

dove per convenzione poniamo $+$ se la mappa di Gauss conserva l'orientazione e $-$ se inverte. Essendo $\mathcal{K} = \det \mathcal{L}$ la prima si verifica quando $\mathcal{K} > 0$ e la seconda quando $\mathcal{K} < 0$. \square

1.6. Curve in superfici differenziabili regolari in \mathbb{R}^3

Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie differenziabile regolare orientata con parametrizzazione X e $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ una curva differenziabile regolare orientata con parametrizzazione naturale $\alpha(s) = X(u_1(s), u_2(s))$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Abbiamo già osservato che il versore tangente alla curva è dato da

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) = \frac{dX}{ds} = \frac{\partial X}{\partial u_1} \frac{du_1}{ds} + \frac{\partial X}{\partial u_2} \frac{du_2}{ds},$$

da cui derivando ancora otteniamo il vettore curvatura

$$\mathbf{K}_{\mathcal{C}}(s) = \alpha''(s) = \frac{d^2 X}{ds^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial X}{\partial u_i} \frac{d^2 u_i}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds}.$$

Possiamo vedere

$$\mathbf{K}_{\mathcal{C}}(s) = \mathbf{K}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(s) + \mathbf{K}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{N}}(s)$$

dove $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(s)$ è la componente sulla superficie e $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{N}}(s)$ è la componente lungo la normale \mathbf{N} alla superficie. Restano definite:

Definizione 1.6.1. $\forall p \in \mathcal{S}$

$k_g(p) = \langle \mathbf{K}_{\mathcal{C}}(p), \mathbf{N}(p) \times \mathbf{T}(p) \rangle$ **curvatura geodetica** di $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ in p ;

$k_n(p) = \langle \mathbf{K}_{\mathcal{C}}(p), \mathbf{N}(p) \rangle$ **curvatura normale** di $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ in p .

Osservazione 1.6.2.

- $k_g(p) = \pm | \mathbf{K}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(p) |$ (il segno dipende dall'orientazione di \mathcal{C} e di \mathcal{S});
- $k_n(p) = \pm | \mathbf{K}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{N}}(p) |$ (il segno dipende solo dall'orientazione di \mathcal{S});

- dalle formule di Frenet si ha

$$\mathbf{K}_{\mathcal{C}}(s) = \alpha''(s) = k_{\mathcal{C}}(s)\mathbf{n}$$

dove \mathbf{n} è la normale alla curva, detto ϑ l'angolo tra \mathbf{n} e la normale \mathbf{N} alla superficie si ha

$$k_n = k_{\mathcal{C}}\langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle = k_{\mathcal{C}} \cos \vartheta,$$

e

$$k_g = k_{\mathcal{C}} \sin \vartheta.$$

Diamo ora una interpretazione della seconda forma fondamentale l_p . Sia $p \in \mathcal{S}$ e \mathcal{C} una curva su \mathcal{S} uscente da p con parametrizzazione naturale α , $\alpha(0) = p$. Consideriamo la restrizione del campo di versori normali \mathbf{N} alla curva \mathcal{C} , $\mathbf{N}(\alpha(s)) = \mathbf{N}(s)$, allora

$$\begin{aligned} l_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) &= \langle L_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = \langle -\mathbf{N}'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle \mathbf{N}(0), \alpha''(0) \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{K}_{\mathcal{C}} \rangle = k_n(p). \end{aligned}$$

Quanto appena detto ci permette di affermare che la curvatura normale dipende solo dal versore tangente $\mathbf{T} \in T_p(\mathcal{S})$, cioè

$$k_n(p) = k(\mathbf{T}) = l_p(\mathbf{T}, \mathbf{T}).$$

In coordinate: $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $u'(t) = (u'_1(t), u'_2(t))$ si ha

$$k_n = l\left(\frac{u'}{|u'|}, \frac{u'}{|u'|}\right) = \frac{l(u', u')}{g(u', u')} = \frac{\sum b_{ij}u'_i u'_j}{\sum g_{ij}u'_i u'_j}. \quad (1.27)$$

In particolare otteniamo il seguente risultato.

Teorema 1.6.3 (Teorema di Meusnier). *Tutte le curve che stanno su una superficie \mathcal{S} ed hanno, in un dato punto $p \in \mathcal{S}$, lo stesso vettore tangente, hanno in questo punto la stessa curvatura normale.*

Osservazione 1.6.4.

- $k_i(p) = k(\mathbf{T}_i(p))$, $i = 1, 2$, sono le curvature normali nelle direzioni principali;
- $k_1(p)$, $k_2(p)$ sono il valore minimo e il valore massimo delle curvature normali di \mathcal{S} in p .

Definizione 1.6.5. Sia \mathcal{C} una curva differenziabile regolare su \mathcal{S} con parametrizzazione naturale $\alpha(s)$. Diremo che \mathcal{C} è una **curva geodetica** se e solo se la sua curvatura geodetica $k_g = \nabla_{\alpha'(s)}^{\mathcal{S}} \alpha'(s) = 0$.

Definizione 1.6.6. Una applicazione continua $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathcal{S}$ si dice **curva semplice spezzata chiusa** se

- (a) $\alpha(0) = \alpha(l)$;
- (b) $\forall t_1, t_2 \in [0, l]$ tali che $t_1 \neq t_2$, allora $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$;
- (c) esiste una suddivisione dell'intervallo $[0, l]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

tale che α è differenziabile in ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$.

I punti $\alpha(t_i)$ sono detti vertici.

Definizione 1.6.7. Si definisce **dominio** di \mathcal{S} un sottoinsieme di \mathcal{S} aperto e connesso.

$R \subset \mathcal{S}$ è una **regione** di \mathcal{S} se e solo se R è unione di un aperto connesso (dominio) con il suo bordo.

R è una **regione semplice** se e solo se R è omeomorfo ad un disco e il suo bordo è la traccia di una curva semplice spezzata chiusa $\alpha: \partial R = \alpha([0, l])$.

Una regione semplice con tre soli vertici è detta **triangolo**.

Una regione $R \subset \mathcal{S}$ si dice **regolare** se R è compatto e il suo bordo è unione di curve spezzate chiuse che non si intersecano.

Definizione 1.6.8. Sia R una regione regolare di \mathcal{S} regolare. Una **triangolazione** per R è una famiglia finita di triangoli $\mathcal{T} = \{T_i\}_i$, $i = 1, \dots, n$, tali che

- (a) $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$.
- (b) Se due qualsiasi triangoli hanno intersezione non vuota, allora la loro intersezione o contiene un lato in comune o un vertice in comune.

Detto f il numero delle facce, e il numero dei lati e v il numero dei vertici della triangolazione \mathcal{T} , si definisce **caratteristica di Eulero-Poincaré della regione regolare R** il numero

$$\chi(R) = f - e + v.$$

Si dimostra [3] che

- Ogni regione regolare $R \subset \mathcal{S}$ ammette sempre una triangolazione \mathcal{T} .
- La caratteristica di Eulero-Poincaré non dipende dalla triangolazione considerata.
- Se $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie compatta allora

$$\chi(\mathcal{S}) = 2 - 2g,$$

dove g è il genere della superficie.

Enunciamo ora i due teoremi di Gauss-Bonnet, locale prima e globale dopo.

Teorema 1.6.9 (Teorema locale di Gauss-Bonnet). [3] *Sia R una regione semplice di una superficie $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, e sia α una curva semplice spezzata chiusa positivamente orientata e tale che $\partial R = \alpha(I)$. Siano $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ gli angoli esterni di α , definiti nel modo ovvio come gli angoli tra i vettori tangenti ai lati $\alpha[t_i, t_{i+1}]$ del bordo di R nei vertici $\alpha(t_i)$ di R , e siano k_g le curvatures geodetiche dei lati del bordo. Allora*

$$\int_R \mathcal{K} + \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g + \sum_{i=1}^k \vartheta_i = 2\pi \quad (1.28)$$

dove \mathcal{K} è la curvatura di Gauss della superficie.

Teorema 1.6.10 (Teorema globale di Gauss-Bonnet). *Sia $R \subset \mathcal{S}$ una regione regolare di una superficie orientata e siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ spezzate semplici chiuse che formano il bordo ∂R di R . Supponiamo che ciascuna γ_i sia positivamente orientata e siano $\vartheta_1, \dots, \vartheta_p$ l'insieme di tutti gli angoli esterni di $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Allora*

$$\int_R \mathcal{K} + \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_g + \sum_{i=1}^p \vartheta_i = 2\pi\chi(R). \quad (1.29)$$

Dimostrazione. Cenno. Si considera una triangolazione di R e si applica il teorema locale ad ogni triangolo della famiglia e alla fine si sommano tutti i contributi. \square

1.7. Isometrie e conformità tra superfici di \mathbb{R}^3

Definizione 1.7.1. Siano \mathcal{S} , $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}^3$ due superfici differenziabili (più in generale due superfici riemanniane).

Un diffeomorfismo $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ è un' **isometria** se, $\forall p \in \mathcal{S}$, il differenziale $d_p\psi : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_{\psi(p)}\bar{\mathcal{S}}$ è un'isometria tra spazi vettoriali euclidei, cioè soddisfa:

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle d_p\psi(\mathbf{w}_1), d_p\psi(\mathbf{w}_2) \rangle_{\psi(p)}, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p(\mathcal{S}).$$

Se esiste un'isometria $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ diremo che \mathcal{S} e $\bar{\mathcal{S}}$ sono isometriche.

In altre parole un diffeomorfismo ψ è un'isometria se conserva la prima forma fondamentale. Più precisamente, dato $\mathbf{w} = \mathbf{X}_1 u'_1 + \mathbf{X}_2 u'_2 \in T_p(\mathcal{S})$, sia $d_p\psi(\mathbf{w}) = \bar{\mathbf{X}}_1 u'_1 + \bar{\mathbf{X}}_2 u'_2 \in T_{\psi(p)}(\bar{\mathcal{S}})$, si avrà

$$\begin{aligned} \langle d_p\psi(\mathbf{w}), d_p\psi(\mathbf{w}) \rangle_{\psi(p)} &= \bar{g}_{11}(u'_1)^2 + 2\bar{g}_{12}u'_1 u'_2 + \bar{g}_{22}(u'_2)^2 \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = g_{11}(u'_1)^2 + 2g_{12}u'_1 u'_2 + g_{22}(u'_2)^2, \end{aligned}$$

l'invarianza del prodotto scalare implica l'invarianza del tensore metrico: $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$.

E' immediato verificare che l'inversa e la composizione di due isometrie, è ancora un'isometria.

Definizione 1.7.2. Una mappa $\psi : V \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ di un intorno V di p in \mathcal{S} è un' **isometria locale** in p se esiste un intorno \bar{V} di $\psi(p)$ in $\bar{\mathcal{S}}$ tale che $\psi : V \rightarrow \bar{V}$ è un'isometria.

Può accadere che \mathcal{S} e $\bar{\mathcal{S}}$ siano localmente isometriche ma tra di esse non esista un'isometria globale.

Proposizione 1.7.3. Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile regolare orientata e h isometria di \mathbb{R}^3 , possiamo considerare la superficie $\bar{\mathcal{S}} = h(\mathcal{S})$ con l'orientazione indotta ($h|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ conserva l'orientazione), allora

$$\mathcal{K}_{\bar{\mathcal{S}}}(h(p)) = \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(p), \quad \mathcal{H}_{\bar{\mathcal{S}}}(h(p)) = \pm \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(p) \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

(\pm a seconda che h conserva o inverte l'orientazione di \mathbb{R}^3 .)

Teorema 1.7.4 (Egregium di Gauss). Date due superfici \mathcal{S} , $\bar{\mathcal{S}}$ e un'isometria (locale) $h : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$, allora

$$\mathcal{K}_{\mathcal{S}}(p) = \mathcal{K}_{\bar{\mathcal{S}}}(h(p)) \quad \forall p \in \mathcal{S}.$$

La curvatura di Gauss è invariante rispetto a isometrie riemanniane.

Tutte le proprietà e le nozioni che vengono preservate dalle isometrie sono dette *intrinseche*. La prima forma fondamentale, la curvatura di Gauss \mathcal{K} , l'area di \mathcal{S} (perchè dipende dalla prima forma fondamentale), sono tutte proprietà intrinseche. Non si può dire la stessa cosa per la curvatura media \mathcal{H} , cioè:

$$h : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathcal{S}} \text{ isometria riemanniana} \not\Rightarrow \mathcal{H}_{\overline{\mathcal{S}}}(h(p)) = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(p).$$

Proposizione 1.7.5. *Siano $X : U \rightarrow \mathcal{S}$ e $\overline{X} : U \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ parametrizzazioni tali che $E = \overline{E}$, $F = \overline{F}$ e $G = \overline{G}$ in U . Allora l'applicazione $\varphi = X \circ \overline{X}^{-1} : X(U) \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ è una isometria locale.*

Dimostrazione. Preso $p \in X(U)$ consideriamo $d_p\varphi : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_{\varphi(p)}\overline{\mathcal{S}}$. Sia $\mathbf{w} \in T_p\mathcal{S}$, \mathbf{w} è il vettore tangente di una curva regolare su \mathcal{S} : $\mathbf{w} = (X \circ \beta)'(0)$ dove $\beta(t) = (u_1(t), u_2(t))$ è una curva nel piano, la sua immagine mediante $d_p\varphi$, $d_p\varphi(\mathbf{w})$ è il vettore tangente alla curva $(\overline{X} \circ \beta)$ su $\overline{\mathcal{S}}$: $d_p\varphi(\mathbf{w}) = (\overline{X} \circ \beta)'(0)$. Poiché

$$I_p(\mathbf{w}) = E(u_1')^2 + 2Fu_1'u_2' + G(u_2')^2$$

e

$$I_{\varphi(p)}(d_p\varphi(\mathbf{w})) = \overline{E}(u_1')^2 + 2\overline{F}u_1'u_2' + \overline{G}(u_2')^2,$$

si conclude che

$$I_p(\mathbf{w}) = I_{\varphi(p)}(d_p\varphi(\mathbf{w}))$$

per ogni $p \in X(U)$ e per ogni $\mathbf{w} \in T_p\mathcal{S}$; dunque φ è un'isometria locale. \square

Sia \mathcal{S} una superficie in \mathbb{R}^3 . L'inclusione di \mathcal{S} in \mathbb{R}^3 induce in maniera naturale una metrica euclidea d su \mathcal{S} così definita

$$d(p, q) = |pq|, \quad \forall p, q \in \mathcal{S}, \quad (1.30)$$

dove $|pq|$ è la lunghezza del segmento congiungente i due punti in \mathbb{R}^3 . Tuttavia se si vogliono studiare proprietà metriche "intrinseche" delle superfici è più opportuno definire una metrica differente, la *distanza geodetica* ρ .

Definizione 1.7.6. *Data una superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ si definisce **distanza geodetica** ρ*

$$\rho(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \inf l(\alpha_{p,q}) \quad \forall p, q \in \mathcal{S} \quad (1.31)$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutte le lunghezze $l(\alpha_{p,q})$ di tutte le curve spezzate differenziabili α in \mathcal{S} di estremi p e q .

ρ dipende solo dalla geometria intrinseca della superficie e non da come essa è immersa in \mathbb{R}^3 , infatti è invariante sotto isometrie tra varietà differenziabili.

Proposizione 1.7.7. *Siano $\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}$ due superfici differenziabili in \mathbb{R}^3 . Se $f : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ è un'isometria, allora*

$$\rho(p, q) = \rho(f(p), f(q)), \quad \forall p, q \in \mathcal{S}.$$

In generale dati due punti $p, q \in \mathcal{S}$ si ha $\rho(p, q) > d(p, q)$, perché $\rho(p, q)$ è calcolata per mezzo di curve vincolate ad essere contenute in \mathcal{S} , mentre $d(p, q)$ è la lunghezza del segmento di estremi p e q .

La coppia (\mathcal{S}, ρ) è uno spazio metrico.

Definizione 1.7.8. *Diremo che lo spazio metrico (\mathcal{S}, ρ) è **completo** se ogni successione $\{a_i\}_i \subset \mathcal{S}$ di Cauchy converge in \mathcal{S} , o equivalentemente se ogni curva divergente in \mathcal{S} ha lunghezza infinita.*

Ricordiamo che una successione $\{a_i\}_i \subset \mathcal{S}$ è una successione di Cauchy (rispetto alla metrica ρ) se $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ tale che $\forall i, j > N$ si ha $\rho(a_i, a_j) < \varepsilon$.

Definizione 1.7.9. *Sia \mathcal{S} una superficie connessa e ρ la metrica geodetica definita dalla 1.31. Allora \mathcal{S} è completa se e solo se lo spazio metrico (\mathcal{S}, ρ) è completo.*

Lemma 1.7.10. *Una superficie localmente immersa \mathcal{S} è completa se e solo se qualsiasi sottoinsieme chiuso e limitato (rispetto alla metrica ρ) di \mathcal{S} è compatto.*

Da questo lemma deduciamo la seguente proposizione:

Proposizione 1.7.11. *Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ e ρ la metrica intrinseca. Allora lo spazio metrico (\mathcal{S}, ρ) è completo se e solo se ogni sottoinsieme chiuso e limitato (rispetto alla metrica ρ) di \mathcal{S} è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^3 .*

Ricordiamo, dire che $Y \subset \mathcal{S}$ è limitato rispetto alla metrica ρ , significa che esiste un $M \geq 0$ tale che

$$\rho(p, q) \leq M, \quad \forall p, q \in Y.$$

Così, la completezza di una superficie \mathcal{S} implica che ad un sottoinsieme limitato (nella metrica ρ) di \mathcal{S} non si può aggiungere nessun punto di \mathbb{R}^3 che sia limite di punti di \mathcal{S} ma non si trova su \mathcal{S} .

Definizione 1.7.12. Siano $\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}$ due superfici differenziabili in \mathbb{R}^3 (più in generale riemanniane). Un diffeomorfismo $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ è una **conformità**, se esiste una funzione differenziabile non nulla λ tale che per ogni $p \in \mathcal{S}$ e per ogni coppia $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p(\mathcal{S})$, si ha:

$$\langle d_p\psi(\mathbf{w}_1), d_p\psi(\mathbf{w}_2) \rangle_{\psi(p)} = \lambda^2(p) \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p.$$

La funzione differenziabile λ su \mathcal{S} è detta **fattore conforme**.

Le superfici \mathcal{S} e $\overline{\mathcal{S}}$ si dicono conformi.

Se $\lambda(p) = 1$ allora ψ è un'isometria locale.

Definizione 1.7.13. Una mappa $\psi : V \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ di un intorno V di p in \mathcal{S} è una **conformità locale** in p se esiste un intorno \overline{V} di $\psi(p)$ in $\overline{\mathcal{S}}$ tale che $\psi : V \rightarrow \overline{V}$ è un'applicazione conforme.

Se $\forall p \in \mathcal{S}$ esiste un'applicazione conforme in p , la superficie \mathcal{S} è detta **localmente conforme** a $\overline{\mathcal{S}}$.

Le applicazioni conformi preservano gli angoli tra vettori tangenti, ma non necessariamente le lunghezze. Infatti siano $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathcal{S}$ due curve su \mathcal{S} che si intersecano per un dato punto $t \in I$ formando un angolo ϑ dato da:

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{|\alpha'| |\beta'|}.$$

Attraverso la conformità $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ si otterranno le curve $\psi \circ \alpha, \psi \circ \beta$ su $\overline{\mathcal{S}}$, che si intersecano formando un angolo $\overline{\vartheta}$ dato da:

$$\cos \overline{\vartheta} = \frac{\langle d\psi(\alpha'), d\psi(\beta') \rangle}{|d\psi(\alpha')| |d\psi(\beta')|} = \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{\lambda^2 |\alpha'| |\beta'|} = \cos \vartheta.$$

Un esempio di applicazione conforme è fornito dalla *proiezione stereografica* dal polo nord $N = (0, 0, 1)$ (o dal polo sud $S = (0, 0, -1)$):

$$\begin{aligned} \pi_N : S^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

π_N è un diffeomorfismo con inversa

$$\pi_N^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right).$$

Anche per le applicazioni conformi vale la seguente proposizione:

Proposizione 1.7.14. *Siano $X : U \rightarrow \mathcal{S}$ e $\bar{X} : U \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ due parametrizzazioni regolari definite su uno stesso aperto $U \subset \mathbb{R}^2$, tali che :*

$$E = \lambda^2 \bar{E}, \quad F = \lambda^2 \bar{F}, \quad G = \lambda^2 \bar{G} \quad (1.33)$$

in U , dove λ^2 è una funzione differenziabile in U non nulla. Allora l'applicazione $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ è una conformità locale.

La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 1.7.5.

Osservazione 1.7.15. *E' facile vedere che la conformità locale è una relazione d'equivalenza, cioè se \mathcal{S}_1 è localmente conforme a \mathcal{S}_2 e \mathcal{S}_2 è localmente conforme a \mathcal{S}_3 , allora \mathcal{S}_1 è localmente conforme a \mathcal{S}_3 .*

Consideriamo $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione regolare per \mathcal{S} .

Definizione 1.7.16. *Una coppia di coordinate (u_1, u_2) su $U \subset \mathbb{R}^2$ si dicono **isoterme o conformi** per \mathcal{S} se i coefficienti della metrica sono:*

$$E = \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \rangle = \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2 \rangle = G = \lambda^2(u_1, u_2) \quad (1.34)$$

$$F = \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle = 0. \quad (1.35)$$

In tal caso la metrica ds^2 ha la forma:

$$ds^2 = \lambda^2(u_1, u_2)(du_1^2 + du_2^2). \quad (1.36)$$

Si dimostra che esistono sempre coordinate isoterme per una superficie \mathcal{S} .

1.8. Teorema di esistenza delle coordinate isoterme e sue conseguenze

Teorema 1.8.1 (Esistenza delle coordinate isoterme). *Sia (\mathcal{S}, g) una superficie riemanniana in \mathbb{R}^3 . Allora ogni punto $p \in \mathcal{S}$ regolare ammette un intorno U , $p \in U$, in cui esiste una riparametrizzazione di \mathcal{S} in termini di coordinate isoterme.*

Nel prossimo capitolo (vedi §2.0) daremo una dimostrazione di questo teorema nel caso particolare in cui \mathcal{S} è una superficie minima.

Una prima conseguenza del teorema dell'esistenza delle coordinate isoterme è la possibilità di introdurre una struttura complessa su una superficie orientata. Infatti vale il seguente lemma:

Lemma 1.8.2. *Siano (u_1, u_2) e $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ due sistemi di coordinate isoterme definite in un dominio U di una superficie orientata \mathcal{S} . Allora un cambiamento di coordinate*

$$(u_1, u_2) \mapsto (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$$

*che conserva l'orientazione è una trasformazione **conforme**.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j} \right)_{ij}$ la matrice del cambiamento di carta e \mathcal{G} , $\tilde{\mathcal{G}}$ le matrici delle metriche rispetto alle coordinate (u_1, u_2) e $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ rispettivamente. Poiché quest'ultime sono isoterme, si ha $\mathcal{G} = \lambda^2 \mathcal{I}$ e $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\lambda}^2 \mathcal{I}$ dove \mathcal{I} è la matrice identità. Ora

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{U}^T \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{U}$$

cioè

$$\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 \mathcal{U}^T \mathcal{U},$$

che implica che la matrice $\mathcal{U}^T \mathcal{U} = a \mathcal{I}$ è multipla cioè della matrice identità. Allora $\mathcal{U} = \sqrt{a} \mathcal{V}$ dove \mathcal{V} è una matrice ortogonale, pertanto il cambiamento di carta è un'omotetia e come tale conserva gli angoli. \square

Quindi in una superficie orientabile poiché i cambiamenti di carta che conservano l'orientazione sono applicazioni biolomorfe (vedi §1.11), è possibile definire sulla superficie una struttura complessa. Superfici dotate di struttura complessa sono dette *superfici di Riemann*.

Osservazione 1.8.3. *Una struttura conforme su \mathcal{S} automaticamente fornisce un'orientazione su \mathcal{S} .*

Se \mathcal{S} ha una struttura conforme, allora possiamo definire tutti i concetti che sono invarianti sotto applicazioni conformi. In particolare si può parlare di funzioni armoniche, di funzioni complesse analitiche ...

Un'altra conseguenza del teorema 1.8.1 è il seguente:

Teorema 1.8.4. *Due superfici regolari qualsiasi sono localmente conformi.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che ogni superficie regolare è localmente conforme al piano.

Sia \mathcal{S} una superficie regolare e $p \in \mathcal{S}$, per il teorema 1.8.1 esiste un intorno U di p in cui la superficie \mathcal{S} ha una parametrizzazione $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

in coordinate (u_1, u_2) isoterme, rispetto alle quali i coefficienti della prima forma fondamentale sono:

$$E = G = \lambda^2, \quad F = 0.$$

Sia $\bar{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione del piano, in tal caso

$$\bar{E} = \bar{G} = 1, \quad \bar{F} = 0.$$

Le parametrizzazioni X e \bar{X} soddisfano le ipotesi della proposizione 1.7.14 quindi \mathcal{S} è localmente conforme al piano e, per composizione, localmente conforme ad una qualsiasi altra superficie regolare. \square

Introducendo le coordinate isoterme molte formule risultano significativamente semplificate; ad esempio la 1.20, considerando che $\det g_{ij} = \lambda^4$, diventa

$$\mathcal{H} = \frac{e + g}{2\lambda^2}, \quad (1.37)$$

mentre la 1.21 diventa

$$\mathcal{K} = \frac{eg - f^2}{\lambda^4}. \quad (1.38)$$

Proposizione 1.8.5. *Sia $X = X(u_1, u_2)$ una superficie regolare data in coordinate isoterme. Allora*

(a)

$$\langle \Delta X, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in T_p(\mathcal{S}), \quad (1.39)$$

(b)

$$\Delta X = \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = 2\lambda^2 \mathbf{H}, \quad (1.40)$$

dove \mathbf{H} è il *vettore curvatura media* così definito:

$$\mathbf{H} = \mathcal{H}\mathbf{N}, \quad (1.41)$$

e Δ denota il Laplaciano $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2}$.

Dimostrazione.

X è isoterma \implies valgono le 1.34 e 1.35

(a) Per provare la 1.39 basta dimostrare che

$$\langle \Delta X, \mathbf{X}_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

A tale scopo deriviamo la 1.34 rispetto a u_1 e la 1.35 rispetto a u_2 si ha

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_1 \rangle &= \langle \mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{X}_{22}, \mathbf{X}_1 \rangle &= -\langle \mathbf{X}_{12}, \mathbf{X}_2 \rangle\end{aligned}$$

per cui sommando la prima alla seconda

$$\langle \Delta X, \mathbf{X}_1 \rangle = 0.$$

Analogamente derivando la 1.34 rispetto a u_2 e la 1.35 rispetto a u_1 si ha

$$\langle \Delta X, \mathbf{X}_2 \rangle = 0.$$

(b) Proviamo ora la 1.40. Sia \mathbf{N} un arbitrario versore normale, si ha

$$\langle \Delta X, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{X}_{11}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{X}_{22}, \mathbf{N} \rangle = e + g = 2\lambda^2 \mathcal{H}$$

dalla 1.37.

$\implies \Delta X/2\lambda^2$ è un vettore normale che soddisfa la 1.41, e questo prova la 1.40.

□

1.9. Teoria globale

Finora abbiamo fatto solo considerazioni di carattere locale sulla superficie \mathcal{S} considerando una parametrizzazione locale regolare X in termini delle due coordinate (u_1, u_2) . Qualora si vogliano ottenere dei risultati globali, bisogna tener presente che la superficie è ricoperta da intorni in ciascuno dei quali è data una parametrizzazione locale X . Per poter fare uno studio globale di tutta la superficie è più opportuno definire una superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ come:

Definizione 1.9.1. *Una superficie differenziabile \mathcal{S} in \mathbb{R}^3 (valido per qualsiasi \mathbb{R}^n) è una 2-varietà differenziabile $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ con un'immersione locale $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

Quindi, d'ora in poi, quando si faranno delle considerazioni di carattere globale, vedremo la nostra superficie \mathcal{S} come l'immagine mediante un'immersione locale Φ di una 2-varietà differenziabile connessa \mathcal{M} . In particolare, parleremo di un punto di \mathcal{S} riferendoci alla coppia $(p_0, \Phi(p_0))$ dove p_0 è un punto su \mathcal{M} .

Ovviamente se \mathcal{S} è una superficie differenziabile in \mathbb{R}^3 e $(R_a, \varphi_a, U_a) \in \mathcal{A}$ è una carta su \mathcal{M} con coordinate (u_1, u_2) , allora la funzione composta

$$R_a \xrightarrow{\varphi_a^{-1}} U_a \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3$$

è una parametrizzazione locale per la superficie \mathcal{S} . Dunque tutte le proprietà locali delle superfici che sono indipendenti dai parametri sono ben definite su una superficie globale definita come sopra. Si può quindi parlare di regolarità di \mathcal{S} in un punto, di spazio tangente in un punto, curvatura media in un punto...

Diremo inoltre che \mathcal{S} è *orientabile* se tale è la \mathcal{M} , e un'orientazione su \mathcal{S} è un'orientazione su \mathcal{M} . La stessa cosa si ha per le proprietà topologiche di \mathcal{S} : \mathcal{S} *compatta* se \mathcal{M} è compatta, \mathcal{S} è *connessa* se \mathcal{M} è connessa ...

Sia \mathcal{S} una superficie regolare in \mathbb{R}^3 data mediante un'immersione $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora \mathcal{S} induce, mediante la Φ , una metrica Riemanniana su \mathcal{M} ; in particolare induce una struttura conforme su \mathcal{M} .

Definizione 1.9.2. Diremo che \mathcal{S} è **completa** se \mathcal{M} è completa rispetto alla metrica Riemanniana indotta dall'immersione Φ .

Se \mathcal{S} è una superficie data mediante una immersione $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora ad \mathcal{S} possiamo associare una superficie semplicemente connessa $\tilde{\mathcal{S}}$, detta *rivestimento universale di \mathcal{S}* , definita mediante la composizione $\varphi \circ \pi : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove $\tilde{\mathcal{M}}$ è il rivestimento universale di \mathcal{M} visto in §1.2. Ne segue che: $\tilde{\mathcal{S}}$ è regolare se e solo se \mathcal{S} è regolare, e $\tilde{\mathcal{S}}$ è completa se e solo se \mathcal{S} è completa. Dunque, molte questioni concernenti le superfici possono essere semplificate considerando solo superfici semplicemente connesse.

1.10. Superfici di rotazione e superfici rigate

In questa sezione prenderemo in esame due classi di superfici differenziabili in \mathbb{R}^3 : le superfici di rotazione e le superfici rigate e per ciascuna daremo un esempio particolare che ricorrerà spesso nella nostra trattazione.

Siano $r, h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili definite in un intervallo aperto (a, b) di \mathbb{R} e supponiamo che r sia sempre positiva. Consideriamo la curva nel piano xz data da

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u_2 &\mapsto (r(u_2), h(u_2)). \end{aligned}$$

Una rotazione di α attorno all'asse z origina una superficie \mathcal{S} , detta di **superficie di rotazione**, che può essere parametrizzata da

$$X(u_1, u_2) = (r(u_2) \cos u_1, r(u_2) \sin u_1, h(u_2)) \quad (1.42)$$

dove $0 < u_1 < 2\pi$ è l'angolo di rivoluzione e $a < u_2 < b$. La curva α è detta *generatrice* della superficie \mathcal{S} , l'asse z è l'*asse di rotazione* e i cerchi descritti dai punti di α durante la rotazione sono detti *paralleli* di \mathcal{S} , mentre le varie posizioni di α su \mathcal{S} (i profili) sono dette *meridiani* di \mathcal{S} .

Un esempio interessante di superficie di rotazione è fornito dal **catenoide** che si ottiene facendo ruotare attorno ad un asse che non la interseca (l'asse z) una *catenaria*. La catenaria è la curva descritta da una corda ideale, cioè perfettamente flessibile, inestensibile, senza spessore e di densità uniforme, appesa a due punti e lasciata libera di pendere sotto l'azione del proprio peso. L'equazione della catenaria è

$$x = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right) \stackrel{\text{def}}{=} a \frac{e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}}{2},$$

dove a è il punto di intersezione della catenaria con l'asse x . Pertanto, per il catenoide abbiamo la seguente parametrizzazione

$$X(u_1, u_2) = \left(a \cosh\left(\frac{u_2}{a}\right) \cos u_1, a \cosh\left(\frac{u_2}{a}\right) \sin u_1, u_2\right). \quad (1.43)$$

Chiameremo **superficie rigata** la superficie $\mathcal{S} = \bigcup_{p \in \mathcal{C}} R_p$ dove R_p è un intervallo di retta detta *generatrice* uscente da $p \in \mathcal{C}$ con $\mathcal{C} = \alpha(a, b) \subset \mathbb{R}^3$ curva differenziabile regolare detta *direttrice*.

Esempi di superfici rigate sono tutti i cilindri, in cui i generatori sono tutti paralleli, e i coni dove i generatori passano tutti per uno stesso punto, anche il piano è una superficie rigata dello stesso tipo dei coni e dei cilindri. Un esempio interessante di superfici di questo tipo è fornito dall'*elicoide*. L'elicoide è ottenuto tracciando da ogni punto di un'*elica* (la direttrice) attorno all'asse z , rette parallele al piano xy e intersecanti l'asse z (le generatrici). Se l'elica è parametrizzata da

$$\alpha(u_2) = (\cos u_2, \sin u_2, bu_2) \quad 0 < u_2 < 2\pi,$$

dove $2\pi b$ è il passo dell'elica, la distanza cioè tra due punti successivi dell'elica che si trovano su una retta parallela all'asse z , e u_2 misura l'angolo che si forma tra l'asse x e la retta congiungente l'origine degli assi con la proiezione, sul piano xy , del punto $\alpha(u_2)$, allora abbiamo la seguente parametrizzazione per l'elicoide

$$X(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, bu_2), \quad (1.44)$$

dove $0 < u_2 < 2\pi$, u_1 è la coordinata standard sul generatore $-\infty < u_1 < \infty$ e $2\pi b$ rappresenta come sopra la distanza tra due generatori paralleli non coincidenti.

Osservazione 1.10.1. *Un piano può essere visto come un elicoide degenero di passo nullo.*

1.11. Richiami di geometria differenziale complessa

Per risolvere numerosi problemi di geometria è comodo utilizzare la teoria dei numeri complessi.

Come noto, è possibile identificare \mathbb{R}^2 con il piano complesso \mathbb{C} mediante l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u_1, u_2) &\mapsto \xi = u_1 + iu_2. \end{aligned}$$

Sia $U \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ aperto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(u_1, u_2) = \varphi(u_1, u_2) + i\psi(u_1, u_2),$$

dove $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1.11.1. Diremo che $f = \varphi + i\psi$ è di classe C^k se tali sono la φ e la ψ .

Ricordiamo che in §1.1 abbiamo detto che una funzione reale $\varphi \in C^k$ se ammette derivate parziali continue fino all'ordine k .

Sia $f \in C^1$ definiamo gli *operatori differenziali complessi*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - i \frac{\partial}{\partial u_2} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i \frac{\partial}{\partial u_2} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right).$$

Sono operatori lineari e vale la regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di funzioni.

Osservazione 1.11.2. Se (u_1, u_2) sono coordinate su U , abbiamo visto che $(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2})$ è una base per $T_p U$ con $p \in U$. Analogamente $(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}})$ è una base per ${}^{\mathbb{C}}T_p U$ dove ${}^{\mathbb{C}}T_p U$ è la complessificazione dello spazio tangente reale, cioè ogni elemento di ${}^{\mathbb{C}}T_p U$ si può vedere come combinazione lineare $\alpha \frac{\partial}{\partial u_1} + \beta \frac{\partial}{\partial u_2}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Inoltre i differenziali complessi $d\xi = du_1 + i du_2$ e $d\bar{\xi} = du_1 - i du_2$ formano una base per lo spazio cotangente complesso ${}^{\mathbb{C}}T_p^* U$ aggiunto di ${}^{\mathbb{C}}T_p U$, dove

$$du_1 \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u_1} + \beta \frac{\partial}{\partial u_2} \right) = \alpha$$

e

$$du_2 \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u_1} + \beta \frac{\partial}{\partial u_2} \right) = \beta.$$

Definizione 1.11.3. Una funzione $f \in C^1$ definita in un aperto $U \subset \mathbb{C}$ a valori in \mathbb{C} si dice **analitica** o **olomorfa** se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} = 0 \tag{1.45}$$

in ogni punto di U .

Proposizione 1.11.4. Siano $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni olomorfe su U . Allora la somma $f + g$ e il prodotto fg , definiti nel modo naturale, sono ancora funzioni olomorfe su U . Anche f/g è olomorfo sull'insieme aperto $\{\xi \in U : g(\xi) \neq 0\}$.

Inoltre, dato $V \subset \mathbb{C}$ aperto, se $g : U \rightarrow V$ è olomorfa e $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora $f \circ g$ è olomorfa.

Se $f(\xi)$ è analitica, ovviamente soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -i \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

riconducibile alle equazioni reali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \quad (1.46)$$

in ogni punto di U . Le 1.46 sono note come *equazioni di Cauchy-Riemann*.

Proposizione 1.11.5. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in C^1$ olomorfa allora*

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial f}{\partial u_1} \equiv -i \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

su U .

In §1.1 abbiamo definito il concetto di *differenziabilità* per funzioni definite in aperti $U \subset \mathbb{R}^n$, ora considereremo funzioni definite in intervalli chiusi di \mathbb{R} e daremo la definizione di integrale di linea complesso.

Definizione 1.11.6. *Una funzione $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **differenziabile continuamente** (o C^1) se*

- (a) η è continua in $[a, b]$;
- (b) η' esiste in (a, b) ;
- (c) η' ha un'estensione continua in $[a, b]$.

In altri termini richiediamo che esistano

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \eta'(t) \quad \lim_{t \rightarrow b^-} \eta'(t).$$

In tal caso vale il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\eta(b) - \eta(a) = \int_a^b \eta'(t) dt. \quad (1.47)$$

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva : $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, diremo che $\gamma \in C^1$ se tali sono γ_i , $\forall i = 1, 2$ (come funzioni a valori reali). Scriveremo

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + i \frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Definizione 1.11.7. Sia $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua con $\eta(t) = \eta_1(t) + i\eta_2(t)$. Allora

$$\int_a^b \eta(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \eta_1(t) dt + i \int_a^b \eta_2(t) dt.$$

Dalla definizione 1.11.7 e dalla 1.47 si ha

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt. \quad (1.48)$$

Siamo ora in grado di enunciare il teorema fondamentale del calcolo lungo una curva.

Definizione 1.11.8. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ curva C^1 e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Si definisce **integrale di linea complesso della f**

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi) d\xi.$$

Proposizione 1.11.9. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ curva C^1 e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, allora

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi) d\xi \quad (1.49)$$

dove l'ultima uguaglianza è la definizione dell'**integrale di linea complesso**.

Dimostrazione. Sia $f = \varphi + i\psi$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + i \frac{\partial \psi}{\partial u_i},$$

inoltre f è olomorfa, soddisfa le equazioni di Cauchy 1.46

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial u_1}$$

da cui sostituendo nella 1.47 si ha

$$\begin{aligned} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) &= \int_a^b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) - \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_2}{dt}(t) \right) \\ &\quad + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_2}{dt}(t) \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right] \Big|_{\gamma(t)} \right) \cdot \left[\frac{d\gamma_1}{dt}(t) + i \frac{d\gamma_2}{dt}(t) \right] dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial u_1}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) dt.
\end{aligned}$$

□

Un'importante proprietà dell'integrale di linea complesso è che esso non dipende dal modo in cui parametrizziamo il cammino.

Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ chiameremo *derivata complessa* di f in $\xi_0 \in U$, e la indichiamo con $f'(\xi_0)$, il

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0},$$

se tale limite esiste in \mathbb{C} .

Teorema 1.11.10. [6] Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e f una funzione olomorfa in U . Allora f' esiste in ogni punto di U e

$$f'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

per ogni $\xi \in U$.

Osservazione 1.11.11. $f' = \partial f / \partial \xi$ è valido solo quando f è una funzione olomorfa e in tal caso si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - i \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}.$$

Esiste una sorta di inverso del teorema precedente.

Teorema 1.11.12. Sia $f \in C^1(U)$. Se f ammette derivata complessa in ogni punto di U , allora f è olomorfa in U .

Dimostrazione. Proviamo che $f = \varphi + i\psi$, con $\varphi, \psi \in C^1(U)$ a valori reali, verifica le 1.46.

Sia $\xi_0 = (x_0, y_0) \in U$ consideriamo

$$f'(\xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi_0 + h) - f(\xi_0)}{h},$$

con $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}$. Scomponiamo tale limite lungo le due direzioni orizzontale e verticale, che si ottengono ponendo rispettivamente $h_2 = 0$ e $h_1 = 0$.

Nella direzione orizzontale abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h_1, y_0) - \varphi(x_0, y_0) + i\psi(x_0 + h_1, y_0) - i\psi(x_0, y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}. \quad (\star) \end{aligned}$$

Procedendo in maniera analoga nella direzione verticale si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{\varphi(x_0, y_0 + h_2) - \varphi(x_0, y_0) + i\psi(x_0, y_0 + h_2) - i\psi(x_0, y_0)}{h_2} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}. \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Uguagliando la (\star) e la $(\star\star)$ si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

che sono le equazioni di Cauchy-Riemann. \square

Osservazione 1.11.13. *E' logico considerare una funzione f che ammette derivata complessa in ogni punto di U senza la condizione aggiunta che $f \in C^1(U)$. Sotto questa ipotesi le funzioni reali φ e ψ soddisfano ancora le equazioni di Cauchy-Riemann.*

Il teorema 1.11.12 ci permette di dare una nuova definizione di funzioni olomorfe: $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto, è *olomorfa se ammette derivata complessa in ogni punto U* . Più avanti dimostreremo che ogni funzione olomorfa ammette derivate parziali continue di qualsiasi ordine.

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa su \mathbb{C} indichiamo con γ^* la traccia di gamma, cioè $\gamma^* = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ e sia Ω il complementare di γ^*

Definizione 1.11.14. *Si definisce **indice di z rispetto a γ** la quantità:*

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \quad z \in \Omega. \quad (1.50)$$

Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ cammini nel piano, introduciamo la “somma formale” $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. Indichiamo con $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_n^*$. Si definisce

$$\int_{\Gamma} f d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f d\xi,$$

per ogni $f \in C(\Gamma^*)$.

Definizione 1.11.15. Sia U un aperto di \mathbb{C} , Γ e γ_i definite come sopra. Se $\gamma_i^* \subset U$ allora Γ è detta **catena**.

Inoltre se ciascuna γ_i è una curva chiusa, allora Γ è detta **ciclo**.

Sia Γ un ciclo e $\alpha \notin \Gamma^*$ allora definiamo

$$\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha}$$

Ovviamente

$$\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma_i}(\alpha).$$

Teorema 1.11.16 (Teorema di Cauchy per un aperto convesso).

Sia γ una curva chiusa C^1 in un aperto convesso U e f una funzione olomorfa su U . Sia $z \in U$ ma $z \notin \gamma^*$ allora

$$f(z) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.51)$$

Un caso di particolare interesse si ha quando $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$. Questo è il caso che sfrutta il seguente teorema.

Teorema 1.11.17. [6] Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e f una funzione olomorfa su U . Allora $f \in C^{\infty}(U)$ (ammette, cioè, derivate parziali di ogni ordine). Inoltre, se $\overline{B(p, r)} \subseteq U$ e $z \in B(p, r)$, allora

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\xi-p|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione. Il teorema sfrutta la *formula integrale di Cauchy* secondo la quale se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva chiusa C^1 allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi.$$

Considerata la funzione

$$\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

continua sul $\partial B(p, r)$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{h} \oint_{\partial B(p, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - (z+h)} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(p, r)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - (z+h)} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Dunque

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(p, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Considerando ora la f' si ha

$$(f'(z))' = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\partial B(p, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi.$$

Così f' ammette derivata continua in $B(p, r)$. Quindi dal teorema 1.11.12 la f' è olomorfa, in particolare $f' \in C^1$ così $f \in C^2$. Ripetendo questo ragionamento $(k-1)$ volte, proviamo l'esistenza e la formula per $(\partial/\partial z)^k f(z)$. Ne segue allora che $f \in C^k(U)$ per ogni $k = 1, 2, 3, \dots$. Pertanto $f \in C^\infty(U)$. \square

Corollario 1.11.18. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, allora $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa.*

Dimostrazione. Sia f olomorfa in U . Allora per il teorema precedente $f \in C^\infty(U)$, certamente $f \in C^2(U)$ quindi $f' \in C^1$. Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f' = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} f \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f \right),$$

la quantità nell'ultima parentesi è identicamente nulla, quindi

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f' = 0$$

che è la condizione di Cauchy-Riemann per la f' . \square

Un'altra conseguenza del teorema 1.11.17 è il seguente:

Teorema 1.11.19. Per ogni aperto U nel piano, ogni f olomorfa in U è rappresentabile da una serie di potenze in U . Dato $z_0 \in U$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.52)$$

dove

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

deriva dal teorema precedente.

Consideriamo ora le applicazioni conformi. Ricordiamo che un'applicazione f si dice conforme in un punto $p \in \mathbb{C}$ se conserva gli angoli in p . Le funzioni olomorfe godono della seguente proprietà.

Teorema 1.11.20. Sia $p \in \mathbb{C}$ e f una funzione olomorfa in un intorno di p . Siano w_1, w_2 due numeri complessi di modulo unitario: $|w_1| = |w_2|$. Consideriamo le derivate direzionali

$$D_{w_i} f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tw_i) - f(p)}{t}, \quad i = 1, 2.$$

Allora

$$|D_{w_1} f(p)| = |D_{w_2} f(p)|. \quad (1.53)$$

Inoltre se $|f'(p)| \neq 0$, l'angolo tra w_1 e w_2 è uguale all'angolo tra $D_{w_1} f(p)$ e $D_{w_2} f(p)$.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\begin{aligned} D_{w_i} f(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tw_i) - f(p)}{tw_i} \cdot \frac{tw_i}{t} \\ &= f'(p) \cdot w_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

□

Questo teorema afferma che ogni funzione olomorfa è conforme. E' vero anche il viceversa, cioè se valgono le tesi del teorema precedente in un punto p , allora f ammette derivata complessa in p .

Teorema 1.11.21. Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f \in C^1$ conforme in ogni punto di U , allora f è olomorfa in U .

Dimostrazione. La condizione di conformità implica

$$|df|^2 = \lambda^2 |d\xi|^2.$$

Ma

$$\begin{aligned} |df|^2 &= \left| \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right|^2 \\ &= \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) |dz|^2 + 2\operatorname{Re} \left[\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} \cdot (dz)^2 \right]. \end{aligned}$$

In ogni punto $z_0 \in U$ il secondo addendo dell'ultima uguaglianza non è un multiplo di $|dz|^2$ come funzione nello spazio tangente, pertanto il coefficiente della $(dz)^2$ deve essere uguale a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = 0.$$

Quindi o

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

cioè f olomorfa o

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

cioè f antiolomorfa. □

Introduciamo ora una nuova classe di funzioni complesse, le funzioni *armoniche*.

Definizione 1.11.22. Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $\varphi \in C^2(U)$. φ si dice **armonica** se

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2} \equiv 0,$$

dove $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2}$ rappresenta l'operatore di Laplace.

Proposizione 1.11.23. Sia $f = \varphi + i\psi$ una funzione olomorfa definita su un aperto $U \subset \mathbb{C}$, allora la parte reale e la parte immaginaria di f sono funzioni armoniche.

Dimostrazione. Per il teorema 1.11.17 $f \in C^\infty$ pertanto, per definizione, sia φ che ψ sono C^∞ , in particolare sono C^2 e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial u_1}.$$

Pertanto osservando che le derivate parziali miste coincidono, si ha

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2} = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial\psi}{\partial u_2} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial u_1} \right) = 0.$$

Analogamente per la ψ . □

Teorema 1.11.24. *Siano $f, g \in C^1$ su un rettangolo aperto*

$$\mathcal{R} = \left\{ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : |u_1 - a| < \delta, |u_2 - b| < \varepsilon \right\},$$

se $\partial f/\partial u_2 \equiv \partial g/\partial u_1$ su \mathcal{R} , allora esiste una funzione $h \in C^2(\mathcal{R})$ tale che

$$\frac{\partial h}{\partial u_1} \equiv f, \quad \frac{\partial h}{\partial u_2} \equiv g$$

su \mathcal{R} . Se f e g sono a valori reali, allora anche h lo è.

Dimostrazione. Per $(u_1, u_2) \in \mathcal{R}$, consideriamo la funzione

$$h(u_1, u_2) = \int_a^{u_1} f(t, b) dt + \int_b^{u_2} g(u_1, s) ds.$$

Si dimostra che

$$\frac{\partial h}{\partial u_1} \equiv f \in C^1(\mathcal{R}),$$

$$\frac{\partial h}{\partial u_2} \equiv g \in C^1(\mathcal{R}),$$

pertanto $h \in C^2(\mathcal{R})$. Per come si è definita la h è chiaro che se f e g sono a valori reali, allora anche h lo è. □

Corollario 1.11.25. *Sia $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo aperto e $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ armonica, allora esiste una funzione olomorfa $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi = \operatorname{Re}(F)$.*

Dimostrazione. $\varphi \in C^2$ e

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2}.$$

Consideriamo le funzioni

$$f = -\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \quad g = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1},$$

ovviamente $f, g \in C^1$ e

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{\partial g}{\partial u_1}$$

su \mathcal{R} , pertanto per il teorema precedente esiste una funzione $\psi \in C^2(\mathcal{R})$ tale che

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = f = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_2},$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_2} = g = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}.$$

Posto $F = \varphi + i\psi$ si ha che F soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann su \mathcal{R} quindi F è olomorfa. \square

Il teorema 1.11.24 ed il corollario 1.11.25 continuano a valere anche quando al posto del rettangolo aperto \mathcal{R} consideriamo una boccia aperta B o un insieme aperto e convesso U in \mathbb{C} .

Osservazione 1.11.26. Ogni coppia di funzioni reali φ, ψ soddisfacenti le 1.46 sono dette **funzioni armoniche coniugate**. Tali sono la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa $f = \varphi + i\psi$. La ψ è univocamente determinata a meno di una costante additiva da φ .

Corollario 1.11.27. Se $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica in $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, allora $\varphi \in C^\infty$.

Dimostrazione. Sia $B \subseteq U$ una boccia aperta, allora considerata la φ ristretta a B per il corollario 1.11.25 esiste una funzione olomorfa $F_B : B \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} F_B = \varphi|_B$. Poiché $F_B \in C^\infty$ anche la sua parte reale lo è in B . La tesi segue dall'arbitrarietà della boccia B . \square

Dalle osservazioni fatte precedentemente, questo corollario è una conseguenza del teorema 1.11.17.

Teorema 1.11.28. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un rettangolo aperto o un disco aperto e F una funzione olomorfa su U . Allora esiste una funzione olomorfa H su U tale che

$$H' = \frac{\partial H}{\partial \xi} \equiv F$$

per ogni $\xi \in U$.

Dimostrazione. Scriviamo $F(\xi) = \varphi(\xi) + i\psi(\xi)$. Siano $f = \varphi$ e $g = -\psi$, $f, g \in C^1(U)$ e tali che

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \frac{\partial g}{\partial u_1},$$

allora per il teorema 1.11.24 esiste una funzione $h_1 \in C^2(U)$ tale che

$$\frac{\partial h_1}{\partial u_1} = f = \varphi \quad \text{e} \quad \frac{\partial h_1}{\partial u_2} = g = -\psi.$$

Siano ora $\tilde{f} = \psi$ e $\tilde{g} = \varphi$. $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^1(U)$ e anche per esse vale

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_2} = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u_1},$$

quindi sempre per il teorema 1.11.24 si ha che esiste $h_2 \in C^2(U)$ tale che

$$\frac{\partial h_2}{\partial u_1} = \tilde{f} = \psi \quad \text{e} \quad \frac{\partial h_2}{\partial u_2} = \tilde{g} = \varphi.$$

Preso allora la funzione $H(\xi) = h_1(\xi) + ih_2(\xi)$ si ha

$$\frac{\partial h_1}{\partial u_1} = \varphi = \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h_1}{\partial u_2} = -\psi = -\frac{\partial h_2}{\partial u_1}.$$

Quindi H è olomorfa. Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - i \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \cdot (h_1 + ih_2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_1} + \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial u_1} - \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi + \varphi) + \frac{i}{2}(\psi + \psi) = F. \end{aligned}$$

□

Questo teorema è molto importante perché ci permette di affermare che l'integrale di linea di una funzione olomorfa lungo un cammino chiuso è nullo. Vale infatti il seguente

Teorema 1.11.29 (Teorema integrale di Cauchy). *Sia f una funzione olomorfa su un disco aperto U del piano complesso, e $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ una curva C^1 su U tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora*

$$\oint_{\gamma} f(\xi) d\xi = 0.$$

Dimostrazione. f olomorfa, per il teorema 1.11.28 esiste una funzione H su U olomorfa tale che $H' \equiv f$ su U . Poiché $\gamma(a) = \gamma(b)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= H(\gamma(b)) - H(\gamma(a)) \\ &\stackrel{(a)}{=} \oint_{\gamma} H'(\xi) d\xi = \oint_{\gamma} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

dove la (a) deriva dalla proposizione 1.11.9. \square

Teorema 1.11.30 (Stima di Cauchy). *Sia U aperto in \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e $p \in U$. Supponiamo che $\overline{B}(p, r) \subset U$, $r > 0$. Allora, posto $M = \sup_{\xi \in \overline{B}(p, r)} |f(\xi)|$ si ha*

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial \xi^k}(p) \right| \leq \frac{Mk!}{r^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lemma 1.11.31. *Supponiamo f funzione olomorfa definita in un aperto connesso $U \subseteq \mathbb{C}$. Se $\partial f / \partial \bar{\xi} \equiv 0$ in U , allora f è costante su U .*

Dimostrazione. Sia f è olomorfa, allora $\partial f / \partial \bar{\xi} = 0$ e poiché abbiamo assunto che $\partial f / \partial \bar{\xi} = 0$ si ha $\partial f / \partial u_1 = \partial f / \partial u_2 \equiv 0$. Così f è costante. \square

Una funzione f che sia definita e olomorfa in tutto \mathbb{C} è detta *intera*, cioè f è della forma

$$f(\xi) = a\xi + b \quad \xi \in \mathbb{C},$$

dove a, b sono numeri complessi con $a \neq 0$.

Teorema 1.11.32 (Teorema di Liouville). *Una funzione f intera e limitata è costante.*

Dimostrazione. Sia f limitata, quindi esiste un $M \geq 0$ tale che $|f(\xi)| \leq M$ per ogni $\xi \in \mathbb{C}$. Preso un punto $p \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, applichiamo il teorema della stima di Cauchy per $k = 1$ su $\overline{B}(p, r)$. Si ha

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(p) \right| \leq \frac{M}{r}.$$

Questa disuguaglianza è vera per ogni $r > 0$, quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(p) = 0.$$

Data l'arbitrarietà di p , si conclude che

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \equiv 0,$$

per il lemma precedente f è costante. \square

Analizziamo ora alcune proprietà delle funzioni armoniche e olomorfe che ci saranno utili nel corso della nostra trattazione.

Teorema 1.11.33. *Sia Ω una regione (unione di un aperto connesso con il suo bordo) di \mathbb{C} e f una funzione olomorfa su Ω . Indichiamo con*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

Allora si possono verificare due casi:

- (a) $Z(f) = \Omega$ in tal caso quindi la funzione $f \equiv 0$;
- (b) $Z(f)$ non ha punti limite in Ω . In questo caso ad ogni punto $a \in Z(f)$ corrisponde un intero positivo $m = m(a)$, detto ordine dello zero, tale che

$$f(z) = g(z)(z - a)^m$$

dove g è una funzione olomorfa non nulla in tutto un intorno del punto a . Inoltre l'insieme $Z(f)$ è al più contabile.

Questo fatto si esprime dicendo che una funzione olomorfa definita in una regione del piano complesso, o è identicamente nulla, o ha zeri isolati.

Teorema 1.11.34 (Principio di riflessione di Schwarz). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione simmetrica rispetto all'asse reale. Indichiamo con $\Omega_+ = \{z \in \Omega : \text{Im}z > 0\}$, $\Omega_0 = \{z \in \Omega : \text{Im}z = 0\}$ e con $\Omega_- = \{z \in \Omega : \text{Im}z < 0\}$.*

Se $f : \Omega_+ \cup \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ è continua, olomorfa in Ω_+ e tale che $f(\Omega_0) \subset \mathbb{R}$, allora la funzione $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definita

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega_+ \cup \Omega_0 \\ f(\bar{z}) & \text{se } z \in \Omega_- \end{cases}$$

è olomorfa ed è l'unica funzione olomorfa su Ω che verifica $g|_{\Omega_+ \cup \Omega_0} = f$.

Il principio afferma che se una funzione analitica in un dominio contiene uno o più segmenti di retta in una delle sue frontiere, essendo continua su tali segmenti e mandando segmenti in segmenti simili, allora può essere prolungata analiticamente attraverso i segmenti mediante la riflessione.

Consideriamo un'altra proprietà delle funzioni olomorfe che ci sarà utile nel seguito:

Teorema 1.11.35 (Teorema di unicità). *Siano f, g funzioni olo-morfe in una regione $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tali che $f(z) = g(z)$, per ogni z in un certo insieme che ha un punto limite in Ω . Allora $f(z) = g(z)$ per tutti gli z in Ω .*

Esiste una sorta di analogo dei principi ora analizzati per le funzioni armoniche; ricordiamo infatti che la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche coniugate.

Teorema 1.11.36 (Principio del massimo). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio e φ una funzione armonica su Ω . Se esiste un punto $p \in \Omega$ tale che $\varphi(p) \geq \varphi(q)$ per ogni $q \in \Omega$, allora φ è costante in Ω .*

Tale principio afferma che se una funzione armonica assume il suo valore massimo in un dominio del piano complesso, allora è costante in tutto il dominio.

Consideriamo ora un'altra classe di funzioni complesse: le funzioni *me-romorfe*.

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Diremo che un punto $p \in U$ è una *singolarità isolata* per f se $f : U - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa; cioè, le singolarità isolate sono punti in cui la funzione non è differenziabile pur essendo differenziabile in un qualsiasi intorno di questi. Esistono tre diversi tipi di singolarità:

(a) p è una *singolarità removibile* o *eliminabile* se esiste il $\lim_{\xi \rightarrow p} f(\xi) \in \mathbb{C}$.

In tal caso la funzione f può essere estesa ad una funzione \tilde{f} olomorfa su tutto U ponendo

$$\tilde{f}(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \neq p \\ \lim_{\xi \rightarrow p} f(\xi) & \text{se } \xi = p; \end{cases}$$

(b) p è un *polo* se $\lim_{\xi \rightarrow p} |f(\xi)| = +\infty$. In tal caso esiste una funzione g olomorfa e non nulla in tutto un intorno di p tale che

$$f(\xi) = g(\xi)(\xi - p)^{-m}$$

dove $m \in \mathbb{N}$ ed è detto ordine del polo; se $m = 1$ il polo è *semplice*.

(c) p è una *singolarità essenziale* se non è né removibile né un polo.

Se f ha un polo di ordine m in un punto $p \in U$ allora esistono c_1, \dots, c_m numeri complessi con $c_m \neq 0$ tale che la funzione

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-p)^k}$$

ha una singolarità rimovibile in p . La quantità $Q(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-p)^k}$ è detta *parte principale di f* e la costante c_1 è detta **residuo della f in p** e si indica con $\text{Residuo}_p f$.

Definizione 1.11.37. Diremo che una funzione complessa f definita su un aperto $U \subset \mathbb{C}$ con insieme di singolarità S è **meromorfa** se

(a) S è chiuso in U ed è discreto, cioè preso $p \in S$ esiste un $r > 0$ tale che

$$S \cap B(p, r) = \{p\};$$

(b) f è olomorfa su $U - S$ (osserviamo che $U - S$ è necessariamente un aperto di \mathbb{C}),

(c) f ha un polo in ogni $p \in S$.

Osserviamo che non è esclusa la possibilità che S sia vuoto. Dunque ogni funzione f olomorfa in U è meromorfa in U .

Parlando in maniera più generale, chiameremo funzioni *meromorfe* su U le funzioni su U che siano olomorfe eccetto per i poli.

Le funzioni meromorfe sono oggetti molto semplici da considerare, essenzialmente perché esse risultano essere le reciproche (algebriche) delle funzioni olomorfe come afferma il seguente lemma.

Lemma 1.11.38. Sia U un aperto connesso di \mathbb{C} . Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa non identicamente nulla, allora la funzione

$$F : U - \{\xi : f(\xi) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

definita $F(\xi) = 1/f(\xi)$ è una funzione meromorfa su U con insieme dei poli $S = \{\xi : f(\xi) = 0\}$.

Teorema 1.11.39 (Teorema dei residui di Cauchy [23]). Sia f una funzione meromorfa su un aperto U di \mathbb{C} . Sia $S \subset U$ l'insieme dei poli di f . Se Γ è un ciclo in $U - S$ tale che

$$\text{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \notin U,$$

allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Residuo}_a f \cdot \text{Ind}_\Gamma(a). \quad (1.54)$$

Richiameremo ora i principali risultati sulle funzioni *meromorfe*.

Teorema 1.11.40 (Teorema di estensione di Riemann). *Siano Ω un dominio di \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ e f una funzione continua in $\Omega - \{z_0\}$. Se la funzione f è limitata in un intorno di z_0 , allora esiste una funzione \tilde{f} continua su tutto Ω tale che $\tilde{f}|_{\Omega - \{z_0\}} = f$.*

Siano Ω e Ω' domini di \mathbb{C} ; una applicazione biettiva $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ si dice *biolomorfa* se è olomorfa con inversa olomorfa. Un biolomorfismo da un dominio in sé si dice *automorfismo*.

Prima di concludere questa prima parte, analizziamo ancora un altro teorema che ci sarà molto utile nel seguito.

Teorema 1.11.41 (Teorema di Picard). *Sia U una regione del piano, $p \in U$, e supponiamo che f sia una funzione olomorfa in $U - \{p\}$ e abbia una singolarità essenziale in p . Se $\varepsilon > 0$, allora la restrizione di f a $U \cap D(p, \varepsilon) - \{p\}$ assume tutti i valori complessi eccetto possibilmente uno.*

Capitolo 2

Le superfici minime

In questo capitolo analizzeremo alcune delle più importanti proprietà che caratterizzano le *superfici minime* in \mathbb{R}^3 .

Con abuso di linguaggio, d'ora in poi indicheremo, a seconda del caso, una superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ con la sua parametrizzazione X o con l'immersione Φ che la definisce.

2.1. Superfici minime

Definizione 2.1.1. *Una superficie regolare $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è detta **minima** se la sua curvatura media \mathcal{H} è identicamente nulla.*

Quindi le superfici minime sono caratterizzate dal fatto che tutti i punti o sono iperbolici o planari. Infatti se $\mathcal{H} = 0$, allora le due curvature principali sono opposte: $k_1 = -k_2$ (eventualmente, $k_1 = k_2 = 0$). Pertanto la curvatura Gaussiana $\mathcal{K} \leq 0$.

Ritorniamo ora alla dimostrazione del teorema dell'esistenza delle coordinate isoterme 1.8.1: *sia (\mathcal{S}, g) una superficie Riemanniana in \mathbb{R}^3 , $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione locale regolare per \mathcal{S} . Allora ogni punto $a \in U$ regolare per \mathcal{S} ammette un intorno U' , $a \in U'$, in cui esiste una riparametrizzazione di \mathcal{S} in termini di coordinate isoterme.*

Dimostrazione. Poniamoci nel caso in cui \mathcal{S} sia minima. Supponiamo $a \in U$ un punto di regolarità, allora per il lemma 1.4.3 esiste un intorno

U' di a in cui $\Sigma = \mathcal{S}|_{U'}$ può essere vista come il grafico di una funzione differenziabile. A meno di riordinare le coordinate, possiamo supporre

$$\Sigma = \{(x, y, z = f(x, y)) : (x, y) \in U'\}.$$

Posto $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$ e $W = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$, dove ∇ denota il gradiente $\nabla := (\partial / \partial x, \partial / \partial y)$, prendiamo le due funzioni ausiliarie $F, G : U' \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1 + f_x^2}{W}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{f_x f_y}{W}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1 + f_y^2}{W}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{f_x f_y}{W}. \quad (2.2)$$

Tali funzioni esistono in quanto si può assumere U' semplicemente connesso ed inoltre si ha:

$$\left(\frac{1 + f_x^2}{W}\right)_y = \left(\frac{f_x f_y}{W}\right)_x, \quad \left(\frac{1 + f_y^2}{W}\right)_x = \left(\frac{f_x f_y}{W}\right)_y. \quad (2.3)$$

Consideriamo il cambiamento di coordinate $\Phi : (x, y) \mapsto (u_1, u_2)$ così definito

$$u_1 = x + F(x, y), \quad u_2 = y + G(x, y). \quad (2.4)$$

Si ha

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 1 + \frac{1 + f_x^2}{W}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{f_x f_y}{W}$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 1 + \frac{1 + f_y^2}{W}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{f_x f_y}{W}.$$

Lo Jacobiano della trasformazione Φ è

$$J = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, y)} = 2 + \frac{2 + f_x^2 + f_y^2}{W} > 0,$$

pertanto Φ è un diffeomorfismo con inversa locale $\Phi^{-1} : (u_1, u_2) \mapsto (x, y)$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_1} &= \frac{W + 1 + f_y^2}{JW}, & \frac{\partial y}{\partial u_1} &= -\frac{f_x f_y}{JW}, \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} &= -\frac{f_x f_y}{JW}, & \frac{\partial y}{\partial u_2} &= \frac{W + 1 + f_x^2}{JW}. \end{aligned}$$

Possiamo così considerare sull'aperto U' le coordinate (u_1, u_2) e in tal caso la superficie Σ sarà rappresentata dal raggio vettore

$$X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), f(x(u_1, u_2), y(u_1, u_2)))$$

con prima forma fondamentale

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = |\mathbf{X}_1|^2 = |\mathbf{X}_2|^2 = \frac{W}{J} = \frac{W^2}{2W + 2 + f_x^2 + f_y^2} = \left(\frac{W}{1+W}\right)^2; \\ g_{12} &= \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Quindi le coordinate (u_1, u_2) sono isoterme con fattore conforme

$$\lambda^2(u_1, u_2) = \left(\frac{W}{1+W}\right)^2.$$

□

Poiché è sempre possibile definire localmente una superficie (minima) mediante delle coordinate isoterme, senza perdita di generalità nel seguito supporremo spesso la superficie data mediante parametrizzazione isoterma.

Lemma 2.1.2. *Sia $X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ una parametrizzazione regolare isoterma.*

X è minima $\iff \Delta X = 0$ cioè le sue funzioni coordinate x_1, x_2, x_3 sono armoniche.

Dimostrazione. Discende dal fatto che $\Delta X = 2\lambda^2 \mathcal{H}N$ per la proposizione 1.8.5. □

Sia \mathcal{S} una superficie di \mathbb{R}^3 data mediante la parametrizzazione $X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ con $(u_1, u_2) \in U$ dominio semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 . Abbiamo visto che possiamo identificare \mathbb{R}^2 con il piano complesso \mathbb{C} considerando la coordinata complessa

$$\xi = u_1 + iu_2,$$

e quindi vedere U come dominio di \mathbb{C} . Con tali ipotesi ogni x_k è una funzione della variabile complessa ξ : $x_k = x_k(\xi, \bar{\xi})$. Definiamo le seguenti funzioni complesse

$$\psi_k(\xi) \stackrel{def}{=} 2 \frac{\partial x_k}{\partial \xi} = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \quad \forall k = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Solitamente si usa la notazione $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. Dalla definizione di ψ_k , $k = 1, 2, 3$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\psi_k(\xi))^2 &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \\ &= |\mathbf{X}_1|^2 - |\mathbf{X}_2|^2 - 2i \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle \\ &= g_{11} - g_{22} - 2i g_{12} \end{aligned} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 |\psi_k(\xi)|^2 &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 \\ &= g_{11} + g_{22}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove g_{ij} come al solito sono i coefficienti della metrica.

E' facile dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.3.

(a) (u_1, u_2) sono coordinate isoterme \iff

$$\sum_{k=1}^3 (\psi_k(\xi))^2 \equiv 0; \quad (2.8)$$

se la condizione sopra è verificata, allora si ha:

(b) x_k è armonica in $(u_1, u_2) \forall k = 1, 2, 3 \iff \psi_k(\xi)$ è analitica in ξ ;

(c) \mathcal{S} è regolare \iff

$$\sum_{k=1}^3 |\psi_k(\xi)|^2 \neq 0. \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Per i punti a, b , basta osservare che

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}} = 2 \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{\xi} \partial \xi} = \frac{1}{2} \Delta X$$

e che la minimalità di X è equivalente all'armonicità del raggio vettore.

Per il punto c , la 2.7 mostra che

$$\sum_{k=1}^3 |\psi_k(\xi)|^2 = |\mathbf{X}_1|^2 + |\mathbf{X}_2|^2.$$

Dire che $\sum_{k=1}^3 |\psi_k(\xi)|^2 \neq 0$ vuol dire che \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 sono linearmente indipendenti e questa è la condizione di regolarità. \square

Quindi abbiamo dimostrato che ad ogni superficie minima X è possibile associare una funzione $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ tale che $\forall k = 1, 2, 3$ le $\psi_k(\xi)$ definite dalla 2.5 sono analitiche (complesse) e soddisfano le 2.8 e 2.9; ψ è detto *raggio vettore olomorfo associato a X* . Ma è vero anche il viceversa cioè, ogni curva olomorfa in \mathbb{C}^3 , $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ tale che $\psi \cdot \psi = 0$ e $\psi(\xi) \neq 0$ definisce una superficie minima regolare $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \psi_k(\xi) d\xi = x_k(p) - x_k(p_0) \quad \forall k = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

dove $p, p_0 \in \mathcal{S}$ e γ è una qualsiasi curva differenziale su \mathcal{S} congiungente i due punti. Poiché U è un dominio semplicemente connesso e le ψ_k sono funzioni olomorfe su \mathcal{S} , per il teorema integrale di Cauchy si ha:

$$\oint_{\gamma} \psi_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

per ogni curva chiusa γ in \mathcal{S} . In particolare

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \psi_k = 0$$

cioè le funzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3 non hanno periodi reali nel dominio U del piano complesso. Le funzioni x_k sono definite a meno di una costante additiva, e la superficie è pertanto determinata a meno di traslazioni.

Quindi un'altra conseguenza dell'esistenza di coordinate isoterme è che localmente possiamo ricondurre lo studio di una superficie minima allo studio del raggio vettore olomorfo ψ associato. Questo ci permette di estendere molte proprietà delle funzioni armoniche e analitiche alle superfici minime.

Un'altra importante proprietà che caratterizza le superfici minime è il fatto che la mappa di Gauss associata è un'applicazione conforme.

Proposizione 2.1.4. *Sia \mathcal{S} una superficie minima in \mathbb{R}^3 , e sia $N : \mathcal{S} \rightarrow S^2$ la sua mappa di Gauss. Allora N è un'applicazione conforme; inoltre, se \mathcal{S} è orientata rispetto alla normale \mathbf{N} e scegliamo su S^2 un'orientazione positiva rispetto alla normale diretta verso l'interno, allora N conserva anche l'orientazione.*

Osservazione 2.1.5. *Di solito S^2 è orientata rispetto alla normale diretta verso l'esterno, in tal caso la mappa di Gauss inverte l'orientazione ed è detta **anticonforme**.*

Dimostrazione. Sia X parametrizzazione regolare isotermica per \mathcal{S} . Per ogni $p \in \mathcal{S}$ consideriamo il differenziale della mappa di Gauss N in p :

$$\begin{aligned} d_p N : T_p(\mathcal{S}) &\longrightarrow T_p(\mathcal{S}) \\ \mathbf{X}_i &\longmapsto \nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{N} = \mathbf{N}_i \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Per dimostrare che N è un'applicazione conforme è sufficiente provare che

$$\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2 \quad (2.12)$$

e

$$|\mathbf{N}_1| = |\mathbf{N}_2| \quad (2.13)$$

in tal caso infatti il differenziale rispetto ad una base ortonormale è dato da una matrice diagonale, e così conserva gli angoli.

Ora posto $\mathbf{N}_{ij} = \nabla_{\mathbf{X}_j} \mathbf{N}_i$ e tenendo conto del fatto che $\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{N} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{N}_i, \mathbf{N} \rangle = 0$, $\forall i, j = 1, 2$, quindi $0 = \nabla_{\mathbf{X}_j} \langle \mathbf{N}_i, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{N}_{ij}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j \rangle$ si ha:

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_1|^2 &= \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1 \rangle = -\langle \mathbf{N}_{11}, \mathbf{N} \rangle \\ |\mathbf{N}_2|^2 &= -\langle \mathbf{N}_{22}, \mathbf{N} \rangle, \\ \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle &= -\langle \mathbf{N}_{12}, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Poiché $d_p N = -L_p$ ricordando quanto detto in §1.5, riguardo all'operatore forma si ha che la matrice associata a $d_p N$ rispetto alla base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ è $-\mathcal{L} = -\mathcal{G}^{-1} \cdot \mathcal{B}$.

Quindi

$$\mathbf{N}_1 = -a_{11} \mathbf{X}_1 - a_{21} \mathbf{X}_2 = -\frac{b_{11}}{\lambda^2} \mathbf{X}_1 - \frac{b_{21}}{\lambda^2} \mathbf{X}_2,$$

analogamente

$$\mathbf{N}_2 = -a_{12} \mathbf{X}_1 - a_{22} \mathbf{X}_2 = -\frac{b_{12}}{\lambda^2} \mathbf{X}_1 - \frac{b_{22}}{\lambda^2} \mathbf{X}_2.$$

Allora

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_1|^2 &= \frac{b_{11}^2}{\lambda^2} + \frac{b_{21}^2}{\lambda^2}, \\ |\mathbf{N}_2|^2 &= \frac{b_{12}^2}{\lambda^2} + \frac{b_{22}^2}{\lambda^2}, \\ \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle &= \frac{b_{11}b_{12}}{\lambda^2} + \frac{b_{21}b_{22}}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Ora poiché \mathcal{S} è minima e (u_1, u_2) sono coordinate isoterme, si ha per la 1.37 $b_{11} = -b_{22}$ quindi $|\mathbf{N}_1|^2 = |\mathbf{N}_2|^2$ e $\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle = 0$.

Proviamo ora che se S^2 è orientata rispetto alla normale diretta verso l'interno, allora la mappa di Gauss conserva l'orientazione. Osserviamo che \mathbf{N} è anche la normale diretta verso l'esterno della sfera S^2 . La matrice di transizione dalla base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ alla base $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ è uguale

$$\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{12} & -b_{22} \end{pmatrix}$$

e il suo determinante è uguale a $\det \mathcal{B} / \lambda^2 = \mathcal{K}$, dove \mathcal{K} è la curvatura gaussiana definita dalla 1.18.

Se \mathcal{S} è minima, $\mathcal{K} \leq 0$ quindi le basi $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ e $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ hanno orientazioni opposte. Pertanto $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$ coincide con $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, -\mathbf{N}\}$, dove $-\mathbf{N}$ è la normale diretta verso l'interno della sfera S^2 . \square

2.2. Equazione delle superfici minime

Vogliamo ora analizzare sotto quale condizione una funzione differenziabile f definita in un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ a valori in \mathbb{R} definisce una superficie minima.

Proposizione 2.2.1. *Tutte le funzioni f i cui grafici definiscono superfici minime sono soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine:*

$$(1 + f_2^2) \cdot f_{11} - 2f_{12}f_1f_2 + (1 + f_1^2) \cdot f_{22} = 0 \quad (2.14)$$

dove

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \quad i, j = 1, 2.$$

La 2.14 è nota come **equazione delle superfici minime** o **equazione di Lagrange**.

Dimostrazione. Sia

$$X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)) \quad \forall (u_1, u_2) \in U \quad (2.15)$$

superficie minima grafico di f . Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= (1, 0, f_1) \\ \mathbf{X}_2 &= (0, 1, f_2) \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}(-f_1, -f_2, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-f_1, -f_2, 1),\end{aligned}$$

dove ∇ denota il gradiente e quindi

$$E = (1 + f_1^2), \quad F = f_1 f_2, \quad G = (1 + f_2^2), \quad (2.16)$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} f_{11}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} f_{12}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} f_{22}.$$

Sostituendo nella 1.20

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{Eg + Ge - 2Ff}{EG - F^2}$$

si ha

$$\mathcal{H} = \frac{(1 + f_1^2)f_{22} + (1 + f_2^2)f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12}}{2(1 + |\nabla f|^2)\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Ricordando che abbiamo posto

$$W = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2},$$

consideriamo la quantità

$$2W^3\mathcal{H} = (1 + f_2^2)f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + (1 + f_1^2)f_{22} =: T(f). \quad (2.17)$$

Poiché $\mathcal{H} = 0$, $T(f) = 0$ cioè

$$(1 + f_2^2)f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + (1 + f_1^2)f_{22} = 0.$$

□

Il seguente corollario è un importante risultato del teorema di esistenza delle coordinate isoterme.

Corollario 2.2.2. *Tutte le soluzioni $f \in C^\infty(U)$ dell'equazione delle superfici minime 2.14 sono reali analitiche.*

Dimostrazione. Sia $z = f(x, y)$ una superficie minima. Abbiamo visto che in un intorno di ogni punto è possibile definire le funzioni 2.4 che danno le coordinate locali isoterme u_1, u_2 per la superficie. Dal lemma 2.1.2 x e y sono armoniche, dunque funzioni reali analitiche di u_1, u_2 . Così l'applicazione inversa

$$(u_1, u_2) \mapsto (x, y)$$

è ancora reale analitica. La f è armonica rispetto alle coordinate isoterme u_1, u_2 , infatti in tal caso le 2.16 diventano

$$(1 + f_1^2) = (1 + f_2^2) \quad f_1 f_2 = 0$$

e essendo f soluzione dell'equazione 2.14 si ha

$$f_{11} + f_{22} = 0,$$

quindi f è una funzione reale analitica di x, y . □

2.3. Esempi di superfici minime

Vediamo ora alcuni esempi classici di superfici minime.

• **Il piano.** L'esempio banale di superficie minima è fornito dal piano. Infatti se $f(x, y)$ è una funzione lineare, cioè

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

essa verifica ovviamente l'equazione 2.14 delle superfici minime

• **Il catenoide** (vedi figura 1). In §1.10, abbiamo visto che se la generatrice (catenaria) giace nel piano xz e ruota attorno all'asse z , possiamo parametrizzare il catenoide con la 1.43:

$$X(u_1, u_2) = (a \cosh(\frac{u_1}{a}) \cos u_2, a \cosh(\frac{u_1}{a}) \sin u_2, u_1).$$

Semplici calcoli mostrano che il catenoide è una superficie minima. Per semplicità, supponiamo $a = 1$ allora

$$X_c(u_1, u_2) = (\cosh u_1 \cos u_2, \cosh u_1 \sin u_2, u_1)$$

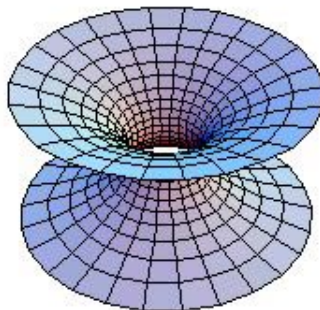


Figura 1. Il catenoide

e

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= (\sinh u_1 \cos u_2, \sinh u_1 \sin u_2, 1) \\ \mathbf{X}_2 &= (-\cosh u_1 \sin u_2, \cosh u_1 \cos u_2, 0) \\ \mathbf{N} &= \left(\frac{-\cos u_2}{\cosh u_1}, \frac{-\sin u_2}{\cosh u_1}, \tanh u_1 \right),\end{aligned}$$

quindi

$$E = G = \cosh^2 u_1, \quad F = 0 \quad (\blacklozenge)$$

e

$$g = -e = 1, \quad f = 0.$$

Sostituendo i valori appena trovati nella 1.20 e nella 1.21 si ha $\mathcal{H} = 0$, $\mathcal{K} = -1/\cosh^4 u_1$, le curvatures principali

$$k_1 = \frac{1}{\cosh^2 u_1}, \quad k_2 = -\frac{1}{\cosh^2 u_1}$$

e la metrica

$$ds^2 = \cosh^2 u_1 (du_1^2 + du_2^2).$$

Quindi il catenoide è una superficie minima, inoltre si è anche dimostrato che le coordinate (u_1, u_2) sono isotermitiche. Nel prossimo paragrafo analizzeremo un'importante proprietà del catenoide: *il catenoide è l'unica superficie minima di rotazione a meno di similitudini, oltre il piano.*

Nel caso del catenoide la soluzione della 2.14 è data da

$$f(x, y) = \cosh^{-1} r \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

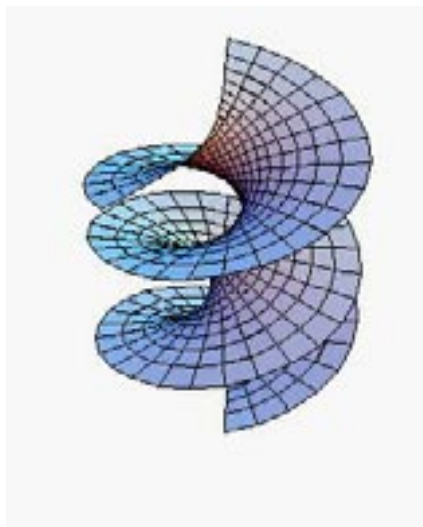


Figura 2. L'elicoide

• **L'elicoide** (vedi figura 2). Abbiamo visto che se prendiamo un'elica che si avvolge attorno all'asse z e come generatrice l'asse x una parametrizzazione per l'elicoide è data dalla 1.44

$$X(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, bu_2),$$

dove $-\infty < u_2 < \infty$, $-\infty < u_1 < \infty$ e $2\pi b$ è la distanza tra due generatori paralleli non coincidenti. Si dimostra facilmente che

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u_1^2 + b^2$$

e

$$e = g = 0, \quad f = -\frac{b}{\sqrt{b^2 + u_1^2}}$$

da cui sostituendo nella 1.20 si ha $\mathcal{H} = 0$, mentre sostituendo nella 1.21 si ha $\mathcal{K} = -b^2/(b^2 + u_1^2)^2$, quindi le curvatures principali sono

$$k_1 = \frac{b}{b^2 + u_1^2}, \quad k_2 = -\frac{b}{b^2 + u_1^2}$$

e la metrica

$$ds^2 = (u_2^2 + b^2)du_1^2 + du_2^2.$$

La soluzione di 2.14 è

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

Anche nel caso dell'elicoide si dimostra che: *l'elicoide è l'unica superficie minima, oltre il piano, che sia anche rigata*. Questo è noto come il *teorema di Catalan*. Diamo solo un accenno alla dimostrazione del teorema di Catalan, ma per fare ciò abbiamo bisogno di due proprietà delle superfici minime: il *principio di riflessione di Schwarz-Riemann* e il *teorema di unicità* che non sono altro che generalizzazioni dei teoremi analizzati nel capitolo 1 per le funzioni olomorfe e armoniche.

Principio di riflessione di Schwarz e Riemann. *Supponiamo che il bordo di una superficie minima $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ contenga un intervallo I di retta l . Se indichiamo con \mathcal{M}^* la superficie minima simmetrica di \mathcal{M} rispetto a l , allora la superficie $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$ è una superficie minima liscia: le superfici \mathcal{M} e \mathcal{M}^* si incontrano lungo l'intervallo I .*

Teorema 2.3.1. Teorema di unicità. *Se due superfici minime lisce \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 contengono un insieme aperto nella loro intersezione, allora la loro unione è ancora una superficie minima liscia.*

Ne risulta che le superfici minime rigate sono completamente caratterizzate dalla seguente proprietà.

Lemma 2.3.2. *Sia \mathcal{M} una superficie minima rigata con direttrice $\gamma(t)$, e siano l_0 e l_1 due generatrici di \mathcal{M} passanti attraverso $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$ rispettivamente. Allora esiste una generatrice l passante per un punto $\gamma(t)$ per qualche t , $t_0 < t < t_1$, tale che l_0 è la simmetrica di l_1 rispetto a l (l è detta linea intermedia tra l_0 e l_1).*

Dimostrazione. Sia l un'arbitraria generatrice di \mathcal{M} passante per $\gamma(t')$, $t_0 < t' < t_1$. Consideriamo la superficie $\mathcal{M}[t_0, t']$ ottenuta considerando tutte le generatrici uscenti dai punti $\gamma(t)$ con $t_0 < t < t'$. Sia $\mathcal{M}^*[t_0, t']$ la simmetrica di $\mathcal{M}[t_0, t']$ rispetto a l . Per il principio di riflessione e per il teorema di unicità l'unione $\mathcal{M}[t_0, t'] \cup \mathcal{M}^*[t_0, t']$ è ancora una superficie minima del tipo $\mathcal{M}[t_0, t^*]$, con $t_0 < t^* < t_1$, o contiene $\mathcal{M}[t_0, t_1]$. Infatti se $t' \rightarrow t_0$ allora anche $t^* \rightarrow t_0$, mentre se $t' \rightarrow t_1$, ad un certo istante t^* sarà più grande di t_1 . Quindi per la continuità, esisterà un certo t' tale che $t^* = t_1$. Pertanto per questo valore di t' , l è la linea intermedia tra l_0 e l_1 .

□

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema di Catalan, diamo una nuova definizione:

Definizione 2.3.3. Sia \mathcal{M} una superficie rigata, un'ossatura di \mathcal{M} è una collezione di generatrici ovunque densa in \mathcal{M} .

Ovviamente l'ossatura completa determina la forma della superficie rigata e se due superfici rigate hanno ossature congruenti, allora esse stesse sono congruenti. Ora utilizzando questa definizione e il lemma precedentemente, vogliamo data una qualsiasi superficie minima rigata costruire una sua ossatura completa e provare che questa è congruente all'ossatura di un piano o di un elicoide.

Dimostrazione del teorema di Catalan. Sia \mathcal{M} una superficie minima rigata con direttrice $\gamma(t)$, e siano l_0 e l_1 due arbitrarie generatrici non coincidenti passanti per i punti $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$ rispettivamente. Tracciamo tra l_0 e l_1 la linea intermedia $l = l_{\frac{1}{2}}$, dal lemma 2.3.2 l è ancora una generatrice di \mathcal{M} . Procedendo per passi, tracciamo la linea intermedia tra l_0 e $l_{\frac{1}{2}}$: $l_{\frac{1}{4}}$, e tra $l_{\frac{1}{2}}$ e l_1 : $l_{\frac{3}{4}}$. Procedendo così per induzione al passo n -esimo avremo costruito una famiglia di generatrici $l_0, l_{\frac{1}{2^n}}, \dots, l_1$; allora al passo $(n+1)$ aggiungiamo a questa famiglia tutte le linee intermedie tra le generatrici $l_{\frac{j}{2^n}}$ e $l_{\frac{j+1}{2^n}}$ per $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Procedendo al limite otterremo un'ossatura L di $\mathcal{M}[t_0, t_1]$ con estremi l_0 e l_1 . Per ottenere un'ossatura per tutta la superficie \mathcal{M} riflettiamo ora L sia rispetto a l_0 che a l_1 . Dette \mathcal{M}_1^* e \mathcal{M}_2^* le superfici date dalla riflessione di L rispetto a l_0 e l_1 rispettivamente, otteniamo con questo procedimento un'ossatura per la superficie $\mathcal{M}_{1,2} = \mathcal{M}_1^* \cup \mathcal{M}[t_0, t_1] \cup \mathcal{M}_2^*$. Continuando il processo di riflessione, nel limite otteniamo un'ossatura completa L_∞ della superficie minima \mathcal{M} che in accordo con il teorema di unicità contiene la nostra superficie minima.

Resta da provare che L_∞ è un piano o è l'ossatura di un elicoide. Se l_0 e l_1 sono parallele o si intersecano, allora tutte le linee intermedie giacciono in un piano, quindi L_∞ è un piano. Supponiamo l_0 e l_1 siano oblique. Prendiamo un piano Π parallelo alle due generatrici e proiettiamo l_0 e l_1 ortogonalmente su Π . Dette l'_0 e l'_1 le loro proiezioni e $p \in \Pi$ punto di intersezione tra l'_0 e l'_1 , se l è la linea intermedia tra l_0 e l_1 , allora la sua proiezione sarà la bisettrice dell'angolo tra l'_0 e l'_1 . Inoltre, l è alla stessa distanza da l_0 e l_1 . Da ciò si è provato che se facciamo passare da p la linea Z perpendicolare a Π , allora per prima cosa le linee l_0 , l e l_1 sono perpendicolari a Z ; in secondo luogo queste intersecano Z nei punti rispettivamente z_0 , z e z_1 tali che $|z_0z| = |zz_1|$ e terzo l'angolo tra l_0 e l è uguale all'angolo tra l e l_1 .

Pertanto l giace in un certo elicoide (con direttrice Z) passante attraverso l_0 e l_1 . Risultati analoghi si ottengono per ogni tripla di linee di L_∞ , di cui una è la linea intermedia delle altre due. Abbiamo così provato che L_∞ è l'ossatura di un elicoide. \square

Esiste una stretta connessione tra il catenoide e l'elicoide. Si dimostra prima di tutto che esse sono superfici minime localmente isometriche, ed è possibile trasformare un catenoide in un elicoide mediante una famiglia continua di superfici minime localmente isometriche (vedi figura **3**). A tal fine, supponiamo $b = 1$ e consideriamo il cambiamento di coordinate

$$u_2 \mapsto u_2 - \pi/2, \quad u_1 \mapsto \sinh u_1,$$

rispetto al quale l'elicoide sarà parametrizzato da

$$X_e(u_1, u_2) = (\sinh u_1 \sin u_2, -\sinh u_1 \cos u_2, u_2 - \pi/2).$$

I coefficienti della prima forma fondamentale associati a questa parametrizzazione sono ora

$$E = G = \cosh^2 u_1, \quad F = 0. \quad (\blacklozenge\blacklozenge)$$

Quindi confrontando le (\blacklozenge) e le $(\blacklozenge\blacklozenge)$ per la proposizione 1.7.5 si ha che il catenoide e l'elicoide sono localmente isometriche; esse sono dette *superfici minime coniugate*. La terminologia è giustificata dal fatto che le parametrizzazioni isoterme X_c e X_e sono tali che le loro funzioni componenti sono coppie di funzioni armoniche coniugate (confronta §1.11). Infatti l'armonicità discende dal fatto che sono minime, inoltre

$$\frac{\partial X_c}{\partial u_1} = (\sinh u_1 \cos u_2, \sinh u_1 \sin u_2, 1) = \frac{\partial X_e}{\partial u_2}$$

e

$$\frac{\partial X_c}{\partial u_2} = (-\cosh u_1 \sin u_2, \cosh u_1 \cos u_2, 0) = -\frac{\partial X_e}{\partial u_1}.$$

Ponendo

$$X(u_1, u_2, t) = \cos t \cdot X_c + \sin t \cdot X_e,$$

al variare di t in \mathbb{R} , otteniamo una famiglia ad un parametro di superfici minime *associate* tale che $X(u_1, u_2, 0) = X_c$ e $X(u_1, u_2, \pi/2) = X_e$ e aventi la stessa forma fondamentale. Infatti

$$\mathbf{X}_1 = \cos t \cdot \mathbf{X}_{c,1} + \sin t \cdot \mathbf{X}_{e,1}$$

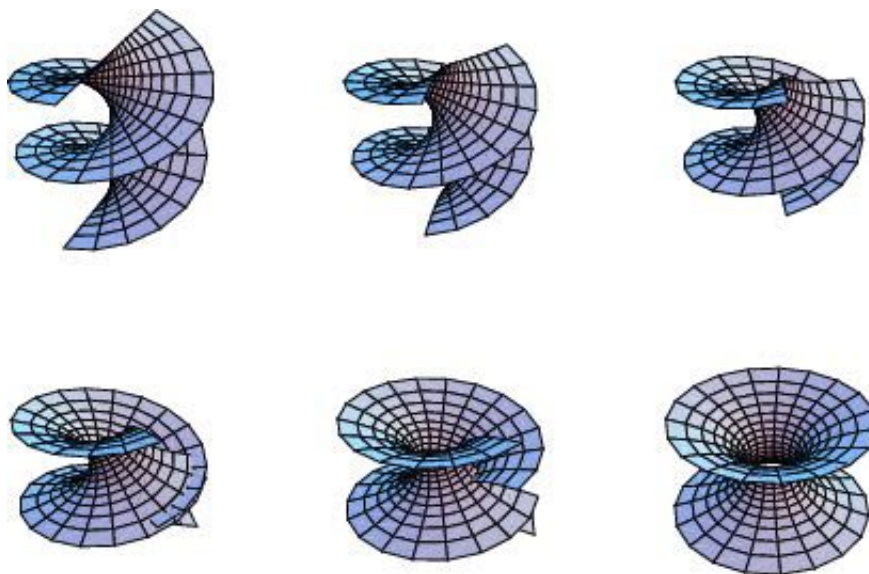


Figura 3.

In figura è mostrata la deformazione dell'elicoide nel catenoide. Come si vede, la deformazione consiste nel tagliare il catenoide verticalmente avvitandolo poi su se stesso. Le superfici intermedie sono ancora superfici minime tutte localmente isometriche.

e

$$\mathbf{X}_2 = \cos t \cdot \mathbf{X}_{c,2} + \sin t \cdot \mathbf{X}_{e,2},$$

quindi

$$E = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1 = \cos^2 t E_c + \sin^2 t E_e + 2 \sin t \cos t (\mathbf{X}_{c,1} \cdot \mathbf{X}_{e,1}) = E_c = E_e$$

$$F = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$$

$$G = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2 = G_c = G_e.$$

Quindi, in generale, due superfici minime coniugate possono essere trasformate l'una nell'altra mediante una famiglia ad un parametro di superfici minime, e la prima forma fondamentale di questa famiglia è indipendente dal parametro. Più avanti dimostreremo che queste superfici sono anche tutte isometriche.

Per ben 200 anni dalla loro scoperta, il catenoide e l'elicoide sono rimaste le sole superfici minime note senza autoinserzioni, oggi si conoscono altri esempi di superfici minime:

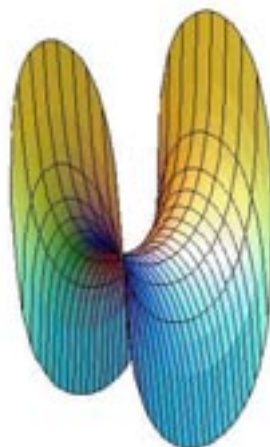


Figura 4.

La prima superficie minima di Scherk con due periodicità. E' simmetrica rispetto due direzioni, quella verticale e quella orizzontale. La figura mostra un quadrato del dominio di questa superficie. In figura **h** dell'appendice A si vede meglio come questa sia definita sui quadrati neri (o bianchi) di una scacchiera.

• **La superficie minima di Scherk** (vedi figura 4). Questa è data da

$$\begin{aligned} x(u_1, u_2) &= \arg \frac{\xi + i}{\xi - i} = \arctan \frac{2u_1}{u_1^2 + u_2^2 - 1} \\ y(u_1, u_2) &= \arg \frac{\xi + 1}{\xi - 1} = \arctan \frac{-2u_2}{u_1^2 + u_2^2 - 1} \\ z(u_1, u_2) &= \log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{(u_1^2 - u_2^2 + 1)^2 + 4u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2 - 1)^2 + 4u_1^2 u_2^2}; \end{aligned}$$

dove $\xi = u_1 + iu_2$ e $\xi \neq \pm 1$, $\xi \neq \pm i$. Dall'espressione di x , y e z è facile provare che

$$f(x, y) = \log \frac{\cos y}{\cos x}. \quad (2.18)$$

Si dimostra che questa è l'unica soluzione (non banale) della 2.14 della forma

$$f(x, y) = g(x) + h(y),$$

cioè l'unica soluzione dell'equazione delle superfici minime a variabili separabili. In questo caso infatti la 2.14 assume la forma

$$(1 + g'(x)^2)h''(y) + (1 + h'(y)^2)g''(x) = 0$$

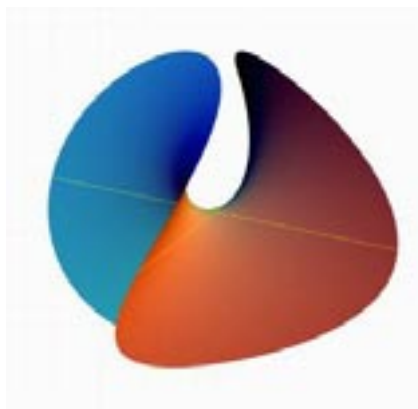


Figura 5. La superficie minima di Enneper.

cioè

$$-\frac{g''(x)}{1+g'(x)^2} = \frac{h''(y)}{1+h'(y)^2},$$

e poiché x e y sono variabili indipendenti, ogni membro di questa equazione è costante. Detto a il valore di questa costante, se $a = 0$ entrambe le funzioni sono lineari ($g = bx$, $h = cy$) e quindi la superficie è un piano; altrimenti, se $a \neq 0$ risolvendo le due equazioni differenziali del secondo ordine

$$-\frac{g''(x)}{1+g'(x)^2} = a, \quad \frac{h''(y)}{1+h'(y)^2} = a$$

otteniamo

$$g(x) = \frac{1}{a} \log[\cos(ax + b)] + c_1$$

e

$$h(y) = -\frac{1}{a} \log[\cos(ay + d)] + c_2.$$

Allora

$$z = \frac{1}{a} \log \frac{\cos(ax + b)}{\cos(ay + d)} + c$$

che è la 2.18. Quindi abbiamo ottenuto una famiglia ad un parametro di grafici minimi ciascuno dei quali è definito su una scacchiera del piano xy , tutti equivalenti a meno di traslazioni e omotetie.

• **La superficie di Enneper** (vedi figura 5). Tale superficie è parametrizzata da

$$x(u_1, u_2) = u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2$$

$$\begin{aligned}y(u_1, u_2) &= u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_2 u_1^2 \\z(u_1, u_2) &= u_1^2 - u_2^2.\end{aligned}$$

Notiamo che cambiando (u_1, u_2) con $(-u_2, u_1)$ cambiamo, sulla superficie, (x, y, z) con $(-y, x, -z)$. Così, se eseguiamo una rotazione positiva di $\pi/2$ attorno all'asse z e poi consideriamo una simmetria nel piano xy , si ha che la superficie rimane invariata.

Benché la superficie di Enneper sia definita mediante una parametrizzazione molto semplice, essa è assai difficile da visualizzare perché ha autointersezioni. Infatti come si può facilmente vedere dalla figura 5, in un intorno dell'origine, la superficie ha la forma di una sella. Se allarghiamo il dominio, i due lati esterni del contorno (l'immagine di ∂U) ad un certo punto si intersecheranno.

E' necessario fermare un attimo l'attenzione sulle soluzioni della 2.14 date finora. Nei casi analizzati non abbiamo mai specificato il dominio di definizione di queste funzioni, tuttavia osserviamo che queste non sono definite per tutti i valori di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nel 1915 infatti Bernestein dimostrò che *non esistono in \mathbb{R}^3 superfici minime, oltre il piano, che siano grafico di una funzione differenziabile definita su tutto il piano \mathbb{R}^2* . La dimostrazione del teorema di Bernestein si basa sul fatto che è possibile definire un sistema di coordinate isoterme (globali) per la superficie \mathcal{S} : $x_3 = f(x_1, x_2)$. Vale infatti il seguente teorema

Teorema 2.3.4. *Sia $f(x_1, x_2)$ una soluzione dell'equazione delle superfici minime 2.14 in tutto il piano (x_1, x_2) . Allora esiste una trasformazione lineare regolare*

$$x_1 = u_1$$

e

$$x_2 = au_1 + bu_2, \quad b > 0$$

tale che (u_1, u_2) sono coordinate (globali) isoterme per la superficie \mathcal{S} definita da

$$x_3 = f(x_1, x_2).$$

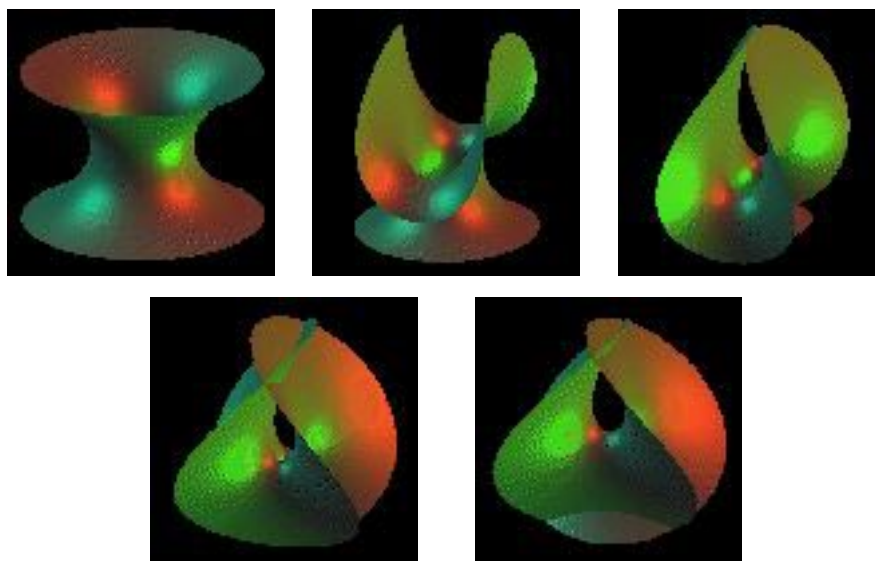


Figura 6.

E' possibile deformare il catenoide nella superficie di Enneper mediante una trasformazione isometrica. Nella figura sono rappresentate cinque diverse sequenze di questa deformazione a partire dal catenoide fino ad arrivare alla superficie di Enneper.

Dimostrazione. Teniamo presente il teorema dell'esistenza delle coordinate isoterme 1.8.1. Introduciamo le funzioni F, G date dalla 2.1 e 2.2 che ora sono definite su tutto il piano. Consideriamo il cambiamento di coordinate 2.4:

$$\xi_1 = x_1 + F(x_1, x_2), \quad \xi_2 = x_2 + G(x_1, x_2).$$

L'applicazione $(x_1, x_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$ è un diffeomorfismo dal piano (x_1, x_2) nel piano (ξ_1, ξ_2) [20] e le coordinate (ξ_1, ξ_2) sono isoterme sulla superficie \mathcal{S} data da $x_3 = f(x_1, x_2)$ pertanto le funzioni ψ_k date dalla 2.5 sono funzioni olomorfe in (ξ_1, ξ_2) .

Consideriamo l'identità

$$\operatorname{Im}(\bar{\psi}_1 \psi_2) = -\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}$$

e poiché il determinante al secondo membro è positivo (il cambiamento di carte, ricordiamo è un diffeomorfismo) si ha che $\psi_1 \neq 0$ e $\psi_2 \neq 0$, inoltre

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right) = \frac{1}{|\psi_1|^2} \operatorname{Im}(\bar{\psi}_1 \psi_2) < 0.$$

Dunque la funzione $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ è olomorfa su tutto il piano ξ_1, ξ_2 ed ha parte immaginaria negativa e pertanto dovrebbe essere una costante:

$$\psi_2 = c\psi_1; \quad c = a - ib, \quad b > 0.$$

Uguagliando la parte reale e immaginaria dell'ultima espressione si ottiene

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = a \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = b \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + a \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}.$$

Se ora consideriamo la trasformazione

$$x_1 = u_1$$

e

$$x_2 = au_1 + bu_2, \quad b > 0$$

si ha che

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2},$$

quest'ultime sono le equazioni di Cauchy-Riemann della funzione $u_1 + iu_2$ rispetto alla coordinata $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ quindi per il teorema 1.11.20 le coordinate (u_1, u_2) sono isoterme. \square

Dimostrazione del teorema di Bernestein. Sia \mathcal{S} una qualsiasi superficie minima grafico di una funzione differenziabile f definita su tutto il piano $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$. Abbiamo visto che è sempre possibile considerare un cambiamento di coordinate, in modo che le nuove coordinate (u, v) definite su tutto il piano siano isoterme. Siano $N : \mathcal{S} \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss associata alla superficie \mathcal{S} e $\pi_N : S^2 - \{N\} \rightarrow Oxy$ la proiezione stereografica dal polo nord $N = (0, 0, 1)$.

Identifichiamo il piano $\mathbb{R}_{(u,v)}^2$ con \mathbb{C}_ξ dove $\xi = u + iv$ e il piano $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ con \mathbb{C}_η , $\eta = x + iy$. In tal modo la mappa di Gauss N definisce un'applicazione dal piano complesso \mathbb{C}_ξ nel piano complesso \mathbb{C}_η :

$$\mathbb{C}_\xi \approx \mathbb{R}_{(u,v)}^2 \rightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{N} S^2 - \{N\} \xrightarrow{\pi_N} \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \approx \mathbb{C}_\eta,$$

conforme perché prodotto di applicazioni conformi. Abbiamo anche visto che un'applicazione conforme da un aperto di \mathbb{C} in un aperto di \mathbb{C} è olomorfa,

pertanto l'applicazione sopra da $\mathbb{C}_\xi \rightarrow \mathbb{C}_\eta$ è olomorfa. Inoltre la mappa di Gauss manda tutta la superficie \mathcal{S} nell'emisfero superiore della sfera S^2 e quest'ultimo mediante la proiezione stereografica viene mandato in un insieme limitato del piano complesso \mathbb{C}_η . Dunque la nostra funzione risulta essere olomorfa limitata definita su tutto il piano \mathbb{C}_ξ quindi per il teorema di Liouville è costante. Di conseguenza, la mappa di Gauss manda tutta la superficie \mathcal{S} in un punto. Pertanto tutte le normali al grafico sono parallele, e così il grafico è un piano. \square

2.4. Variazione prima del funzionale area

Vogliamo analizzare ora il problema che storicamente ha condotto alla teoria delle superfici minime. La terminologia usata fu introdotta per la prima volta da Lagrange. Il termine *minima* deriva dal fatto che localmente, in un intorno cioè di ogni suo punto, la sua area è la più piccola tra le aree di tutte le superfici vicine sostenute dallo stesso contorno che si ottengono deformando questa. Cioè dato un contorno una superficie minima non può cambiare senza aumentare la sua area. Quindi date condizioni al contorno, il problema di determinare la superficie minima che vi si appoggia è un problema del calcolo delle variazioni.

Sia $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, $D \subset U$ un sottodominio di U (D è un sottoinsieme aperto e connesso di U) e $\overline{D} = D \cup \partial D$ la sua chiusura.

Data la mappa di Gauss N di \mathcal{S} e presa un'arbitraria funzione differenziabile $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, consideriamo la famiglia ad un parametro

$$\begin{aligned} Z : \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2, t) &\longmapsto X(u_1, u_2) + th(u_1, u_2)N(u_1, u_2), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\forall (u_1, u_2) \in \overline{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con

$$Z(u_1, u_2, 0) = X(u_1, u_2), \quad \frac{\partial Z}{\partial t}(u_1, u_2, 0) = h(u_1, u_2)N(u_1, u_2).$$

Definizione 2.4.1. *Detta Σ la restrizione di \mathcal{S} a D , $\Sigma = X(\overline{D})$, la famiglia ad un parametro definita dalla 2.19 è detta **variazione normale** di Σ determinata da h .*

Detto dA l'elemento d'area di Σ : $dA = W du_1 du_2$, si è visto che l'area della superficie Σ è definita da

$$A(\Sigma) = \int_{\bar{D}} |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| du_1 du_2 = \int_{\Sigma} dA.$$

Fissato $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se h e ε sono sufficientemente piccoli, l'applicazione $X^t : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$X^t(u_1, u_2) = Z(u_1, u_2, t)$$

è una superficie regolare, detta *deformazione di Σ che mantiene fisso il bordo*. Per X^t si ha:

$$\mathbf{X}_1^t = \mathbf{X}_1 + th \nabla_{\mathbf{X}_1} \mathbf{N} + th_1 \mathbf{N}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{X}_2^t = \mathbf{X}_2 + th \nabla_{\mathbf{X}_2} \mathbf{N} + th_2 \mathbf{N}, \quad (2.21)$$

dove come al solito $h_i = \partial h / \partial u_i$. Posto $\nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{N} = \mathbf{N}_i$, i coefficienti della seconda forma fondamentale associata a X^t sono

$$E^t = E + 2th \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{N}_1 \rangle + t^2 h^2 \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1 \rangle + t^2 h_1 h_1,$$

$$F^t = F + th (\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{N}_1 \rangle) + t^2 h^2 \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2 h_1 h_2,$$

$$G^t = G + 2th \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2 h^2 \langle \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2 h_2 h_2.$$

Posto $\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{N}_1 \rangle = -e$, $\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{N}_1 \rangle = -2f$ e $\langle \mathbf{X}_2, \mathbf{N}_2 \rangle = -g$

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4th\mathcal{H}) + R, \end{aligned}$$

dove R è tale che $\lim_{t \rightarrow 0} (R/t) = 0$ e \mathcal{H} è la curvatura media definita dalla 1.20. L'area di $X^t(\bar{D})$ è pertanto

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du_1 du_2 \\ &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4th\mathcal{H} + \bar{R} \sqrt{EG - F^2}} du_1 du_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

dove $\bar{R} = R/(EG - F^2)$. Ne segue che se ε è piccolo, A è una funzione differenziabile e la variazione prima del funzionale $A(\Sigma)$ di Σ nella direzione

di $\gamma = hN$ è data da:

$$\begin{aligned} \delta A(\Sigma, \gamma) &= \left. \frac{d}{dt} A(Z(\cdot, t)) \right|_{t=0} = \int \int_{\bar{D}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1 - 4th\mathcal{H} + \bar{R}\sqrt{EG - F^2}} \Big|_{t=0} du_1 du_2 \\ &= - \int \int_{\bar{D}} 2h\mathcal{H}\sqrt{EG - F^2} du_1 du_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ricordando che se f è un'arbitraria funzione continua in \bar{D} allora l'integrale di f su Σ

$$\int \int_{\Sigma} f dA = \int \int_{\bar{D}} f \sqrt{\det g_{ij}} du_1 du_2,$$

data l'arbitrarietà di h , prendendo $h(u_1, u_2) \equiv 1$, la 2.23 si riduce a

$$A'(0) = - \int \int_{\Sigma} 2\mathcal{H} dA$$

che fornisce un'interessante interpretazione della quantità \mathcal{H} .

Proposizione 2.4.2. *Sia $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e D un dominio limitato in U .*

X è minima $\iff A'(0) = 0$ per tutti D e tutte le variazioni normali di Σ .

Equivalentemente: X è minima se e solo se è localmente di area minima.

Dimostrazione.

(\implies) X minima $\implies \mathcal{H} = 0 \implies$ per la 2.23 $A'(0) = 0$.

(\impliedby) Supponiamo $\exists q \in D : \mathcal{H}(q) \neq 0$, senza perdita di generalità possiamo supporre $\mathcal{H}(q) > 0$. Sia V un intorno piccolo di q in cui $\mathcal{H} > 0$.

Scegliamo $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(q) = \mathcal{H}(q) > 0$ e $h \equiv 0$ al di fuori di V allora l'integrale a destra della 2.23 è strettamente positivo quindi $A'(0) < 0$ per la variazione determinata da questa h . Assurdo perché $A'(0) = 0$ per ipotesi. \square

Osservazione 2.4.3. *Dunque, ogni regione limitata $X(\bar{D})$ di una superficie minima X è un punto critico del funzionale area per qualsiasi variazione normale di $X(\bar{D})$.*

Utilizzando questa nuova definizione di superficie minima data ora, proviamo che il catenoide è l'unica superficie minima, oltre il piano, che sia di rotazione.

Lo si dimostra provando che tutte le superfici minime complete di rotazione formano una famiglia ad un parametro di catenoidi \mathcal{M}_a , $a > 0$.

Consideriamo su \mathbb{R}^3 le coordinate cilindriche (r, φ, z) che, come noto, sono legate alle coordinate cartesiane (x, y, z) dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Sia \mathcal{M} una qualsiasi superficie minima di rotazione attorno all'asse z e $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, una parte della generatrice. Possiamo parametrizzare $\gamma(t)$ con la coordinata z , pertanto detta \mathcal{N} la parte di superficie ottenuta dalla rotazione di $\gamma(t)$ attorno all'asse z , dalla 1.42 \mathcal{N} ammette una parametrizzazione del tipo

$$X(\varphi, z) = (r(z) \cos \varphi, r(z) \sin \varphi, z).$$

Rispetto a tale parametrizzazione avremo

$$ds^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi dz + G dz^2 = r^2 d\varphi^2 + (\dot{r}^2 + 1) dz^2$$

e quindi l'area $A(\mathcal{N})$ rispetto a questa metrica è

$$A(\mathcal{N}) = \int_{\mathcal{N}} \sqrt{r^2(\dot{r}^2 + 1)} d\varphi dz = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \sqrt{\dot{r}^2 + 1} dz. \quad (2.24)$$

Se \mathcal{M} è minima, anche \mathcal{N} lo è. Quindi per il principio variazionale, \mathcal{N} è *estremale del funzionale area*

$$A(\mathcal{N}_s) = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r_s \sqrt{\dot{r}_s^2 + 1} dz,$$

per ogni deformazione \mathcal{N}_s nella classe delle superfici di rotazione attorno all'asse z , con $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ e fissa sul bordo, cioè tale che tutte le generatrici γ_s hanno gli stessi estremi: $\gamma_s(\alpha) = \gamma(\alpha) = A$ e $\gamma_s(\beta) = \gamma(\beta) = B$.

Osserviamo che l'area $A(\mathcal{N})$, data dalla 2.24, di una superficie di rotazione \mathcal{N} è una funzione di tutte le possibili generatrici γ della superficie \mathcal{N} . Infatti per il teorema di Pappus [3] considerata una parametrizzazione naturale per la generatrice \mathcal{C} , detta ρ la distanza tra l'asse di rotazione (asse z) e il punto sulla curva corrispondente ad s , l'area di \mathcal{N} è data

$$A(\mathcal{N}) = 2\pi \int_0^l \rho(s) ds,$$

dove l è la lunghezza della generatrice. Quindi possiamo affermare che $A(\mathcal{N}) = A(\gamma)$. Così dire che \mathcal{N} è un punto critico del funzionale area equivale a dire che per ogni deformazione γ_s della curva γ , fissa negli estremi e tale che $\gamma_0(t) = \gamma(t)$, γ è un *estremale* del funzionale $A(\gamma_s)$ cioè

$$\left. \frac{dA(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

Prima di proseguire nella nostra dimostrazione, facciamo delle considerazioni di carattere generale.

Sia $L(x, y, t)$ una funzione di tre variabili $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$ e t . Per ogni curva $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, che si trova nel dominio di variazione della coordinata x , consideriamo il funzionale

$$F(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt,$$

dove $y(t) = \dot{x}(t)$ è la velocità della curva γ nel punto $\gamma(t)$. Solitamente la funzione L è detta *Lagrangiana* associata al funzionale F .

Definizione 2.4.4. Una curva γ è un *estremale* del funzionale F se

$$\left. \frac{dF(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0$$

per ogni deformazione γ_s di γ che sia fissa negli estremi.

Proposizione 2.4.5. Sia F il funzionale corrispondente alla Lagrangiana L , definito su tutte le possibili curve lisce spezzate $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, che giace in un dominio V . Allora la curva γ è un *estremale* di F se e solo se lungo la curva γ si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \equiv 0,$$

dove la derivata totale, sostituendo $y(t) = \dot{x}(t)$, è data da

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}}.$$

Il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

è detto *sistema di equazioni di Eulero-Lagrange*.

Dimostrazione. Sia $\gamma_s(t) = x_s(t)$ una deformazione della curva $\gamma(t)$, fissa negli estremi $A = \gamma(\alpha) = \gamma_s(\alpha)$ e $B = \gamma(\beta) = \gamma_s(\beta)$, dove $\gamma_0(t) = \gamma$.

Consideriamo il campo di vettori η della deformazione γ_s che ad ogni punto $t \in [\alpha, \beta]$ associa il vettore velocità del moto del punto $\gamma(t)$ sotto la deformazione $\gamma_s(t)$ nell'istante iniziale $s = 0$:

$$\eta(t) = \left. \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \right|_{s=0}.$$

Sia

$$F(\gamma_s) = \int_{\alpha}^{\beta} L(x_s(t), \dot{x}_s(t), t) dt$$

allora

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{ds} \right|_{s=0} &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}_s}{\partial s} \right]_{s=0} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \cdot \eta + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \eta \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \cdot \eta \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \cdot \eta dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \eta \right|_{\alpha}^{\beta}. \end{aligned}$$

Poiché la deformazione è fissa negli estremi, si ha $\eta(\alpha) = \eta(\beta) = 0$, pertanto il secondo addendo dell'ultima espressione è nullo, quindi

$$\left. \frac{dF}{ds} \right|_{s=0} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \cdot \eta dt.$$

Dalla definizione data precedentemente, la curva γ è un estremo del funzionale F se e solo se

$$dF(\gamma_s)/ds|_{s=0} = 0$$

per ogni deformazione γ_s di γ fissa negli estremi. Se l'espressione in parentesi quadra fosse diversa da zero in un punto $t_0 \in [\alpha, \beta]$, allora, per la continuità, esisterebbe tutto un intorno di t_0 in cui questa espressione è diversa da zero. E' facile costruire al di fuori di questo intorno una deformazione che abbia campo nullo e con la stessa direzione di $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$. Ma per una simile deformazione $dF(\gamma_s)/ds|_{s=0} > 0$ quindi γ non sarebbe un estremo. Dunque l'espressione tra parentesi quadra è identicamente nulla. \square

Infine consideriamo la seguente proposizione

Proposizione 2.4.6 (Legge di conservazione dell'energia H). Se la Lagrangiana L non dipende esplicitamente dalla variabile t , allora lungo un estremo γ del funzionale F l'energia totale

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x} - L$$

si conserva, cioè, non dipende da t , $H(\gamma(t)) = \text{cost.}$

Dire che L non dipende esplicitamente dal tempo t , significa che $\partial L / \partial t \equiv 0$, ma ciò non vuol dire che dL/dt sia nulla.

Dimostrazione.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} - \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] \cdot \dot{x} = 0.$$

□

Siamo ora in grado di determinare la forma degli estremali del nostro funzionale area

$$A(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \sqrt{\dot{r}^2 + 1} dz$$

dove la Lagrangiana $L = L(r, \dot{r}, z)$ non dipende esplicitamente dal parametro z , pertanto per la legge di conservazione dell'energia, se γ è un estremo del funzionale area, lungo γ l'energia totale

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \cdot \dot{r} - L = \text{cost.}$$

Abbiamo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{2\pi r \dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}},$$

e

$$H = \frac{2\pi r \dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}} \cdot \dot{r} - 2\pi r \sqrt{\dot{r}^2 + 1} = -\frac{2\pi r}{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}} = a = \text{cost.}$$

Considerando l'ultima uguaglianza si ha

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}, \quad a > 0$$

risolvendo questa equazione differenziale otteniamo

$$\frac{r}{a} = \cosh \frac{z}{a},$$

che è proprio l'equazione di una catenaria. Abbiamo così dimostrato che tutte le superfici minime di rotazione formano una famiglia ad un parametro \mathcal{M}_a di catenoidi.

2.5. Rappresentazione di Weierstrass

s In questa sezione vogliamo dimostrare che localmente ogni superficie minima può essere definita mediante una particolare coppia di funzioni complesse (f, g) , detta *rappresentazione di Weierstrass*. A partire da una rappresentazione di Weierstrass è possibile definire nuovi e interessanti esempi di superfici minime come vedremo nel prossimo capitolo.

Finora abbiamo sempre considerato superfici regolari, cioè superfici senza *singolarità*. Se ammettiamo l'esistenza di punti singolari su una superficie \mathcal{S} abbiamo a che fare con quella che usualmente viene detta *superficie minima generalizzata*.

Definizione 2.5.1. Una *superficie minima generalizzata* in \mathbb{R}^3 è un'applicazione non costante $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove \mathcal{M} è una 2-varietà con una struttura conforme definita da un atlante $A = \{(R_a, \varphi_a, U_a)\}$, tale che:

- ogni componente Φ_k è armonica in \mathcal{M} ;

inoltre, presa una carta (R_a, φ_a, U_a) , posto

$$x_k(\xi) = \Phi_k(\varphi_a^{-1}(\xi)), \quad \psi_k(\xi) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2},$$

con $k = 1, 2, 3$ e $\xi = u_1 + iu_2$, si ha:

- $\sum_{k=1}^3 \psi_k^2(\xi) \equiv 0$.

Osserviamo che se \mathcal{S} è una superficie minima regolare, allora essa è anche una superficie minima generalizzata. Dunque la teoria delle superfici minime generalizzate include quella delle superfici regolari. Inoltre se \mathcal{S} è una superficie minima generalizzata, la mappa Φ non è costante per definizione, quindi almeno una delle componenti Φ_k non è costante, ciò implica che la corrispondente funzione analitica $\psi_k(\xi)$ del raggio vettore olomorfo associato può avere al più zeri isolati (vedi teorema 1.11.33). Dunque l'equazione

$$\sum_{k=1}^3 |\psi_k(\xi)|^2 = 0$$

può valere al più nei punti isolati. Nella proposizione 2.1.3 abbiamo visto che condizione necessaria per la regolarità è che $\sum_{k=1}^3 |\psi_k(\xi)|^2 \neq 0$. Pertanto se dalla \mathcal{S} togliamo queste singolarità isolate, otteniamo una superficie

minima regolare. Questi punti isolati sono detti, per la loro forma, *punti di ramificazione*.

Da quanto detto risulta

Lemma 2.5.2. *Una superficie minima generalizzata non può essere compatta.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{S} una superficie minima generalizzata definita mediante un'immersione (locale) $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Allora ciascuna funzione coordinata $\Phi_k(p)$ è armonica su \mathcal{M} , e se \mathcal{M} è compatta, $\Phi_k(p)$ deve assumere in \mathcal{M} il suo valore massimo, ma allora per il principio del massimo 1.11.36 delle funzioni armoniche, ogni $\Phi_k(p)$ è costante contraddicendo l'assunzione che Φ è non costante. \square

Definizione 2.5.3. *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso del piano complesso. Una coppia di funzioni (f, g) tali che:*

- (a) f è olomorfa in U , e non identicamente nulla;
- (b) g è meromorfa in U ;
- (c) f ha zeri di ordine $\geq 2m$ nei punti in cui g ha poli di ordine m ,

*definisce una **rappresentazione di Weierstrass**.*

Come già accennato data una rappresentazione di Weierstrass è possibile definire una superficie minima con parametrizzazione isoterma, ma è anche vero il viceversa. Infatti sia X una parametrizzazione minima isoterma, e $\psi = 2\partial X/\partial \xi$ il raggio vettore olomorfo associato tale che

$$(\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + (\psi_3)^2 = 0 \quad (2.25)$$

che è equivalente a

$$(\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi_2) = -(\psi_3)^2. \quad (2.26)$$

Supponiamo ora che $(\psi_1 - i\psi_2)$, non sia identicamente nullo, possiamo allora definire le seguenti funzioni:

$$f = \psi_1 - i\psi_2, \quad g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2}. \quad (2.27)$$

Dalla 2.26 abbiamo

$$\psi_1 + i\psi_2 = -\frac{(\psi_3)^2}{\psi_1 - i\psi_2} = -fg^2 \quad (2.28)$$

e pertanto combinando le 2.27 e la 2.28 si ha:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) \\ \psi_2 &= \frac{i}{2}f(1 + g^2) \\ \psi_3 &= fg.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Si ha così che la funzione f è olomorfa e non identicamente nulla, la funzione g è meromorfa e dalla 2.28 f e g definiscono una rappresentazione di Weierstrass.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema:

Teorema 2.5.4. *Sia (f, g) una rappresentazione di Weierstrass in un dominio U semplicemente connesso del piano complesso. Allora le funzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3 , definite dalla 2.29 sono olomorfe in U e soddisfano la 2.25, inoltre posto*

$$x_k(\xi, \bar{\xi}) = c_k + \Re \int_{\xi_0}^{\xi} \psi_k d\xi, \quad \forall k = 1, 2, 3\tag{2.30}$$

dove l'integrale è definito lungo una qualsiasi curva congiungente i punti ξ_0, ξ , queste definiscono una superficie minima generalizzata con parametrizzazione isoterma. Inoltre tale superficie è regolare se e solo se f soddisfa l'ulteriore proprietà di essere nulla nei poli di g e l'ordine dei suoi zeri è esattamente il doppio dell'ordine dei poli di g .

Viceversa ogni tripla di funzioni olomorfe in U soddisfacenti la 2.25 definiscono una rappresentazione di Weierstrass mediante le 2.27, eccetto per $\psi_1 = i\psi_2$ e $\psi_3 \equiv 0$.

Dimostrazione. La prima parte del teorema è ovvia. Infatti se (f, g) è una rappresentazione di Weierstrass, per definizione f ha zeri di ordine maggiore o uguale a $2m$ nei punti in cui la g ha poli di ordine m , allora anche il prodotto fg^2 è olomorfo. Quindi le ψ_k definite come in 2.29 sono tutte olomorfe e facendo i calcoli soddisfano ovviamente la 2.25. Inoltre abbiamo già osservato che definendo le x_k come in 2.30 queste determinano una superficie minima e l'integrale non dipende dalla curva congiungente i due punti sulla superficie, per il teorema di Cauchy; tale superficie risulta regolare se le ψ_k non si annullano tutte contemporaneamente, e ciò accade quando $f = 0$ dove g è regolare o quando $fg^2 = 0$ quando g ha un polo, pertanto

se imponiamo che la f abbia zeri solo nei poli di g e di ordine esattamente il doppio, allora le ψ_k non si annullano tutte contemporaneamente.

Viceversa date le ψ_k soddisfacenti la 2.25, definendo f, g come in 2.27 si ha che f è olomorfa, g è meromorfa e la condizione relativa agli zeri di f e ai poli di g è ovviamente soddisfatta, poiché altrimenti dall'equazione 2.28, $\psi_1 + i\psi_2$ non sarebbe olomorfa. Inoltre, tale rappresentazione non è definita solo se il denominatore dell'espressione per g svanisce identicamente e questo vale o quando $\psi_1 = i\psi_2$ o quando, per la 2.26, $\psi_3 \equiv 0$. \square

In questo modo, si è anche dimostrato che la condizione che definisce un punto di ramificazione è che f e fg^2 si annullino contemporaneamente in questo punto.

Osservazione 2.5.5. *Si è definita una rappresentazione (locale) di Weierstrass per una superficie minima \mathcal{S} in un dominio U semplicemente connesso e in tal caso si è visto che $\int_{\xi_0}^{\xi} \psi_k$ non dipende dal particolare cammino congiungente i due punti, perché per il teorema di Cauchy, l'integrale esteso lungo una curva chiusa di una funzione olomorfa è nullo. E' possibile però definire una rappresentazione di Weierstrass anche nel caso in cui U non sia semplicemente connesso, ma in tal caso $\int_{\gamma} \psi_k$ lungo una curva chiusa potrebbe non essere nullo. Se U non è semplicemente connesso si richiede che $\int_{\gamma} \psi_k$ esteso a una qualsiasi curva chiusa, non abbia periodo reale, sia cioè un numero puramente immaginario:*

$$\operatorname{Re} \oint_{\gamma} \psi = 0.$$

La rappresentazione di Weierstrass ci permette di semplificare alcune delle proprietà geometriche di una superficie minima, come la metrica, la mappa di Gauss, la curvatura di Gauss e altro ancora.

Sia (f, g) una rappresentazione di Weierstrass che, per il teorema 2.5.4, definisce una superficie minima \mathcal{S} rappresentata localmente dal raggio vettore $X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ con (u_1, u_2) coordinate isoterme, x_k date dalla 2.30 e con raggio vettore olomorfo $\psi = 2\partial X/\partial \xi$ dove $\xi = u_1 + iu_2$ è la corrispondente coordinata complessa.

La metrica ds^2 . Rispetto alla rappresentazione di Weierstrass la metrica ds^2 ha la forma

$$ds^2 = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2(du_1^2 + du_2^2). \quad (2.31)$$

Dimostrazione. Essendo X minima e (u_1, u_2) isoterme si ha

$$ds^2 = \lambda^2(du_1^2 + du_2^2)$$

dove

$$\lambda^2 = |\mathbf{X}_1|^2 = |\mathbf{X}_2|^2 = \frac{|\mathbf{X}_1|^2 + |\mathbf{X}_2|^2}{2} \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2}|\psi|^2 = \left[\frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right]^2. \quad (2.32)$$

La (a) viene dalla 2.7. □

Pertanto una condizione sufficiente affinché una superficie minima sia regolare è che $f \neq 0$. Poiché g è meromorfa, è possibile che $f(w_0) = 0$ ma $fg^2(w_0) \neq 0$.

La mappa di Gauss \mathbf{N} . E' possibile esprimere la mappa di Gauss \mathbf{N} della superficie minima \mathcal{S} in termini della coppia (f, g) della rappresentazione di Weierstrass. In realtà si dimostra che la mappa di Gauss è rappresentata proprio dalla funzione g della rappresentazione di Weierstrass.

Calcoliamo prima quanto vale \mathbf{N} in termini della rappresentazione (f, g) . Sappiamo che

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|}$$

dove $\mathbf{X}_1 = (x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1})$, $\mathbf{X}_2 = (x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2})$ e $x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$.
 $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ con

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1} \\ &= \Im[(x_{2,1} - ix_{2,2})(x_{3,1} + ix_{3,2})] \\ &= \Im(\psi_2 \overline{\psi_3}), \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= x_{3,1}x_{1,2} - x_{1,1}x_{3,2} \\ &= \Im(\psi_3 \overline{\psi_1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= x_{1,1}x_{2,2} - x_{2,1}x_{1,2} \\ &= \Im(\psi_1\overline{\psi_2}).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 &= \Im(\psi_2\overline{\psi_3}, \psi_3\overline{\psi_1}, \psi_1\overline{\psi_2}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \overline{\psi_1} & \overline{\psi_2} & \overline{\psi_3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\psi \times \overline{\psi}).\end{aligned}$$

Per quanto osservato nel punto precedente

$$|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| = \sqrt{\det g_{ij}} = \lambda^2 = \frac{1}{2}|\psi|^2$$

$$\mathbf{N} = \frac{\psi \times \overline{\psi}}{|\psi|^2} = \left(\frac{2\operatorname{Re}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right). \quad (2.33)$$

Consideriamo la proiezione stereografica dal polo nord $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$

$$\pi_{\mathbf{N}} : S^2 - \{\mathbf{N}\} \longrightarrow Oxy \quad (2.34)$$

che ad ogni punto $p \in S^2 - \{\mathbf{N}\}$, $p = (x_1, x_2, x_3)$, associa $\pi_{\mathbf{N}}(p) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$. Poiché la proiezione stereografica è un'applicazione conforme, le coordinate da essa indotte sulla sfera S^2 sono coordinate isoterme.

Osservazione 2.5.6. Possiamo anche considerare la proiezione stereografica $\pi_{\mathbf{S}}$ dal polo Sud $\mathbf{S} = (0, 0, -1)$. Allora sulla sfera S^2 con i due punti \mathbf{N}, \mathbf{S} tolti le due proiezioni $\pi_{\mathbf{N}}$ e $\pi_{\mathbf{S}}$ definiscono due sistemi di coordinate. Se indichiamo con $\omega = x + iy$ la coordinata complessa nel piano- xy , allora è possibile passare da un sistema di coordinate all'altro mediante l'applicazione $\omega \mapsto 1/\overline{\omega}$.

Se introduciamo su $S^2 \setminus \mathbf{N}$ la coordinata $\omega = x + iy$, e la coordinata $\eta = x - iy$ su $S^2 \setminus \mathbf{S}$, allora la funzione di transizione è complessa analitica: $\eta = 1/\overline{\omega}$. Queste sono le coordinate standard sulla sfera di Riemann $\mathbb{C} \cup \infty$ nell'analisi complessa.

Proposizione 2.5.7. *Se la sfera S^2 è vista come la sfera di Riemann $S^2 \approx \mathbb{C} \cup \infty$, allora la mappa di Gauss N di una superficie minima \mathcal{S} , $N : \mathcal{S} \rightarrow S^2$, è rappresentata da una funzione meromorfa in ogni sistema di coordinate isoterme (u_1, u_2) su \mathcal{S} .*

Nelle coordinate su S^2 date da π_N , i poli di N sono i punti $p \in \mathcal{S}$ in cui la normale $\mathbf{N}(p)$ ha la stessa direzione e stesso verso dell'asse z , cioè, sono i punti che vanno nel polo nord, mentre gli zeri di N sono quei punti $p \in \mathcal{S}$ in cui la normale $\mathbf{N}(p)$ ha la stessa direzione ma verso opposto all'asse z , cioè quei punti che vanno a finire nel polo sud.

Se assegnamo coordinate su S^2 per mezzo di π_S , allora gli zeri e i poli di N in queste nuove coordinate cambiano posto.

Dimostrazione. Sia X una superficie minima con coordinate conformi (u_1, u_2) , posto $\xi = u_1 + iu_2$, sia $\psi = 2\partial X/\partial \xi$ il corrispondente raggio vettore olomorfo. Abbiamo già osservato che rispetto alle funzioni (ψ_1, ψ_2, ψ_3) la mappa di Gauss è data da:

$$\begin{aligned} N = \frac{\psi \times \bar{\psi}}{|\psi|^2} &= \left(\frac{\psi_2 \bar{\psi}_3 - \psi_3 \bar{\psi}_2}{|\psi|^2}, \frac{\psi_3 \bar{\psi}_1 - \psi_1 \bar{\psi}_3}{|\psi|^2}, \frac{\psi_1 \bar{\psi}_2 - \psi_2 \bar{\psi}_1}{|\psi|^2} \right) \\ &= \left(\frac{2\text{Im}(\psi_2 \bar{\psi}_3)}{|\psi|^2}, \frac{2\text{Im}(\psi_3 \bar{\psi}_1)}{|\psi|^2}, \frac{2\text{Im}(\psi_1 \bar{\psi}_2)}{|\psi|^2} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Allora preso un punto su S^2 di coordinate date dalla 2.35 tramite la π_N questo ha immagine su $0xy$

$$\left(\frac{2\text{Im}(\psi_2 \bar{\psi}_3)}{|\psi|^2 - 2\text{Im}(\psi_1 \bar{\psi}_2)}, \frac{2\text{Im}(\psi_3 \bar{\psi}_1)}{|\psi|^2 - 2\text{Im}(\psi_1 \bar{\psi}_2)} \right),$$

da cui posto $\omega = x + iy$ si ha

$$\omega = \frac{2\text{Im}(\psi_2 \bar{\psi}_3) + 2i\text{Im}(\psi_3 \bar{\psi}_1)}{|\psi|^2 - 2\text{Im}(\psi_1 \bar{\psi}_2)}.$$

Cerchiamo di semplificare questa espressione. Osserviamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} 2\text{Im}(\psi_2 \bar{\psi}_3) + 2i\text{Im}(\psi_3 \bar{\psi}_1) &= \frac{1}{i}(\psi_2 \bar{\psi}_3 - \bar{\psi}_2 \psi_3 + i\psi_3 \bar{\psi}_1 - i\psi_1 \bar{\psi}_3) \\ &= \psi_3(\bar{\psi}_1 + i\bar{\psi}_2) - \bar{\psi}_3(\psi_1 + i\psi_2) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\psi_3[(\bar{\psi}_1 + i\bar{\psi}_2)(\psi_1 - i\psi_2) + |\psi_3|^2]}{\psi_1 - i\psi_2} \\ &= \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2} [|\psi|^2 - 2\text{Im}(\psi_1 \bar{\psi}_2)], \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (1) viene dalla 2.28. s Allora $\omega = x + iy = \psi_3/(\psi_1 - i\psi_2)$ quindi è una funzione meromorfa associata alla mappa di Gauss e coincide proprio con la funzione g della rappresentazione di Weierstrass e le condizioni sui poli sono ovviamente soddisfatte. \square

Osservazione 2.5.8. *In generale non è possibile definire la mappa di Gauss se la superficie \mathcal{S} non è regolare. Tuttavia per una superficie minima generalizzata la mappa di Gauss si estende continuamente e analiticamente nei punti di ramificazione e in tal caso la mappa N è data dalla 2.33.*

Lemma 2.5.9. *Sia $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minima generalizzata, dove U è l'intero piano. Allora X giace tutta in un piano (la superficie è piana), o le normali ad X assumono tutte le direzioni ad eccezione al più di due .*

Dimostrazione. Sia g la funzione meromorfa della rappresentazione di Weierstrass associata a X che sappiamo non essere definita solo se $\psi_1 \equiv i\psi_2$ e $\psi_3 \equiv 0$. In questo caso la x_3 sarebbe costante e quindi la superficie è tutta contenuta nel piano $\{x_3 = \text{cost}\}$. D'altra parte g è meromorfa in tutto il piano U e per il teorema di Picard questa o assume tutti i valori complessi ad eccezione al più di due, o è costante. La stessa cosa vale per la mappa di Gauss definita come in 2.33. Quindi la mappa di Gauss assume tutte le direzioni ad eccezione di al più due o è costante e quindi la superficie è un piano. \square

La curvatura di Gauss \mathcal{K} . Abbiamo detto che l'altra questione metrica che possiamo trattare con la rappresentazione di Weierstrass è la curvatura di Gauss \mathcal{K} ; si dimostra che

$$\mathcal{K} = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2. \quad (2.36)$$

Dimostrazione. Sia (f, g) una rappresentazione di Weierstrass che definisce una superficie minima X con coordinate isoterme. Nel capitolo 1 abbiamo visto che $\mathcal{K} = k_1 \cdot k_2$ con k_1, k_2 massimo e minimo della curvatura normale k data dalla 1.27

$$k = \frac{\sum b_{ij}(\mathbf{N}) u'_i u'_j}{\sum g_{ij} u'_i u'_j},$$

dove

$$b_{ij}(\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Sulla base di quanto detto finora, si dimostra che

$$\sum b_{ij} u'_1 u'_2 = \operatorname{Re} \left\{ -f g' \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 \right\}, \quad \xi = u_1 + i u_2. \quad (2.37)$$

Poiché rispetto alla rappresentazione (f, g) ,

$$\lambda^2 = \left[\frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right]^2$$

e $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$, si ha

$$\sum g_{ij} u'_i u'_j = \left[\frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right]^2 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2.$$

Ne segue che la curvatura normale è data da

$$k = \left[\frac{|f|(1 + |g|^2)}{-2} \right]^{-2} \operatorname{Re} \{ -f g' e^{2i\alpha} \}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \left| \frac{d\xi}{dt} \right| e^{i\alpha}$$

e il valore massimo e il valore minimo di questa espressione, ossia le curvature principali sono:

$$k_1 = \frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2}, \quad (2.38)$$

$$k_2 = \frac{-4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2}. \quad (2.39)$$

Poiché abbiamo definito curvatura di Gauss il prodotto delle due curvature principali si ha che

$$\mathcal{K} = - \left[\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2.$$

Dalla 2.32

$$\lambda^2 = \left[\frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right]^2,$$

allora si dimostra che

$$\mathcal{K} = -\lambda^{-2} \Delta \log \lambda.$$

□

Osservazione 2.5.10. Nella definizione 1.5.16 abbiamo definito ombelicale un punto $p \in \mathcal{S}$ tale che $k_1(p) = k_2(p)$, abbiamo inoltre più volte osservato che in una superficie minima ($\mathcal{H} = 0$) le curvatures principali hanno segno opposto, pertanto i punti ombelicali per una superficie minima sono quelli per cui $k_1 = k_2 = 0$ o equivalentemente quei punti in cui la curvatura di Gauss $\mathcal{K} = 0$. Dall'espressione 2.36 data ora per la curvatura Gaussiana ne segue che i punti ombelicali di una superficie minima sono gli zeri della derivata prima della g . Poiché g' è olomorfa, questa ha zeri isolati o è identicamente nulla, in tal caso g costante, anche N costante per la 2.33 e quindi la superficie \mathcal{S} è un piano.

Conseguenza dell'esistenza di una rappresentazione di Weierstrass (f, g) per una superficie minima \mathcal{S} , è la possibilità di costruire una famiglia ad un parametro \mathcal{S}^ϑ di superfici minime associate considerando la rappresentazione di Weierstrass $(e^{i\vartheta}f, g)$. Le superfici \mathcal{S}^0 e $\mathcal{S}^{\pm\frac{\pi}{2}}$ sono superfici minime coniugate, in tal caso le rispettive funzioni olomorfe della rappresentazione differiscono per l'unità immaginaria $\pm i$.

Osservazione 2.5.11. La rappresentazione di Weierstrass $(f, e^{i\vartheta}g)$ produce la stessa superficie minima di (f, g) ruotata però di un angolo ϑ attorno all'asse verticale.

Siamo ora in grado di provare quello che si è detto più indietro riguardo alla famiglia associata delle superfici minime che trasformano il catenoide nell'elicoide. Si dimostra cioè che queste sono tutte localmente isometriche, vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 2.5.12. La famiglia associata ad una superficie minima \mathcal{S} consiste di superfici minime localmente isometriche.

Dimostrazione. Sia \mathcal{S}^ϑ una superficie della famiglia associata di \mathcal{S} e $(e^{i\vartheta}f(z), g(z))$ la sua rappresentazione di Weierstrass, dove $z = u_1 + iu_2$. Allora la metrica su \mathcal{S}^ϑ indotta da \mathbb{R}^3 ha, come al solito, la forma

$$ds^2 = \lambda^2(\vartheta, u_1, u_2)(du_1^2 + du_2^2)$$

dove per la 2.32

$$\lambda^2(\vartheta, u_1, u_2) = \frac{1}{4}|e^{i\vartheta}f|^2(1 + |g|^2)^2 = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2 = \lambda^2(u_1, u_2)$$

cioè, questa non dipende da ϑ . □

Si è parlato finora di rappresentazioni (f, g) locali, tuttavia è possibile incollare insieme tutte queste rappresentazioni in un'unica rappresentazione globale considerando al posto della funzione olomorfa f la 1-forma olomorfa $\omega = f d\xi$.

Sia \mathcal{S} minima data mediante una immersione $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove \mathcal{M} è una 2-varietà connessa. Consideriamo una carta locale (U, φ, R) su \mathcal{M} con coordinate (u_1, u_2) . Usando la stessa notazione di prima, siano

$$x_k = (\Phi \circ \varphi^{-1})_k, \quad k = 1, 2, 3$$

e

$$\psi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

le componenti del raggio vettore olomorfo associato, allora posto

$$f = \psi_1 - i\psi_2, \quad g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2}$$

otteniamo una rappresentazione di Weierstrass sull'aperto $R \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo su R la 1-forma olomorfa

$$\omega = f d\xi.$$

Si dimostra che sia ω che g sono ben definite, non dipendono cioè dalla carta locale considerata. Infatti sia $(\tilde{R}, \tilde{\varphi})$ un'altra carta con coordinate $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ e rappresentazione (\tilde{f}, \tilde{g}) . Definiamo in questo nuovo sistema di coordinate la 1-forma $\tilde{\omega} = \tilde{f} d\tilde{\xi}$. Allora nell'intersezione $R \cap \tilde{R}$, $\omega = \tilde{\omega}$ e $g = \tilde{g}$; infatti

$$\tilde{\psi}_k = 2 \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \tilde{\xi}} = 2 \frac{\partial x_k}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}}$$

pertanto

$$\tilde{f}(\tilde{\xi}) = f(\xi(\tilde{\xi})) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}}$$

e quindi

$$\tilde{\omega} = \tilde{f} d\tilde{\xi} = f \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}} d\tilde{\xi} = f d\xi = \omega,$$

perché sotto un cambiamento di coordinate $\xi \rightarrow \tilde{\xi}$, $d\xi \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}} d\tilde{\xi}$. Stessa cosa si dimostra per la g ; infatti

$$\tilde{g} = \frac{\tilde{\psi}_3}{\tilde{f}} = \frac{\psi_3 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}}}{f \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}}} = g.$$

Quindi possiamo definire su tutta la superficie di Riemann \mathcal{S} le tre 1-forme olomorfe

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega, \quad \psi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega \quad \text{e} \quad \psi_3 = g\omega. \quad (2.40)$$

Definizione 2.5.13. *Una coppia (ω, g) consistente da una funzione meromorfa g e una 1-forma olomorfa ω su una superficie di Riemann tali che le 1-forme olomorfe definite dalla 2.40 non hanno periodi reali, è detta **rappresentazione globale di Weierstrass**.*

Analogamente a quanto detto per la rappresentazione locale, presa una qualunque curva liscia spezzata γ congiungente due punti $p, q \in \mathcal{M}$, ponendo

$$\Phi_k(q) = \Phi_k(p) + \operatorname{Re} \int_{\gamma} \psi_k,$$

si ottiene una immersione locale minima generalizzata con coordinate isoterme. Nel caso in cui γ sia tutta contenuta in una carta locale, la dimostrazione è semplice, infatti

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \psi_k = \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_2} du_2 \right) = \int_{\gamma} d\Phi_k = \Phi_k(q) - \Phi_k(p),$$

per definizione di integrale di linea complesso (vedi §1.11). Per un'arbitraria curva, basta dividere questa in pezzi, ciascuno dei quali sia interamente contenuto in una certa carta.

Anche in questo caso i punti in cui viene a mancare la regolarità della superficie minima sono detti punti di ramificazione e un punto q è un punto di ramificazione se e solo se ω e $g^2\omega$ si annullano contemporaneamente.

Teorema 2.5.14. *Ogni superficie minima generalizzata ammette una rappresentazione di Weierstrass. Può essere rappresentata da una coppia (ω, g) consistente da una funzione meromorfa g e una 1-forma olomorfa ω tali che le 1-forme olomorfe $\psi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega$, $\psi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega$ e $\psi_3 = g\omega$ non hanno periodi reali su \mathcal{S} .*

Rispetto ad una parametrizzazione globale la metrica assume la forma

$$ds^2 = \frac{1}{4}(1 + |g|^2)^2 |\omega|^2.$$

Nel seguito useremo spesso la notazione $dh = g\omega$, in tal caso

$$ds = \frac{1}{2}(|g|^{-1} + |g|)|dh|. \quad (2.41)$$

2.6. Esempi di rappresentazioni di Weierstrass

Diamo ora alcuni esempi di rappresentazioni di Weierstrass per superfici minime classiche. Poniamo $z = u_1 + iu_2$.

- (a) **Elicoide** Prendiamo $U = \mathbb{C}$, $f = ie^{-z}$ e $g = -e^z$. Come si osserva facilmente, f non ha zeri in \mathbb{C} e g non ha poli in \mathbb{C} . Con una simile rappresentazione abbiamo:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{i}{2}e^{-z}(1 - e^{2z}) = -i\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = -i \sinh(z) \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2}e^{-z}(1 + e^{2z}) = -\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = -\cosh(z) \\ \psi_3 &= -i\end{aligned}$$

Poiché le funzioni $\cosh z$ e $\sinh z$ sono olomorfe in \mathbb{C} , si ha $\int_{\gamma} \psi_k dz = 0$, dove γ è una qualunque curva chiusa nel piano complesso \mathbb{C} . Pertanto le tre funzioni olomorfe ψ_k non hanno periodi reali. Quindi (f, g) è una rappresentazione di Weierstrass per l'elicoide, infatti ricordando che

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh(u_1 + iu_2) = \cosh u_1 \cos u_2 + i \sinh u_1 \sin u_2 \\ \sinh z &= \sinh(u_1 + iu_2) = \sinh u_1 \cos u_2 + i \cosh u_1 \sin u_2,\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = \Re \int_0^z -i \sinh z dz = \Re(-i \cosh z) = \sinh u_1 \sin u_2 \\ x_2 = \Re \int_0^z -\cosh z dz = \Re(-\sinh z) = -\sinh u_1 \cos u_2 \\ x_3 = \Re \int_0^z -i dz = \Re(-iz) = u_2.\end{cases}$$

Da cui posto $\sinh u_1 = t$ si ha

$$X(t, u_2) = (t \sin u_2, -t \cos u_2, u_2)$$

che con un'opportuna rotazione è proprio la parametrizzazione classica della superficie minima dell'elicoide.

- (b) **Il catenoide** Anche in questo caso scegliamo $U = \mathbb{C}$, $f = e^{-z}$ e $g = -e^z$. Come nel caso dell'elicoide f non ha zeri in U e la g non ha poli in U , abbiamo così

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2}e^{-z}(1 - e^{2z}) = -\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = -\sinh z \\ \psi_2 &= \frac{i}{2}e^{-z}(1 + e^{2z}) = i\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = i \cosh z \\ \psi_3 &= -1\end{aligned}$$

Sempre con lo stesso ragionamento fatto prima nel caso dell'elicoide si ha che le funzioni olomorfe ψ_k non hanno periodi reali in \mathbb{C} pertanto si ha

$$\begin{cases} x_1 = \Re \int_0^z -\sinh z dz = \Re(-\cosh z) = -\cosh u_1 \cos u_2 \\ x_2 = \Re \int_0^z i \cosh z dz = \Re(i \sinh z) = -\cosh u_1 \sin u_2 \\ x_3 = \Re \int_0^z -dz = \Re(z) = -u_1. \end{cases}$$

Da cui

$$X(u_1, u_2) = -(\cosh u_1 \cos u_2, \cosh u_1 \sin u_2, u_1)$$

che, con un'opportuna rotazione è proprio l'usuale parametrizzazione del catenoide.

Si è già osservato precedentemente che l'elicoide e il catenoide sono superfici minime coniugate, infatti le rispettive f differiscono per l'unità immaginaria i .

- (c) **La superficie minima di Enneper.** Scegliamo $U = \mathbb{C}$, $f = 1$ e $g = z$. E' la scelta più semplice che si possa fare. Ovviamente la f non ha zeri e la g non ha poli in \mathbb{C} , pertanto

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(1 - z^2) \\ \psi_2 &= \frac{i}{2}(1 + z^2) \\ \psi_3 &= z. \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{cases} x_1 = \Re \int_0^z \frac{1}{2}(1 - z^2) dz = \frac{1}{2}(u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2), \\ x_2 = \Re \int_0^z \frac{i}{2}(1 + z^2) dz = \frac{1}{2}(u_2 + \frac{u_2^3}{3} - u_1^2 u_2), \\ x_3 = \Re \int_0^z z dz = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2). \end{cases}$$

Il risultato di questa semplice scelta è

$$X(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2, u_2 + \frac{u_2^3}{3} - u_1^2 u_2, u_1^2 - u_2^2 \right)$$

che invece sappiamo essere una superficie minima alquanto complicata da visualizzare perché ha autointersezioni.

- (d) **La superficie minima di Scherk.** Tale superficie si ha scegliendo $U = \mathbb{C} - \{\pm 1, \pm i\}$, $g = z$ e $f = \left(\frac{4}{1-z^2}\right)$. Facendo i dovuti calcoli risulta

$$x_3 = \ln \left(\frac{\cos x_2}{\cos x_1} \right).$$

Capitolo 3

Le superfici minime complete

In questo capitolo faremo un'analisi dettagliata delle superfici minime complete, soffermando principalmente l'attenzione sulle *superfici minime, complete, immerse con curvatura totale finita*. Tali superfici hanno delle peculiari proprietà che non sono condivise con le superfici minime generali, specialmente nel caso di superfici immerse.

Sotto l'addizionale ipotesi di curvatura totale finita, si dimostra che queste superfici hanno una forte restrizione sulla loro struttura conforme.

Prima di procedere, analizziamo un'importante proprietà delle superfici minime: il *Principio del massimo per le superfici minime*. Come già più volte osservato per altre proprietà, questo è una versione del noto principio del massimo per le funzioni armoniche e olomorfe analizzato nel primo capitolo §1.11.

3.1. Il principio del massimo

Lemma 3.1.1 (Principio del massimo [21]). *Siano $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ due superfici minime immerse con un punto in comune p interno sia ad \mathcal{S}_1 che ad \mathcal{S}_2 . Supponiamo che $T_p\mathcal{S}_1 = T_p\mathcal{S}_2$ e che \mathcal{S}_1 localmente (in un intorno di p) si trovi tutta da un lato di \mathcal{S}_2 . Allora, in un intorno di p , \mathcal{S}_1 coincide con \mathcal{S}_2 .*

Nel caso semplice in cui \mathcal{S}_2 è un piano, il principio del massimo stabilisce che una superficie minima $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ che si trovi localmente da una parte del piano tangente $T_p\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$ è piana. Infatti se \mathcal{S} è minima, $\mathcal{K}(p) \leq 0$, quindi p è un punto iperbolico e pertanto, in un intorno del punto, comunque piccolo

questo si prenda, la superficie attraversa sempre il piano tangente. Quindi se si trova tutta da un lato deve essere necessariamente piana.

Utilizzando questo principio, si dimostra che

Proposizione 3.1.2. *In \mathbb{R}^3 non esistono superfici minime chiuse cioè, compatte senza bordo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minima chiusa (compatta senza bordo). Allora \mathcal{S} come sottoinsieme di \mathbb{R}^3 è limitata, pertanto presa, ad esempio, la coordinata x_3 , questa assumerà un valore minimo, diciamo $x_3 = c$. Prendiamo il piano $\Pi = \{x_3 = c\}$, questo intersecherà la nostra superficie \mathcal{S} nel punto p corrispondente a $x_3 = c$, e poiché \mathcal{S} è chiusa, p è un punto interno sia ad \mathcal{S} che a Π e, per costruzione, \mathcal{S} giace in un lato di Π . Quindi per il principio del massimo, \mathcal{S} e il piano Π coincidono in tutto un intorno di p , $\mathcal{S} \cap \Pi$ che è aperto (infatti è possibile fare considerazioni analoghe per ogni punto dell'intersezione). Inoltre $\mathcal{S} \cap \Pi$ è chiuso per la compattezza. Quindi, a meno che tale sottoinsieme non sia tutto il piano, questo è un assurdo perché un piano è connesso. \square

Quindi in \mathbb{R}^3 qualsiasi superficie minima senza bordo è non compatta. Tra tutte le superfici minime senza bordo una classe interessante è costituita dalla superfici minime complete che tratteremo in questo capitolo.

3.2. Superfici minime complete e loro curvatura totale

Sia \mathcal{S} una superficie minima data mediante un'immersione locale $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Abbiamo detto \mathcal{S} completa se e solo se \mathcal{M} completa e in §1.7 abbiamo definito \mathcal{M} completa rispetto alla metrica su di essa definita, se ogni successione di Cauchy in \mathcal{M} converge in \mathcal{M} , mentre in §1.2 si è detto \mathcal{M} completa rispetto alla metrica riemanniana su di essa definita se ogni curva divergente in \mathcal{M} ha lunghezza infinita. Le due definizioni sono equivalenti.

Inoltre abbiamo osservato che \mathcal{S} è completa se e solo se ogni sottoinsieme chiuso e limitato di \mathcal{S} è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^3 . Quindi, se \mathcal{S} è un catenoide, un elicoide, una superficie di Scherk, allora lo spazio metrico (\mathcal{S}, ρ) è completo.

Nello studio delle superfici minime complete in \mathbb{R}^3 un ruolo importante è ricoperto dalla loro *curvatura totale*; è proprio esaminando il valore di questa quantità che si è potuta fare una classificazione di tali superfici.

Parlando della curvatura totale (vedi §1.5) abbiamo detto che

$$\tau(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{K} \cdot \alpha = \pm A(N(\mathcal{S}))$$

dove per convenzione si era posto $+$ se la mappa di Gauss conserva l'orientazione e $-$ se inverte. Poiché stiamo considerando superfici minime $\mathcal{K} < 0$ (eventualmente $\mathcal{K} = 0$ in punti isolati) quindi si ha che

$$\tau(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{K} \cdot \alpha = -A(N(\mathcal{S})).$$

Sia \mathcal{S} una superficie minima, connessa data mediante un'immersione locale $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (non necessariamente globale) e sia (ω, g) una sua rappresentazione di Weierstrass. Sappiamo che su \mathcal{S} è possibile definire una struttura conforme che mediante la Φ viene portata su \mathcal{M} . D'ora in poi prenderemo in esame solo la 2-varietà \mathcal{M} e tutto ciò che si dirà potrà essere poi trasportato su \mathcal{S} .

Supponiamo \mathcal{M} completa rispetto alla metrica conforme: $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$, e con curvatura totale finita.

Osservazione 3.2.1. *Osserviamo che per una superficie minima completa la condizione curvatura totale finita è equivalente a $\int_{\mathcal{S}} |\mathcal{K}| dA < \infty$. Infatti se \mathcal{S} è minima, allora $\mathcal{K} \leq 0$ quindi $|\int_{\mathcal{S}} \mathcal{K} dA| = \int_{\mathcal{S}} |\mathcal{K}| dA$.*

Sotto queste ipotesi (\mathcal{M} completa e con curvatura totale finita), Huber dimostrò:

Teorema 3.2.2 (Huber). *[20] La superficie di Riemann \mathcal{M} è localmente isometrica ad una superficie di Riemann compatta (senza bordo) $\widehat{\mathcal{M}}$ di genere g , alla quale siano stati tolti un numero finito di punti $\{p_1, \dots, p_k\}$ con $k \geq 1$.*

La dimostrazione si basa sui seguenti risultati di cui non daremo la dimostrazione, rimandando per maggiori dettagli al riferimento.

Teorema 3.2.3. *Sia \mathcal{M} una superficie di Riemann completa rispetto alla metrica conforme e con curvatura totale finita. Allora esiste un sottoinsieme \mathcal{M}_0 di \mathcal{M} relativamente compatto limitato da un numero finito di*

curve di Jordan, il cui complementare è formato da componenti omeomorfe ad un disco forato, cioè un disco con un punto rimosso.

Questo teorema discende da un teorema di Huber ([14], pag. 61).

Lemma 3.2.4. [20] Sia D un dominio piano e $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ una metrica conforme in D , dove $\lambda = \lambda(z) \in C^2$, tale che D è completo rispetto a questa metrica. Se esiste una funzione armonica $h(z)$ tale che

$$\log \lambda(z) \leq h(z)$$

su tutto D , allora D o è l'intero piano o D è il piano meno un punto.

Lemma 3.2.5. [20] Sia D un dominio $0 < r_1 < |z| < r_2 \leq \infty$, e sia $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ una metrica conforme su D soddisfacente il 3.2.4. Supponiamo che $\int_C \lambda |dz| = \infty$ per ogni cammino C della forma $z(t)$ con $t \in [0, 1)$, tale che $\lim_{t \rightarrow 1} |z(t)| = r_2$. Allora $r_2 = \infty$.

Infine consideriamo il seguente

Lemma 3.2.6. [20] Sia D un dominio iperbolico e $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ una metrica rispetto alla quale D è completo. Supponiamo che

$$\Delta \log \lambda \geq 0,$$

$$\int_D |\Delta \log \lambda| dx dy < \infty, \quad z = x + iy.$$

Allora esiste una funzione armonica $h(z)$ in D tale che è verificato il lemma 3.2.4.

Dimostrazione del teorema 3.2.2. Per il teorema 3.2.3, \mathcal{M} ammette un sottoinsieme relativamente compatto \mathcal{M}_0 limitato da un numero finito di curve di Jordan $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, tali che l'insieme aperto $\mathcal{M} - \mathcal{M}_0$ è costituito da k componenti \mathcal{M}_j (confronta [1]) ciascuna delle quali è omeomorfa ad un anello D_j (dominio del piano): $1 < |z| < r_j \leq \infty$, dove le curve γ_j corrispondono a $|z| = 1$. La metrica su \mathcal{M}_j assume la forma $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ in D_j , quindi dire che $\mathcal{K} \leq 0$ e $\int_{\mathcal{M}} |\mathcal{K}| dA < \infty$ equivale alle condizioni del lemma 3.2.6, pertanto esiste una funzione armonica $h(z)$ tale che

$$\log \lambda(z) \leq h(z).$$

Ma allora dalla completezza di \mathcal{M} e dal lemma 3.2.5 $r_j = \infty$. Sia \widehat{D}_j l'estensione di D_j ad un disco sulla sfera di Riemann ottenuto aggiungendo il

punto all'infinito. Sia $\widehat{\mathcal{M}}$ la superficie compatta ottenuta saldando i dischi \widehat{D}_j a \mathcal{M}_0 lungo γ_j (confronta [1]). Allora \mathcal{M} è conformemente equivalente a $\widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\}$, dove p_j è il punto $\widehat{D}_j - D_j$, e portando questa corrispondenza sulla metrica di \mathcal{M} diventa una isometria. \square

Scriveremo pertanto $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\}$, dove il numero k è detto *connettività*, quindi utilizzando una vecchia terminologia diremo che \mathcal{M} è k -connessa. Inoltre ci riferiremo al genere di \mathcal{M} come al genere di $\widehat{\mathcal{M}}$: $g(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} g(\widehat{\mathcal{M}})$.

Abbiamo detto $\widehat{\mathcal{M}}$ superficie orientabile compatta e come tale somma connessa di g tori o, più semplicemente, è una sfera alla quale siano stati attaccati g manici. Il numero g è quello che viene chiamato genere della superficie.

Sulla base di quanto affermato da Huber, Osserman dimostrò che

Teorema 3.2.7 (Osserman). *Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'immersione locale minima completa con curvatura totale finita. Allora la rappresentazione di Weierstrass (ω, g) su \mathcal{M} si può estendere meromorficamente a tutta $\widehat{\mathcal{M}}$.*

Dimostrazione. Per il teorema 3.2.2 \mathcal{M} è isometrica ad una superficie compatta senza bordo $\widehat{\mathcal{M}}$ a cui sia stato tolto un numero finito di punti $\{p_1, \dots, p_k\}$, possiamo quindi vedere la funzione g della rappresentazione di Weierstrass di \mathcal{M} come una funzione meromorfa su $\widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\}$. Per il teorema di Picard (§1.11), se uno dei punti p_j , $j = 1, \dots, k$, fosse una singolarità essenziale (né eliminabile, né un polo), g assumerebbe qualsiasi valore finito un numero infinito di volte, con al più due eccezioni e poiché la g altro non è che la proiezione stereografica della mappa di Gauss N ciò implica che l'area dell'immagine sferica è infinita. Ma per l'osservazione fatta al riguardo della curvatura totale, anche questa sarebbe infinita e ciò è assurdo perché si è assunto \mathcal{M} con curvatura totale finita. Quindi g ha in ogni p_j un polo, ed è pertanto meromorfa su tutta $\widehat{\mathcal{M}}$. Chiameremo \widehat{g} tale estensione.

Anche la 1-forma olomorfa $\omega = f d\xi$, dove f è una funzione olomorfa, si può estendere meromorficamente ad una 1-forma meromorfa $\widehat{\omega}$, su tutta $\widehat{\mathcal{M}}$. Infatti sia δ una trasformazione ortogonale che conserva l'orientazione, $\delta \circ \Phi$ è ancora una superficie minima con una nuova rappresentazione (ω', g')

legata alla precedente. Proveremo che è possibile estendere la ω' . Se ciò è possibile per la ω' , sarà vero anche per ω .

Per ogni p_j , $j = 1, \dots, k$, possiamo sempre considerare una trasformazione ortogonale δ_j tale che p_j sia uno zero della \widehat{g}' , dove \widehat{g}' è l'estensione meromorfa della g' di $\delta_j \circ \Phi$ a tutta la superficie $\widehat{\mathcal{M}}$. Poiché $\delta_j \circ \Phi$ è ancora completa, questo significa che qualsiasi curva γ che diverge a p_j in $\widehat{\mathcal{M}}$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = p_j$) ha lunghezza infinita cioè, considerate coordinate isoterme

$$\infty = \int_0^\infty |\dot{\gamma}| dt = \int_\gamma \lambda |d\xi| = \frac{1}{2} \int_\gamma |f'| (1 + |g'|^2) |d\xi|.$$

Quando $p \rightarrow p_j$, $g'(p) \rightarrow 0$, pertanto

$$\int_\gamma |f'| |d\xi| = \infty$$

cioè, quando $p \rightarrow p_j$ si ha $|f'(p)| \rightarrow \infty$. Quindi f' ha un polo in p_j per ogni $j = 1, \dots, k$. Quindi posso estendere la funzione olomorfa f' ad una funzione meromorfa \widehat{f}' su tutta $\widehat{\mathcal{M}}$ e considerare quindi la 1-forma meromorfa $\widehat{\omega}'$ su tutta $\widehat{\mathcal{M}}$ i cui poli sono i punti p_j , $j = 1, \dots, k$. \square

Osservazione 3.2.8. *Il teorema 3.2.7 afferma quindi che è possibile considerare la mappa di Gauss come una funzione su tutta la superficie $\widehat{\mathcal{S}}$ $\widehat{N} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow S^2$ definendo il versore normale in p_j come l'unico versore in S^2 la cui proiezione stereografica è proprio uguale a $\widehat{g}(p_j)$. Questi punti vanno a finire mediante la \widehat{N} nel polo nord o nel polo sud.*

Guardando alla mappa di Gauss N come ad una funzione meromorfa tra superfici compatte, ad essa è possibile associare un ben definito grado $m = \deg(N)$. Data una funzione differenziabile $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tra due 2-varietà differenziabili compatte connesse, si definisce il grado di f e si indica con $\deg(f)$, come segue: dato un qualsiasi valore regolare $q \in \mathcal{M}_2$ per la funzione f , sia $\{p_1, \dots, p_k\} = f^{-1}(q)$. Detta $\mathcal{J}_{p_i} f$ la matrice Jacobiana della f nel punto p_i , $i = 1, \dots, k$,

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \text{signdet} \mathcal{J}_{p_i}(f), \quad (3.1)$$

dove $\text{signdet} \mathcal{J}_{p_i}(f) = 1$ se la f conserva l'orientazione in p_i , uguale a -1 se invece inverte l'orientazione. Osserviamo inoltre che il grado di f non

dipende dal valore regolare considerato cioè, se $p, q \in \mathcal{M}_2$ con $p \neq q$ sono due valori regolari per f , allora

$$\deg_p(f) = \deg_q(f).$$

Osserman dimostrò ancora che

Teorema 3.2.9. *Sia \mathcal{S} una superficie minima completa. Allora la curvatura totale $\tau(\mathcal{S})$ può assumere solo i valori $-\infty$ o $-4\pi m$, dove $m = \deg(N)$.*

Dimostrazione. Poiché \mathcal{S} è minima, $\mathcal{K} \leq 0$ pertanto per la 1.22 $\tau(\mathcal{S})$ può valere $-\infty$ o può essere finita.

Sia α la forma d'area su \mathcal{S} , β la forma d'area su S^2 e $N^*\beta$ la 2-forma su \mathcal{S} definita come in 1.25. Da quanto osservato precedentemente, detta \widehat{N} l'estensione della mappa di Gauss di \mathcal{S} a tutto $\widehat{\mathcal{S}}$, la cui esistenza è garantita dal teorema di Osserman 3.2.7, si ha

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{S}) &= \int_{\mathcal{S}} \mathcal{K} \alpha \stackrel{(a)}{=} \int_{\mathcal{S}} N^* \beta \\ &= \int_{\widehat{\mathcal{S}}} \widehat{N}^* \beta \\ &\stackrel{(b)}{=} \deg(\widehat{N}) \int_{S^2} \beta \\ &\stackrel{(c)}{=} -4\pi m \end{aligned}$$

dove la (a) viene dalla 1.26, la (b) dalla formula di trasformazione dell'integrale della forma β mediante la funzione differenziabile \widehat{N} e la (c) deriva dal fatto che l'area della sfera S^2 è 4π e dal fatto che se su S^2 scegliamo la normale verso l'esterno allora \widehat{N} inverte l'orientazione, quindi tutti i segni nella definizione del grado sono uguali a -1 . Pertanto se m è il numero delle controimmagini di ogni valore regolare per \widehat{N} , si ha $\deg(\widehat{N}) = -m$. \square

3.3. “Fini” di una superficie minima completa

Definiamo ora un concetto molto importante collegato con le superfici minime complete con curvatura totale finita: il concetto di *fine di una superficie*.

Data $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ immersione locale minima completa con curvatura totale finita, per il teorema di Huber, \mathcal{M} è isometrica ad una 2-varietà di Riemann compatta (senza bordo) $\widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\}$. Sia $\widehat{\Phi}$ la composizione dell'isometria esistente tra \mathcal{M} e $\widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\}$ e l'immersione locale Φ , $\widehat{\Phi} : \widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definizione 3.3.1. Siano $D_i \subset \widehat{\mathcal{M}}$, $i = 1, \dots, k$ intorni puntati di $p_i \in \widehat{\mathcal{M}}$. Definiamo **fine** di \mathcal{M} in p_i l'immagine $C_i = \widehat{\Phi}(D_i - \{p_i\})$.

Preso un $\rho > 0$, per ogni p_i consideriamo le curve $\gamma_i \subset S^2$ tali che

$$\gamma_i = \{q \in S^2 : \rho q \in C_i\}. \quad (3.2)$$

Se ρ è sufficientemente grande, la curva

$$\gamma_i = \frac{C_i}{\rho} \cap S^2,$$

pertanto il comportamento asintotico delle curve γ_i caratterizza il comportamento della fine di \mathcal{M} in p_i .

Teorema 3.3.2. [5] Siano γ_i definite come in 3.2. Allora

- (a) $\forall i = 1, \dots, k$, γ_i converge, quando $\rho \rightarrow \infty$, ad un cerchio massimo ν_i della sfera S^2 ricoprendolo un numero finito di volte.
- (b) Detta $d_i \geq 1$ la molteplicità del cerchio massimo, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{K} \cdot \alpha &= 2\pi \left(2(1-g) - k - \sum_{j=1}^k d_j \right) \\ &= 2\pi \left(\chi(\widehat{\mathcal{M}}) - k - \sum_{j=1}^k d_j \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove g è il genere della superficie \mathcal{M} , k è il numero delle fini e $\chi(\widehat{\mathcal{M}})$ è la caratteristica di Eulero-Poincaré della superficie compatta del teorema di Huber.

Definizione 3.3.3. Il numero intero positivo d_i è detto **molteplicità della fine** C_i . Diremo che \mathcal{M} ha una **fine immersa** in p_i se $\widehat{\Phi}|_{D_i - \{p_i\}}$ è un'immersione (globale); in tal caso $d_i = 1$.

Poniamo

$$n(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^k d_j. \quad (3.4)$$

Dalla definizione di molteplicità della fine d_i , segue che $n(\mathcal{M}) \geq k$, e l'uguaglianza vale solo se ogni fine è immersa, o equivalentemente se $d_j = 1$, per ogni $j = 1, \dots, k$.

Pertanto dalla 3.3.2 si ha

$$m = \frac{k}{2} + g - 1 + \frac{n(\mathcal{M})}{2} \quad (3.5)$$

e poiché $n(\mathcal{M}) \geq k$

$$m \geq k + g - 1. \quad (3.6)$$

Tale disuguaglianza è nota come *formula di Jorge e Meeks*; l'uguaglianza vale se tutte le fini sono immerse.

La 3.6 stabilisce un legame tra le tre variabili numeriche che determinano la geometria di una superficie minima completa di curvatura totale finita:

- il genere g della superficie \mathcal{S} ;
- il numero k delle fini;
- il grado m della mappa di Gauss.

Quindi un modo naturale per ottenere una classificazione di simili superfici è quello di fissare alcune di queste variabili e studiare il corrispondente spazio-modulo delle superfici minime, facendo variare le altre tra tutti i possibili valori. Ne risulta che se il tipo topologico è ristretto o alcune delle altre proprietà geometriche sono specificate, allora la superficie è univocamente determinata, come vedremo in §3.5.

La 3.3 è una generalizzazione del teorema globale di Gauss-Bonnet nel caso di superfici minime complete di curvatura totale finita.

Dimostrazione della parte b del teorema 3.3.2. La traccia della dimostrazione è analoga a quella utilizzata per il teorema 3.2.2. Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minima completa di curvatura totale finita, allora $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\}$ dove $\widehat{\mathcal{M}}$ è una superficie di Riemann compatta di genere g . Intorno ad ogni punto p_i prendiamo piccoli dischi disgiunti D_i centrati in p_i . Sia B il sottoinsieme compatto di $\widehat{\mathcal{M}}$

$$B = \widehat{\mathcal{M}} - \bigsqcup_{i=1}^k D_i$$

il suo bordo è dato da

$$\partial B = \bigsqcup_{i=1}^k \partial D_i.$$

Consideriamo una qualsiasi triangolazione di B tale che ciascun disco D_i sia interamente contenuto in un triangolo e applichiamo il teorema locale di Gauss-Bonnet a ciascun triangolo della partizione. Sommando su tutti i triangoli si ottiene

$$\int_B \mathcal{K} + \sum_{i=1}^k \int_{\partial D_i} k_g = 2\pi\chi(B) = 2\pi(\chi(\widehat{\mathcal{M}}) - k).$$

Nel membro di sinistra dell’uguaglianza sopra, manca la somma degli angoli esterni, che invece compare nella 1.29, perché ora le curve γ_i che definiscono il bordo di B sono curve lisce.

Ora se d_i è la molteplicità di ogni fine $C_i = \widehat{\Phi}(D_i - \{p_i\})$, si dimostra che quando $D_i \rightarrow \{p_i\}$, $\int_{\partial D_i} k_g \rightarrow 2\pi d_i$. Non è restrittivo supporre che la mappa di Gauss mandi il punto p_i nel polo sud $(0, 0, -1)$. Nel punto a, si è detto che quando $\rho \rightarrow \infty$ le curve γ_i definite dalla 3.2 convergono ad un cerchio massimo ricoprendolo d_i volte. Nel nostro caso γ_i converge all’equatore. Consideriamo la curva $\rho\gamma_i$ sulla sfera di centro l’origine e raggio ρ : $\rho\gamma_i = \widehat{\Phi}(D_i - \{p_i\}) \cap S_\rho^2$. Consideriamo un punto su tale curva, quando questo si muove con velocità unitaria, il corrispondente punto sulla curva γ_i della sfera S^2 si muoverà con velocità $1/\rho$ e quando il primo avrà compiuto un giro completo, il secondo avrà compiuto d_i giri. Quindi possiamo parametrizzare $\gamma_i \approx (\cos(t/\rho), \sin(t/\rho), 0)$, quando $\rho \rightarrow \infty$ e t varia da 0 a $2\pi\rho d_i$. Pertanto il vettore accelerazione della curva $\rho\gamma_i$ è approssimativamente uguale a $1/\rho$. Quindi

$$\int_{\rho\gamma_i} k_g \approx \int_0^{2\pi\rho d_i} \frac{1}{\rho} dt = 2\pi d_i.$$

□

Per avere un quadro completo dei risultati finora ottenuti, riassumiamo tutto nel seguente teorema.

Teorema 3.3.4. *Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un’immersione (non necessariamente globale) minima completa con curvatura totale finita. Allora*

- (a) \mathcal{M} è isometrica ad una superficie di Riemann compatta $\widehat{\mathcal{M}}$ di genere g alla quale siano stati tolti un numero finito k di punti. (Teorema di Huber.)
- (b) La mappa di Gauss si può estendere meromorficamente a tutta la superficie $\widehat{\mathcal{M}}$; la 1-forma olomorfa ω si estende ad una 1-forma meromorfa su tutta $\widehat{\mathcal{M}}$. (Teorema di Osserman.)
- (c) La curvatura totale è un multiplo intero di 4π e soddisfa

$$\tau(\mathcal{M}) = -4\pi m = 2\pi \left(\chi(\widehat{\mathcal{M}}) - k - \sum_{i=1}^k d_i \right),$$

dove $\chi(\widehat{\mathcal{M}}) = 2 - 2g$. (Generalizzazione della formula di Gauss-Bonnet.)

Facciamo ora alcuni esempi.

- L'esempio banale ci è fornito dal piano. E' noto che il piano è isometrico alla sfera S^2 meno un punto: $\mathbb{R}^2 = S^2 - \{p\}$; quindi il piano è una superficie minima semplicemente connessa ($k = 1$) di genere $g = 0$ e curvatura totale nulla ($\mathcal{K} \equiv 0$).
- Il catenoide è una superficie minima doppiamente connessa ($k = 2$) di genere 0; infatti si vede facilmente che è isometrica alla sfera di Riemann alla quale siano stati tolti due punti, il polo nord e il polo sud. Inoltre $\tau = -4\pi$ infatti, una rappresentazione di Weierstrass per il catenoide è data da $(1/z^2 dz, z)$ su $\mathbb{C} - \{0\}$. La mappa di Gauss è allora un diffeomorfismo del catenoide nella sfera S^2 e quindi $m = 1$.
- La superficie minima di Enneper è completa semplicemente connessa di genere 0 e con curvatura totale $\tau = -4\pi$. Infatti una rappresentazione di Weierstrass è $g(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$, quindi N è un diffeomorfismo tra la superficie di Enneper e la sfera meno un punto, quello che va all' ∞ cioè il polo nord.
- L'elicoide è una superficie minima semplicemente connessa di genere 0 e curvatura totale $\tau = -\infty$, infatti $g(z) = -e^z$ definisce un ricoprimento infinito dell'elicoide sulla sfera senza il polo nord e il polo sud.
- Tutte le superfici minime periodiche complete hanno curvatura totale $\tau = -\infty$; anche in tal caso infatti $m = \infty$.

Torniamo alla 3.5

$$m = \frac{k}{2} + g - 1 + \frac{n(\mathcal{M})}{2}$$

e vediamo ora quale relazione intercorre tra il grado della mappa di Gauss m e il genere g della superficie.

- Se $k \geq 2$, $m \geq g + 1$. Questo è il caso del catenoide in cui $k = 2$, $g = 0$ e $m = 1$.
- Se $k = 1$ allora $n(\mathcal{M}) = d_1$ e $m = g + (d_1 - 1)/2$. Poiché m è un numero intero, d_1 deve essere necessariamente dispari.
- Inoltre, poiché $k/2 + n(\mathcal{M})/2 \geq 1$, e l'uguaglianza vale solo se abbiamo una sola fine immersa, cioè $k = 1$ e $d_1 = 1$, segue che $m \geq g + 1$ su una superficie minima completa di curvatura totale finita a meno che questa abbia esattamente una sola fine e questa fine sia immersa. Come dimostreremo più avanti una simile superficie dovrebbe essere un piano. Dunque in una superficie minima completa non piana

$$m \geq g + 1. \tag{3.7}$$

3.4. Comportamento asintotico delle fini

Abbiamo osservato sopra che il comportamento asintotico delle fini è strettamente connesso con il comportamento asintotico delle curve γ_i e tale comportamento determina la forma della superficie all'infinito.

Dimostreremo che se \mathcal{S} è una superficie immersa allora le fini sono asintotiche alla fine di un piano o a quelle di un catenoide.

Supponiamo che $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ abbia una fine immersa in un punto p_i , $i = 1, \dots, k$ e sia D_i l'intorno di p_i in cui la Φ è un'immersione. Senza perdita di generalità, dopo un'opportuna rotazione, possiamo supporre che la mappa di Gauss estesa sia tale che $N(p_i) = (0, 0, \pm 1)$. I due casi più semplici sono rappresentati dal piano e dalle fini di un catenoide. Si dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 3.4.1. [21] *Supponiamo Φ e p_i come sopra. Allora, fuori di un insieme compatto, $\Phi(D_i - \{p_i\})$ è il grafico di una funzione*

$x_3 = x_3(x_1, x_2)$ con la seguente espansione:

$$x_3(x_1, x_2) = \text{cost} - c_{-1} \log \rho - \rho^{-2} c_{-1} \text{Re}(x_1 - ix_2) \cdot c + O(\rho^{-2}) \quad (3.8)$$

con $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Inoltre le prime due componenti ψ_1, ψ_2 del raggio olomorfo associato, hanno poli di ordine due in p_i e non hanno residui (vedi §1.11), mentre la terza componente ψ_3 o è regolare (questo accade se e solo se $c_{-1} = 0$) o ha un polo semplice in p_i con residuo c_{-1} .

Dimostrazione. Diamo solo un accenno alla dimostrazione senza entrare nei particolari, per maggiori dettagli confronta il riferimento. Limitiamoci inoltre al caso in cui la mappa di Gauss sia iniettiva.

Senza perdita di generalità, possiamo supporre $p_i = (0, 0, 0)$ e $g(z) = z$ e $dh = \left(\sum_{j=1}^k c_{-j} z^{-j} + c_0 + zw_1(z) \right)$ dove $w_1(z)$ è una funzione olomorfa. Considerando la quantità $x_1 - ix_2$ si dimostra che affinché le $x_i, i = 1, 2, 3$, siano ben definite c_0, c_{-k} con $k \geq 2$, devono essere tutti uguali a zero e c_{-1} deve essere un numero reale. Con tali posizioni si ha

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(c_{-1}z^{-2} - c_{-1} + w_1(z) - z^2w_1(z))dz,$$

$$\psi_2 = \frac{i}{2}(c_{-1}z^{-2} + c_{-1} + w_1(z) + z^2w_1(z))dz,$$

e

$$\psi_3 = (c_{-1}z^{-1} + zw_1(z))dz.$$

Quindi le prime due hanno poli di ordine 2 in p_i e non hanno residui, mentre la terza o ha un polo semplice in p_i o è regolare nel caso in cui $c_{-1} = 0$. \square

Poniamo $\alpha = -c_{-1}$. Dalla proposizione precedente derivano le seguenti definizioni.

Definizione 3.4.2. Sia \mathcal{S} una superficie minima immersa completa con curvatura totale finita e supponiamo che \mathcal{S} abbia una fine in p . Allora diremo che la fine in p è

- **piatta** o **planare** se nella 3.8, $\alpha = 0$;
- **catenoidale** se $\alpha \neq 0$.

Chiameremo la costante α **crescita logaritmica della fine**.



Figura 7.

Abbiamo una superficie con tre fini immerse: una piatta centrale e due catenoidali. Questo esempio mostra come il fatto che le fini abbiano molteplicità uguale ad uno non sia una condizione sufficiente a garantire l'immersione della superficie. Infatti questa superficie non è immersa perché le normali alle fini non sono parallele, le fini catenoidali intersecano la fine piatta centrale.

La terminologia è giustificata dal fatto che se si va a guardare il comportamento asintotico della superficie in una fine, si osserva che essa tende ad un piano (nel caso in cui la fine è *piatta*) o ad un semi-catenoide (nel caso in cui la fine è *catenoidale*).

Nella proposizione precedente si è inoltre dimostrato che la mappa di Gauss estesa non ha singolarità in una fine di tipo catenoidale, mentre è singolare in una fine piatta. Ne segue che la singolarità della mappa di Gauss estesa ad una fine immersa di curvatura totale finita è equivalente alla planarità della fine.

Osservazione 3.4.3. *Da quanto abbiamo finora detto deduciamo due condizioni necessarie affinché una superficie minima completa di curvatura totale finita sia immersa:*

- (a) *prima fra tutte, dal teorema 3.3.2, il grado della mappa di Gauss deve essere*

$$m = g + k - 1 = -\tau(\mathcal{S})/4\pi. \quad (3.9)$$

Infatti, poiché le fini di una superficie immersa devono essere immerse si ha $n(\mathcal{M}) = k$ pertanto la 3.3 diventa $\tau(\mathcal{S}) = 2\pi(2(1-g) - 2k)$.

- (b) *Secondo, queste fini devono essere tutte parallele, ciò equivale a dire che la mappa di Gauss \hat{N} su $\hat{\mathcal{S}}$ manda tutti i punti p_1, \dots, p_k in una coppia*

di punti diametralmente opposti sulla sfera S^2 . Pertanto dopo un'opportuna rotazione possiamo supporre che $\widehat{N}(p_i) = (0, 0, \pm 1)$, quindi se (ω, g) è la rappresentazione di Weierstrass della superficie \mathcal{S} e $(\widehat{\omega}, \widehat{g})$ è l'estensione a $\widehat{\mathcal{S}}$, allora i poli e gli zeri di \widehat{g} sono i punti p_1, \dots, p_k . Infatti abbiamo appena provato che due fini che sono o di tipo planare o di tipo catenoidale e queste si intersecano solo se le normali non sono parallele.

Come dimostra la figura 7, tuttavia queste sono condizioni necessarie ma non sufficienti a garantire l'immersione.

3.5. Flusso di \mathcal{S} lungo una curva chiusa γ

Definizione 3.5.1. Sia \mathcal{S} una superficie minima, γ una curva chiusa su \mathcal{S} e ν il campo di vettori normali lungo γ diretti verso l'esterno. Si definisce **flusso lungo γ** la quantità

$$\text{Flux}([\gamma]) = \int_{\gamma} \nu(s) ds. \quad (3.10)$$

Spesso è più conveniente definire il flusso di \mathcal{S} lungo γ come

$$\text{Flux}([\gamma]) = \text{Im} \int_{\gamma} \psi, \quad (3.11)$$

dove $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ è il raggio vettore olomorfo associato alla rappresentazione di Weierstrass (ω, g) e le due definizioni sono equivalenti.

Utilizzando il teorema di Stokes si prova che

- Il flusso di \mathcal{S} lungo la curva chiusa γ , $\text{Flux}(\gamma)$, è un invariante omologico.
- Se la superficie \mathcal{S} ha curvatura totale finita, allora la somma dei flussi è zero. In questo senso la superficie è bilanciata [16].

Quindi il flusso dipende solo dalla classe di omologia della curva chiusa considerata: se γ' è un'altra curva chiusa appartenente alla stessa classe di omologia, allora $\text{Flux}(\gamma) = \text{Flux}(\gamma')$.

Proposizione 3.5.2. *Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'immersione minima locale (conforme) completa data mediante una rappresentazione di Weierstrass: $\Phi = \text{Re} \int \psi$. Sia γ una curva chiusa su $\Phi(\mathcal{M})$ immagine di una curva chiusa $\tilde{\gamma} \subset \mathcal{M}$: $\gamma = \Phi(\tilde{\gamma})$. Detta Φ^* l'immersione locale (conforme) coniugata: $\Phi^* = -\text{Im} \int \psi$, allora si ha*

(a) $\text{Flux}([\gamma]) = -\text{Periodo}_{\tilde{\gamma}} \Phi^*$;

(b) Se $\tilde{\gamma}$ è nella classe di omologia di un punto p ,

$$\text{Flux}([\gamma]) = -2\pi \text{Residuo}_p \psi;$$

(c) Se $\tilde{\gamma}$ è nella classe di omologia di un punto p che rappresenta una fine immersa verticale di curvatura totale finita,

$$\text{Flux}([\gamma]) = (0, 0, 2\pi\alpha), \quad (3.12)$$

dove α è la crescita logaritmica della fine.

(d) Se $\Phi(\mathcal{M})$ è un'immersione con curvatura totale finita e crescite logaritmiche $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ nelle fini, allora

$$\sum_1^k \alpha_i = 0. \quad (3.13)$$

Dimostrazione.

(a) discende dal teorema di Stokes [21], pag. 9-10.

(b) Discende dalla (a).

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \psi &= \text{Re} \int_{\tilde{\gamma}} \psi + i \text{Im} \int_{\tilde{\gamma}} \psi \\ &= \text{Periodo}_{\tilde{\gamma}} \Phi + i \text{Periodo}_{\tilde{\gamma}} \Phi^* = -i \text{Flux}([\gamma]), \end{aligned}$$

per definizione infatti la Φ non ha periodi reali. Per il teorema del residuo di Cauchy (confronta §1.11), il primo integrale è uguale a $2\pi i$ per la somma dei residui di ψ nelle singolarità all'interno del contorno e poiché stiamo considerando $\tilde{\gamma}$ nella classe di omologia del punto p , si ha

$$\int_{\tilde{\gamma}} \psi = 2\pi i \text{Residuo}_p \psi$$

da cui uguagliando si ha la tesi.

(c) Dalla proposizione 3.4.1 se in p la superficie ha una fine immersa verticale (con normale verticale) allora le ψ_1, ψ_2 non hanno residui in p mentre il residuo in p di ψ_3 è uguale a $-\alpha$ dove α è la crescita logaritmica della fine:

$$\text{Residuo}_p \psi = (0, 0, -\alpha).$$

Dalla (b) segue

$$\text{Flux}([\gamma]) = (0, 0, 2\pi\alpha).$$

(d) Poiché $\Phi(\mathcal{M})$ ha curvatura totale finita, la 1-forma dh ha poli solo nei punti p_1, \dots, p_k . E poiché la somma dei flussi è zero, dalla (c) si ha

$$0 = -2\pi \sum_{i=1}^k \text{Residuo}_{p_i} dh = 2\pi \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

□

Osserviamo che in generale l'immersione coniugata non è ben definita, perché non è detto che sia verificata la condizione del periodo.

In particolare, abbiamo dimostrato che il flusso della classe di omologia rappresentante una fine immersa verticale di curvatura totale finita, è sempre verticale, lo chiameremo *flusso verticale*, ed è zero se e solo se la fine è piana. Inoltre se la superficie è immersa e con curvatura totale finita, la somma delle crescite logaritmiche delle sue fini è zero.

Proposizione 3.5.3. *Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'immersione minima locale. Allora sono equivalenti:*

- (a) $\text{Flux}([\gamma]) = 0, \forall \gamma$;
- (b) ψ_1, ψ_2 e ψ_3 sono esatte;
- (c) dh, gdh e g^2dh sono esatte;
- (d) l'immersione minima coniugata $\Phi^* = -\text{Im} \int \psi$ è ben definita.

Dimostrazione. Basta osservare che dalla proposizione precedente, $\int_{\tilde{\gamma}} \psi = -i\text{Flux}([\gamma])$ e che $\psi_1 - i\psi_2 = g^{-1}dh$, $-(\psi_1 + \psi_2) = gdh$ e $\psi_3 = dh$. □

In particolare se il flusso è *verticale*, allora sono esatte la ψ_1 e la ψ_2 .

3.6. Teorema del semispazio

Concludiamo la panoramica delle principali caratteristiche e proprietà delle superfici minime complete di curvatura totale finita, con il *teorema del semispazio per superfici minime complete propriamente localmente immerse*. Osserviamo che le superfici propriamente immerse (cioè chiuse come sottoinsiemi di \mathbb{R}^3) corrispondono alla nozione primitiva di superficie vista come *bordo di una regione solida*.

Questo teorema è una conseguenza del *principio del massimo* analizzato in §3.1, esso afferma che ogni superficie minima, completa, non piana, non può essere contenuta in un semispazio.

Teorema 3.6.1 (Teorema del semispazio per una superficie minima [13]). *Sia \mathcal{S} una superficie minima completa propriamente localmente immersa in \mathbb{R}^3 . Se \mathcal{S} è contenuta in un semispazio, allora \mathcal{S} è un piano.*

Dimostrazione. Supponiamo che \mathcal{S} sia contenuta in un semispazio H con bordo ∂H . Indichiamo con H^* l'intersezione di tutti i semispazi contenenti \mathcal{S} con bordo parallelo al bordo di H . Supponiamo $H^* = \{z \geq 0\}$ e quindi ∂H^* coincide con il piano $\{z = 0\}$. E' sempre possibile fare una simile scelta, basta ruotare e traslare opportunamente \mathcal{S} in \mathbb{R}^3 .

Si possono verificare due casi:

- $\mathcal{S} \cap \{z = 0\} \neq \emptyset$.
- $\mathcal{S} \cap \{z = 0\} = \emptyset$.

Nel primo caso il principio del massimo stabilisce che \mathcal{S} è un piano, così il teorema è dimostrato.

Nel secondo caso, osserviamo che poiché per ipotesi \mathcal{S} è propriamente immersa (cioè chiusa) non possiede punti di accumulazione in $\{z = 0\}$, pertanto ogni punto in $\{z = 0\}$ ha distanza positiva da \mathcal{S} .

Consideriamo un catenoide con asse parallelo all'asse z e cerchio di gola nel piano $\{z = 0\}$. Indichiamo con C il semicatenoide contenuto nello spazio $\{z \leq 0\}$. Supponiamo di traslare il catenoide verticalmente verso l'alto in modo che ora il cerchio di gola del catenoide si trovi in un piano $\{z > 0\}$ e il semicatenoide C sia sempre disgiunto da \mathcal{S} . Per la restante parte della dimostrazione, supporremo che $\partial H^* = \{z = -\varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$ e il cerchio di gola di C si trovi in $\{z = 0\}$.

Preso un fattore $t > 0$ consideriamo il restringimento tC di C . Diremo che tC *giace sotto* \mathcal{S} se \mathcal{S} giace nella chiusura della componente di \mathbb{R}^3 sopra tC . Se $t \leq 1$ il cerchio centrale di tC si trova dentro C .

Anche in tal caso distinguiamo i due casi: se $\mathcal{S} \cap tC \neq \emptyset$ allora sempre per il principio del massimo $\mathcal{S} = tC$ e essendo \mathcal{S} completa, \mathcal{S} è un catenoide, ma questa è una contraddizione perché \mathcal{S} è contenuta nel semispazio. Allora $\mathcal{S} \cap tC = \emptyset$, quindi tC si trova sotto \mathcal{S} . Inoltre poiché $tC \cap H^*$ è compatto e \mathcal{S} è contenuto in H^* ne segue che ogni tC che si trova veramente sotto \mathcal{S} ha distanza positiva finita da \mathcal{S} . In particolare l'insieme

$$T = \left\{ t \in (0, 1] : tC \text{ si trova sotto } \mathcal{S} \right\}$$

è aperto in $(0, 1]$. Ma se $\{t_n\} \subset T$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau > 0$ allora τC è un semicatenode sotto \mathcal{S} ; altrimenti un certo $t_n C$ non si deve trovare sotto \mathcal{S} . Dunque T è anche chiuso. Quindi $T = (0, 1]$ così tutti i tC sono sotto \mathcal{S} , $0 < t \leq 1$. Come $t \rightarrow 0$ i semicatenoidi tC tendono al piano $\{z = 0\}$, che è strettamente dentro H^* . Poiché tutti i tC sono sotto \mathcal{S} anche il piano limite $\{z = 0\}$ è sotto \mathcal{S} e questo contraddice il fatto che H^* è il più piccolo sottospazio contenente \mathcal{S} . Dunque questa è una contraddizione. \square

Questo teorema insieme agli altri risultati dei paragrafi precedenti ci permette di affermare che se \mathcal{S} minima completa immersa di curvatura totale finita, non è un piano, allora essa deve avere “almeno” due fini catenoidali. Infatti se \mathcal{S} non è piana e possiede solo una fine catenoidale e un numero finito di fini piane, essa è asintotica ad un semicatenode e come tale contenuta in un semispazio, assurdo. Analogamente, se \mathcal{S} ha solo fini piane sarebbe contenuta tra due piani e anche in tal caso è assurdo a meno che la distanza tra i piani non sia nulla e allora è un piano. Quindi se \mathcal{S} è una superficie minima immersa (globalmente) di curvatura totale finita, non piana, fuori da un sufficientemente largo insieme compatto, \mathcal{S} è asintotica ad un numero finito di semi-catenoidi e piani con la stessa normale verticale.

Dopo un'opportuna rotazione, possiamo supporre che la mappa di Gauss valga $(0, 0, \pm 1)$ sulle fini. Poiché stiamo assumendo \mathcal{S} connessa, dire che \mathcal{S} è propriamente immersa vuol dire che il complementare $\mathbb{R}^3 - \mathcal{S}$ è costituito da due componenti connesse. Al di fuori di un compatto sufficientemente grande, le fini sono ordinate dalla più alta alla più bassa. Questo porta

che anche le normali si alternano da una fine alla successiva. Poiché le fini di una superficie immersa completa di curvatura totale finita sono o di tipo planare o di tipo catenoidale, anche le loro crescite logaritmiche sono ordinate: *Se le fini corrispondono ai punti $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \widehat{\mathcal{M}}$, e se α_i è la crescita corrispondente alla fine in p_i , allora*

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k, \quad \alpha_1 \alpha_k < 0,$$

inoltre si ha

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

Per maggiori dettagli confronta [15] e [20]. Come già fatto nella sezione §3.2, possiamo supporre di poter riassumere i risultati di questi paragrafi nel seguente teorema che è una generalizzazione del 3.3.4 nel caso di superfici minime globalmente immerse.

Teorema 3.6.2. *Sia \mathcal{S} una superficie minima completa con curvatura totale finita data mediante un'immersione $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(\mathcal{M}) = \mathcal{S}$. Allora*

- (a) *\mathcal{M} è isometrica ad una 2-varietà di Riemann compatta di genere g alla quale siano stati tolti un numero "finito" k di punti: $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{M}} - \{p_1, \dots, p_k\}$.*
- (b) *Ad ogni intorno forato di ogni punto $p_i \in \widehat{\mathcal{M}}$ corrisponde una fine di \mathcal{S} che è di tipo planare o catenoidale.*
- (c) *La mappa di Gauss si può estendere meromorficamente a tutta $\widehat{\mathcal{M}}$ e $N(p_i) = (0, 0, \pm 1)$, per ogni p_i , $i = 1, \dots, k$ ed ha singolarità nelle fini piatte. Anche la 1-forma olomorfa dh si estende ad una 1-forma meromorfa su $\widehat{\mathcal{M}}$ con poli semplici rappresentati dalle fini catenoidali e il residuo di dh in questi poli è uguale (ma di segno opposto) alla crescita logaritmica della fine.*
- (d) *Tutte le fini al di fuori di un compatto sufficientemente grande sono ordinate dalla più alta alla più bassa e anche le normali si alternano passando da una fine a quella successiva e si ha*

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

3.7. Teoremi di esistenza e unicità

Come già accennato precedentemente, se si fanno delle restrizioni sulla topologia, la superficie minima è univocamente determinata. Analizziamo ora i principali risultati di esistenza e unicità.

Conseguenza diretta del teorema del semispazio per le superfici minime è il seguente:

Teorema 3.7.1. *Sia \mathcal{S} una superficie minima completa immersa con curvatura totale finita. Se \mathcal{S} ha una sola fine, allora \mathcal{S} è un piano.*

Da questo deduciamo: *non esistono in \mathbb{R}^3 superfici minime complete immerse di curvatura totale finita con una sola fine e genere diverso da zero.*

Dimostrazione. Supponiamo che \mathcal{S} non sia un piano. Allora per il teorema del semispazio, \mathcal{S} non può essere contenuta in un semispazio e quindi deve avere almeno due fini di tipo catenoidale. Assurdo perché abbiamo richiesto una sola fine. \square

Teorema 3.7.2. *Le sole superfici minime complete di curvatura totale finita uguale a -4π sono il catenoide e la superficie di Enneper.*

Ci troviamo nel caso in cui viene fissato il grado m della mappa di Gauss.

Dimostrazione. $1 = m = \deg(N)$ quindi poiché non si tratta di un piano (la curvatura totale è diversa da zero per ipotesi), per la 3.7 $g(\widehat{\mathcal{M}}) = 0$ quindi $\widehat{\mathcal{M}}$ coincide proprio con la sfera S^2 .

Dalla formula di Jorge e Meeks 3.6 si ha

$$k \leq 2.$$

Distinguiamo i due casi

- $k = 2$; abbiamo due fini con molteplicità $d_1 = d_2 = 1$ quindi abbiamo due fini immerse, quindi possiamo supporre di ruotare la \mathcal{S} in \mathbb{R}^3 in modo che le normali alle fini siano verticali e inoltre queste normali si alternano. Quindi senza perdita di generalità, possiamo supporre che \mathcal{M} sia la sfera meno il polo nord e il polo sud: $\mathcal{M} = S^2 - \{N, P\}$ cioè, identificando la sfera di Riemann con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{M} = \mathbb{C} - \{0\}$ con $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$. Poiché per ipotesi $m = 1$, g non ha altri poli o zeri quindi possiamo porre $g(z) = z$ (ricordiamo che per la proposizione

3.4.1 ψ_1, ψ_2 hanno poli di ordine 2 nei punti p_i). Poiché dh o è regolare o ha poli semplici in 0 e ∞ e non ha altri zeri o poli, possiamo porre $dh = c \frac{dz}{z}$ per $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Ma, se $c \in \mathbb{R}$, la ψ_3 non ha periodi reali. Quindi la $(c \frac{dz}{z}, z)$ con $c \in \mathbb{R}$ è proprio una rappresentazione di Weierstrass per il catenoide.

- $k = 1$; abbiamo una fine con molteplicità $d_1 = 3$. In questo caso seguendo i ragionamenti fatti sopra, possiamo supporre $\widehat{\mathcal{S}} - \{p_1\} = \mathbb{C}$ e $g(z) = z$. Così $\omega = Bdz$ che è la rappresentazione di Weierstrass per la superficie di Enneper.

□

Se restringiamo l'attenzione alle sole superfici minime immerse si ha:

Lemma 3.7.3. *La sola superficie minima completa immersa di curvatura totale finita uguale a -4π e due fini è il catenoide.*

Una immediata conseguenza del teorema 3.7.2

Corollario 3.7.4. *La superficie di Enneper e il catenoide sono le sole due superfici complete, minime, la cui mappa di Gauss è biettiva.*

Teorema 3.7.5 (Teorema di caratterizzazione del catenoide di Schoen [25]). *Sia \mathcal{S} una superficie minima completa immersa con curvatura totale finita. Se \mathcal{S} ha due fini immerse, allora \mathcal{S} è il catenoide*

Pertanto: non esistono superfici minime complete con curvatura totale finita con due sole fini e genere diverso da zero.

Teorema 3.7.6. *Sia \mathcal{S} una superficie minima, completa immersa con curvatura totale finita e flusso verticale. Allora \mathcal{S} è il piano o il catenoide.*

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di quella che viene chiamata la *deformazione di Lopez-Ros* che è rappresentata dall'immersione che si ottiene dalla Φ considerando un fattore $\lambda > 0$.

Sia (g, dh) la rappresentazione di Weierstrass di $\mathcal{S} = \Phi(\mathcal{M})$, definiamo su $\widehat{\mathcal{M}}$ (la superficie di Riemann compatta che esiste in virtù del teorema di Osserman) la rappresentazione

$$g_\lambda \stackrel{def}{=} \lambda g \quad dh_\lambda \stackrel{def}{=} dh,$$

per ogni $\lambda > 0$. Ricordiamo che nelle nostre posizioni stiamo considerando $dh = g\omega$, dove ω è la 1-forma della rappresentazione di Weierstrass. Con queste posizioni otteniamo la deformazione

$$\Phi_\lambda = \operatorname{Re} \int \psi_\lambda = \operatorname{Re} \int \left(\frac{1}{2}(\lambda^{-1}g^{-1} - \lambda g), \frac{i}{2}(\lambda^{-1}g^{-1} + \lambda g), 1 \right) dh,$$

che non necessariamente è a valori singoli.

Allora per tale immersione locale abbiamo

$$ds_\lambda = (\lambda^{-1}|g|^{-1} + \lambda|g|)|dh|$$

e

$$\mathcal{K}_\lambda = \frac{-16}{(\lambda^{-1}|g|^{-1} + \lambda|g|)^4} \frac{|dg/g|^2}{|dh|^2}.$$

Per la deformazione di Lopez, valgono le seguenti proposizioni di cui non daremo una dimostrazione rimandando per maggiori informazioni a [[21] §3.1].

Proposizione 3.7.7. *Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'immersione minima locale conforme:*

- (a) Φ_λ è a valori singoli per ogni $\lambda > 0$ se e solo se Φ ha flusso verticale;
- (b) se Φ_λ è a valori singoli, allora Φ ha curvatura totale finita se e solo se Φ_λ ha curvatura totale finita $\forall \lambda > 0$;
- (c) Φ è completa se e solo se Φ_λ è completa per ogni $\lambda > 0$.

Proposizione 3.7.8. *Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minima, immersa completa con curvatura totale finita, tale che Φ_λ è a valori singoli per ogni $\lambda > 0$. Allora Φ_λ è un'immersione per ogni $\lambda > 0$.*

Proposizione 3.7.9. *Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una immersione locale conforme minima.*

- (a) *Se per un certo $p \in \mathcal{M}$, $N(p) = (0, 0, \pm 1)$ (che equivale a dire $g(p) = 0$ o $g(p) = \infty$) allora, su ogni intorno di p , Φ_λ non è un'immersione globale, per λ sufficientemente grande.*
- (b) *Supponiamo che $\Phi : \mathcal{M} = \{z | 0 < |z| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia una immersione minima conforme rappresentante una fine piatta. Allora Φ_λ non è un'immersione, per λ sufficientemente grande, a meno che Φ non rappresenti la fine di un piano piatto.*

Dimostrazione del teorema 3.7.6. Sia \mathcal{S} minima completa immersa con curvatura totale finita e flusso verticale, allora per la (a) della 3.7.7, Φ_λ è a valori singoli per ogni $\lambda > 0$ e poiché Φ ha curvatura totale finita ed è completa per la (b) e la (c) della stessa proposizione, Φ_λ è completa con curvatura totale finita e per la 3.7.8 è un'immersione per ogni $\lambda > 0$. Ma allora per la 3.7.9, Φ non ha fini verticali (a) e non ha fini piatte (b), a meno che non sia un piano.

Supponiamo che \mathcal{S} non sia un piano. Poiché \mathcal{S} è immersa, per la proposizione 3.4.1 le fini sono di tipo planare o catenoidale e dh ha zeri nelle fini piatte o nei poli di g cioè nei punti a normale verticale, mentre ha poli semplici nelle fini catenoidali. Poiché \mathcal{S} non è un piano, $dh \neq 0$ quindi non ha zeri. Allora tutte le fini sono catenoidali. Dunque $\widehat{\mathcal{M}} = S^2$, pertanto $g = 0$ e dalla relazione $k = 2$ e per il lemma sopra, \mathcal{S} è il catenoide. \square

Una conseguenza del teorema 3.7.6 è il seguente teorema di unicità:

Teorema 3.7.10 (Teorema della sfera bucata di Lopez-Ros).

Sia \mathcal{S} una superficie minima completa, immersa con curvatura totale finita. Se \mathcal{S} ha genere zero, allora questa è o il catenoide o il piano.

Pertanto: non esistono superfici minime complete con curvatura totale finita di genere zero e più di tre fini.

Dimostrazione. Sia \mathcal{S} una superficie minima immersa di genere zero le sole curve chiuse sono quelle associate alle fini e i flussi delle classi di omologia sono verticali e uguali a $(0, 0, 2\pi\alpha_i)$. Ci siamo quindi ricondotti al teorema sopra. \square

Da quanto finora dimostrato si conclude

Corollario 3.7.11. *Le sole superfici minime complete immerse con curvatura totale $\tau(\mathcal{S}) \geq -8\pi$ sono il piano e il catenoide (con curvatura totale 0 e -4π rispettivamente).*

Dimostrazione. Basta considerare la 3.5 e il fatto che la curvatura totale è un multiplo di -4π . Facendo considerazioni sui possibili valori di k e g si ha la tesi. \square

Diamo ora un teorema di non esistenza:

Teorema 3.7.12. *Non esistono superfici minime complete immerse di curvatura totale uguale a -8π .*

Dimostrazione. Consideriamo $\tau = -8\pi$ cioè $m = 2$. Dalla relazione $m = g + k - 1$ risulta $g + k = 3$. Distinguiamo i casi

- $g = 0$ e $k = 3$. Non è possibile, abbiamo appena dimostrato che le uniche superfici immerse minime complete di genere zero sono il piano ($k = 1$) e il catenoide ($k = 2$).
- $g = 1$ e $k = 2$. Non è possibile, l'unica superficie con due fini immerse è il catenoide che ha genere zero.
- $g = 2$ e $k = 1$. Anche questo non si può verificare perché l'unica superficie con una sola fine immersa è il piano che ha genere zero.

□

Pertanto il valore di curvatura totale immediatamente più piccolo che possiamo considerare è $\tau = -12\pi$. In questo caso $m = 3$ e $g + k = 4$. Facendo considerazioni analoghe al caso precedente, si dimostra che l'unica combinazione possibile dei valori g e k è :

$$g = 1 \quad \text{e} \quad k = 3.$$

Si proverà più avanti che esiste una sola superficie minima completa immersa con curvatura totale finita di genere $g = 1$ e 3 fini, due catenoidali e una piatta centrale. Questa è la **superficie minima di Costa** (vedi figura 9).

Questa superficie fa parte di una famiglia di superfici minime complete di qualsiasi genere e con tre fini costruita da Hoffman e Meeks.

Accenniamo brevemente, senza entrare nel dettaglio della costruzione, alle proprietà di queste superfici e diamo i teoremi di esistenza ed unicità associati.

Teorema 3.7.13. [9] *Per ogni $n \geq 2$, esiste una superficie minima completa immersa \mathcal{M}_n di genere $g = n - 1$ e tre fini anulari.*

Dopo una opportuna rotazione e traslazione queste superfici godono delle seguenti proprietà:

- (a) \mathcal{M}_n ha una fine piatta tra le due fini catenoidali. La fine piatta è asintotica al piano (x_1, x_2) .
- (b) \mathcal{M}_n interseca il piano (x_1, x_2) esattamente in n linee che si incontrano in un angolo uguale a π/n nell'origine. Rimuovendo queste n linee la superficie \mathcal{M}_n si disconnette nell'unione di due anelli aperti.

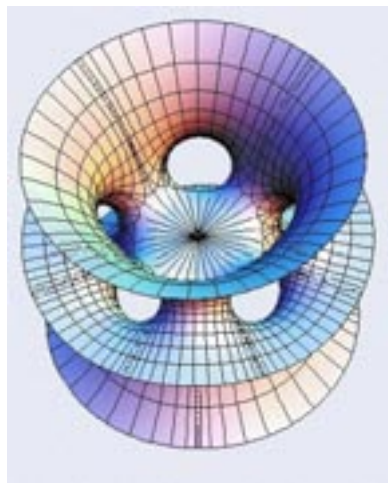


Figura 8.

In figura abbiamo la superficie minima di Hoffman e Meeks \mathcal{M}_n con tre fini immerse due catenoidali e una equatoriale piatta.

- (c) *L'intersezione di \mathcal{M}_n con un qualsiasi piano parallelo al piano (x_1, x_2) ma non coincidente con questo, è una curva semplice di Jordan.*
- (d) *Il gruppo di simmetria di \mathcal{M}_n è costituito da $4n$ elementi generato dalla riflessione rispetto agli n piani verticali di simmetria, e alla rotazione attorno ad una delle linee del piano (x_1, x_2) in cui la superficie lo incontra. Rimuovendo le intersezioni di \mathcal{M}_n con il piano (x_1, x_2) e piani verticali di simmetria, la superficie resta divisa in $4n$ pezzi congruenti.*

Per tali superfici ovviamente si ha che $m = n + 1$.

Richiedendo simili condizioni di simmetria, si dimostra che la superficie di Riemann compatta associata è data da

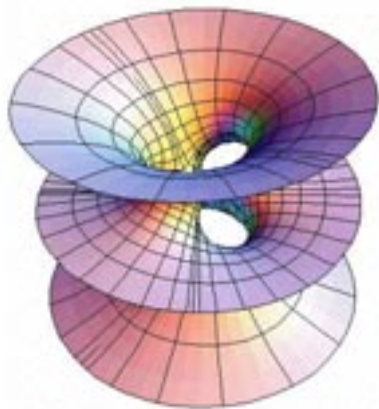
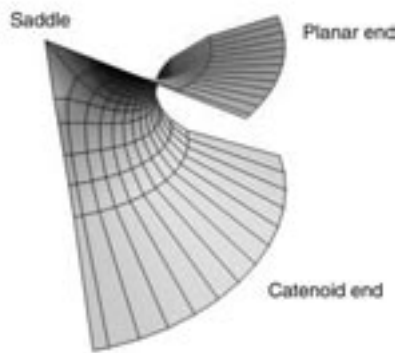
$$\widehat{\mathcal{M}}_n = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 : w^n = -\frac{1}{2}z^{n-1}(z-1)(z+1) \right\}.$$

Le fini catenoidali sono localizzate in $(z, w) = (\pm 1, 0)$, e le fini piane in (∞, ∞) . La mappa di Gauss e la 1-forma dh sono date da

$$g = \rho w, \quad dh = \frac{dz}{(z-1)(z+1)},$$

dove ρ è una costante determinata dalla necessità di soddisfare il problema del periodo.

Le superficie \mathcal{M}_n sono le *superfici minime di Hoffman e Meeks* e quando $n = 2$ abbiamo la *superficie di Costa*.

**Figura 9.****Figura 10.**

In figura 9 abbiamo il caso particolare della famiglia \mathcal{M}_n con $n = 2$, la superficie minima di Costa. In figura 10 abbiamo invece una sezione della superficie di Costa in cui sono messe in evidenza la fine catenoidale, la fine piatta e il buco.

In termini di simmetria, Hoffman e Meek hanno dato un teorema di unicità per le superfici \mathcal{M}_n .

Teorema 3.7.14. *3.7.13 Supponiamo $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia una superficie minima immersa completa con curvatura totale finita, genere $g = n - 1$, $n > 1$, e tre fini. Se il gruppo di simmetria di $\Phi(\mathcal{M})$ ha almeno $4n$ elementi, allora, a meno di similitudini, la superficie è la superficie \mathcal{M}_n .*

Deformando queste superfici \mathcal{M}_n si ottiene una famiglia ad un parametro di superfici minime complete immerse con curvatura totale finita: $\mathcal{M}_{n,x}$, con $x \geq 1$, con tre fini tutte catenoidali. Non entreremo nel dettaglio della costruzione di questa famiglia (per maggiori informazioni confronta [21] §4 e [16] §6.1.1) ci limitiamo solo a dire che questa famiglia si ottiene fissando un alto grado di simmetria e studiando poi il problema del periodo associato alla rappresentazione di Weierstrass risultante. Osserviamo che questo è il modo usato per costruire nuovi ed interessanti esempi di superfici minime.

Teorema 3.7.15. [12] *Per ogni $n \geq 2$ esiste una famiglia ad un parametro, $\mathcal{M}_{n,x}$, $x \geq 1$, di superfici minime immerse di genere $g = n - 1$ e curvatura totale finita. Tale superfici godono delle seguenti proprietà:*

(a) *La superficie $\mathcal{M}_{n,1}$ è una delle superfici di Hoffman e Meeks.*

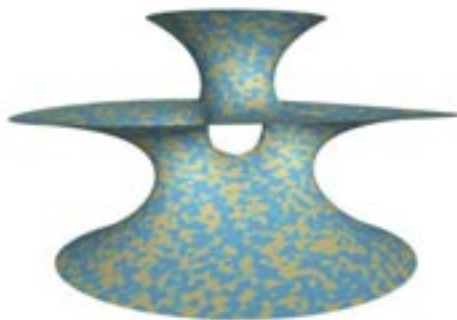


Figura 11.

Abbiamo una superficie della famiglia di deformazioni $\mathcal{M}_{2,x}$, si vede come spostando dalla posizione equatoriale la fine piatta, questa diventa catenoidale rimanendo sempre la superficie immersa.

- (b) $\mathcal{M}_{n,x}$, $x > 1$, hanno tutte tre fini di tipo catenoidale e un gruppo di simmetria generato da n piani verticali di riflessione.

In tal caso la superficie di Riemann compatta associata, è data

$$w^n = -c_x z^{n-1} (z - x)(z + x^{-1}), \quad c_x = (x + x^{-1})^{-1}.$$

Le fini catenoidali sono localizzate in $(z, w) = (x, 0)$, $(x^{-1}, 0)$ e (∞, ∞) . La mappa di Gauss e la forma dh sono tali che

$$g = \frac{\rho w}{mz + 1}, \quad dh = \frac{z(m + z^{-1})dz}{(z - x)(z + x^{-1})},$$

dove ρ e m sono costanti determinate dalle condizioni del periodo.

Osservazione 3.7.16. Quando $x = 1$, $m = 1$, le ultime due equazioni danno quelle già viste per il caso \mathcal{M}_n .

Anche per le superfici $\mathcal{M}_{n,x}$ con $x \geq 1$ esiste un teorema di unicità.

Teorema 3.7.17 (Teorema di Hoffman, Karcher [21]). Sia $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ completa minima immersa di curvatura totale finita e tre fini catenoidali. Supponiamo che \mathcal{M} abbia genere $g = n - 1$ e n piani verticali di simmetria che si intersecano in una comune linea verticale. Allora, a meno di similitudini, si ha che Φ coincide con $\mathcal{M}_{n,x}$, per un appropriato $x \geq 1$.

Nel caso di genere uno, un teorema più generale fu provato da Costa:

Teorema 3.7.18 (Teorema del toro triplo forato di Costa). *Le sole superfici minime complete immerse di genere uno e tre fini sono le superfici $\mathcal{M}_{2,x}$ con $x \geq 1$ (vedi figura 11).*

3.8. Teorema di unicità

Concludiamo questo capitolo riassumendo tutti i teoremi di esistenza ed unicità in un'unico teorema di classificazione:

Teorema 3.8.1. *Sia \mathcal{S} una superficie minima immersa di curvatura totale finita.*

- (a) *Se \mathcal{S} ha una sola fine, allora \mathcal{S} è il piano;*
- (b) *Se \mathcal{S} ha genere zero, allora questa è il piano o il catenoide (teorema della sfera forata di Lopez-Ros).*
- (c) *Se \mathcal{S} ha solo due fini, allora è il catenoide (teorema della caratterizzazione del catenoide di Schoen).*
- (d) *Se \mathcal{S} ha tre fini e un gruppo di simmetria con almeno $4n$ elementi, dove $g = n - 1$ è il genere della superficie, allora appartiene alla famiglia \mathcal{M}_n (teorema 3.7.13).*
- (e) *Se \mathcal{S} ha tre fini e genere uno, allora è una delle superfici $\mathcal{M}_{2,x}$ con $x \geq 1$ (teorema del toro triplo-forato di Costa).*
- (f) *Se \mathcal{S} ha tre fini e un gruppo di simmetria generato da n piani verticali di simmetria, allora è una delle superfici $\mathcal{M}_{n,x}$ (teorema 3.7.17).*

Conclusioni

Concludiamo il nostro lavoro facendo una breve panoramica su alcuni risultati recenti riguardanti lo studio delle superfici minime complete in \mathbb{R}^3 .

Come osservato precedentemente, grazie ai lavori di Costa, Hoffman, Meeks e Callahan, oggi abbiamo a disposizione altri e interessanti esempi di superfici minime oltre a quelli classici forniti dal piano, dal catenoide e dall'elicoide. Di alcune di queste nuove superfici minime complete immerse con curvatura totale *finita* siamo riusciti a dare una classificazione completa data dal teorema 3.8.1.

Tutte le superfici rientranti in questa classificazione, hanno inoltre *topologia finita*, cioè genere e numero di fini finito. Infatti per il teorema di Huber sono omeomorfe a superfici di Riemann compatte dalle quali siano stati rimossi un numero finito di punti. Come dimostra l'esempio dell'elicoide, tuttavia non è vero il viceversa, cioè avere topologia finita non implica avere curvatura totale finita. Infatti abbiamo osservato che l'elicoide è semplicemente connesso (ha una sola fine immersa), di genere zero ma curvatura totale infinita perché è periodico ma non è piano.

Secondo una vecchia congettura, le sole superfici minime complete immerse di topologia finita erano il piano, il catenoide e l'elicoide. Costa, Hoffman e Meeks confutarono tale congettura con la scoperta delle superfici \mathcal{M}_n (confronta §3.7).

Osserman si pose la questione *se l'elicoide e il piano fossero le sole superfici minime complete con topologia finita e una fine*. Dalla classificazione fatta in §3.8 e con l'ulteriore richiesta che la curvatura totale sia finita, sappiamo che la sola superficie con queste caratteristiche è il piano, quindi non esistono simili superfici di qualsiasi genere. Nel caso di curvatura totale infinita, recentemente Hoffman e Karcher hanno scoperto una superficie minima immersa di genere uno, con una fine e curvatura totale infinita (vedi

figura 12): *Esiste una superficie minima immersa completa He_1 di genere uno con una fine asintotica alla fine dell'elicoide. Questa superficie ha 2 linee di simmetria, una verticale coincidente con l'asse dell'elicoide, una orizzontale che interseca l'asse. Rotazioni attorno a questi assi determina il gruppo di simmetria di He_1 [7].*

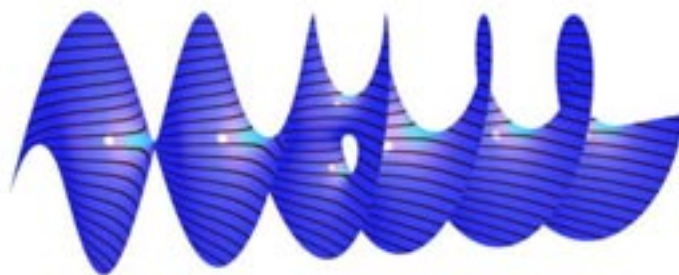


Figura 12.

In figura è rappresentata la superficie minima He_1 di Hoffman e Karcher scoperta nel 1992, di genere uno e con una fine asintotica alla fine dell'elicoide. E' formata da un elicoide con un buco. E' la sola nota superficie minima completa immersa di topologia finita ma con curvatura totale infinita oltre l'elicoide.

Non vogliamo entrare nel dettaglio della teoria riguardante la relazione tra curvatura totale finita e topologia finita, ci limitiamo soltanto ad osservare che Collins provò: *Una superficie minima immersa in \mathbb{R}^3 con topologia finita e più di una fine, ha curvatura totale finita.* Collin dedusse questo a partire dalle scoperte di Hoffman, Meeks e Rosenberg. Hoffman e Meeks dimostrarono che: *Se \mathcal{S} è una superficie minima completa immersa con topologia finita e più di una fine, allora questa ha al massimo due fini con curvatura totale infinita e tutte le altre fini sono asintotiche a piani o a catenoidi con normali parallele [8].* Fang dimostrò molto di più: *Se \mathcal{S} è una superficie minima immersa completa con topologia finita e con due fini con curvatura totale infinita, allora queste fini sono contenute in semispazi chiusi disgiunti e tutte le altre fini sono fini piatte contenute nello spazio tra i due semispazi e parallele ai bordi dei semispazi. Inoltre non esistono fini di tipo catenoidale [4].* Questo mostra che una superficie minima immersa completa con topologia finita e più di una fine, non può avere fini asintotiche all'elicoide (quindi curvatura totale infinita) perché queste fini sono contenute in un semispazio. Inoltre Meeks e Rosenberg provarono che:

Se \mathcal{S} è una superficie minima completa immersa di topologia finita e più di una fine, allora ciascuna fine di curvatura totale infinita è una fine di Nitsche (Nitsche provò che questa fine è una fine di tipo catenoidale [19]). In particolare \mathcal{S} è conforme ad una superficie di Riemann compatta meno un numero finito di punti [18]. E' sulla base di questi risultati che vale il teorema di Collins secondo il quale per superfici minime complete immerse con almeno due fini, topologia finita è equivalente a curvatura totale finita.

Ritorniamo al teorema di classificazione in §3.7. Questo ci fornisce le sole superfici minime complete immerse di curvatura totale finita che siano state completamente analizzate. Ci si pone la questione: *esistono superfici minime immerse di curvatura totale finita di qualsiasi genere?*

Nel caso di tre fini la risposta è data dalle superfici \mathcal{M}_n di Hoffman e Meeks. Considerando la procedura seguita da questi per provare l'esistenza delle \mathcal{M}_n , cioè fissare il numero delle fini, un alto grado di simmetria e studiare poi il problema del periodo della rappresentazione di Weierstrass risultante, altri hanno provato a dimostrare l'esistenza di superfici con un numero di fini maggiore di 3, come il caso della famiglia di superfici minime complete con quattro fini di Wohlgemuth e Weber-Wolf o con cinque fini di Boix. Tuttavia nessuna di queste superfici è stata completamente analizzata, di esse finora si ha solo una prova computazionale.

Come per la famiglia $\mathcal{M}_{n,x}$ con $x \geq 1$, tutti questi nuovi esempi si ottengono deformando superfici che hanno fini piatte, eccetto due, ottenendo superfici con tutte fini catenoidali. Osserviamo che tuttavia queste superfici, a differenza delle $\mathcal{M}_{n,x}$, potrebbero non essere immerse. Ciò accade perché una fine catenoidale più bassa può passare attraverso una più alta durante la deformazione.

Abbiamo i seguenti nuovi esempi

- (a) Superfici con $k = 4$ fini, due piatte centrali e due catenoidali, con $n \geq 2$ piani verticali e uno orizzontale di simmetria e genere $g = 2(n - 1)$.
- (b) Superfici che si ottengono deformando quelle sopra fino ad ottenere 4 fini catenoidali. Eventualmente queste superfici cessano di essere immerse.
- (c) Superfici come sopra, con due fini piatte e due catenoidali però con un tunnel di simmetria attraverso il cerchio gola. Queste superfici hanno

$n \geq 2$ piani verticali di simmetria e genere $g = 3(n - 1)$. Passano da una superficie con due fini piane e si deformano in una con quattro fini catenoidali. Anche queste eventualmente sono non immerse.

- (d) Superfici con 5 fini come l'esempio di Boix in cui le due fini più bassa e più alta sono catenoidali, le altre tre sono piane e genere $g = 3$.

La principale difficoltà nello studio di questi nuovi e più complessi esempi, sta proprio nella risoluzione del problema del periodo.

Nel capitolo precedente si è vista la relazione esistente tra il grado della mappa di Gauss m e il genere g di una superficie minima immersa completa con curvatura totale finita:

$$m \geq g + 1.$$

Ci si chiede: *Esiste una relazione anche tra il genere g di una superficie minima completa con curvatura totale finita e il numero k delle fini?*

Indichiamo con \mathcal{F} lo spazio di tutte le superfici minime complete immerse con curvatura totale finita, tale che il massimo valore assoluto della curvatura di Gauss \mathcal{K} sia uguale ad uno e venga assunto nell'origine. Per le supposizioni fatte, il piano non appartiene alla famiglia \mathcal{F} perché si è visto che in questo caso $\mathcal{K} = 0$.

Consideriamo il sottospazio $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}$, $i \geq 0$, $j \geq 2$, costituito da tutte le superfici di genere i e con j fini. Definiamo

$$\mathcal{F}_{g,k}^* = \bigcup_{i \leq g, j \leq k} \mathcal{F}_{i,j}.$$

Ovviamente se $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_{i,j}$ la sua curvatura totale vale $\tau(\mathcal{M}) = -4\pi(i + j - 1)$, pertanto lo spazio delle superfici con curvatura totale $-4\pi n$ è dato dall'unione finita di spazi $\mathcal{F}_{g,k}^*$. Tutte le superfici analizzate precedentemente possono essere inglobate in questa nuova terminologia:

- $\mathcal{F}_{0,k}^*$ è costituita da una sola superficie, il catenoide. (Ricordiamo che il piano non appartiene a \mathcal{F} per costruzione.)
- $\mathcal{F}_{g,2}^*$ è costituita da una sola superficie, il catenoide.
- $\mathcal{F}_{g,3}^*$ è costituito dalle superfici $\mathcal{M}_{n,x}$ e dal catenoide.
- $\mathcal{F}_{1,3}$ consiste delle superfici $\mathcal{M}_{2,x}$.

Tuttavia ancora non è chiaro quale degli spazi $\mathcal{F}_{i,j}$ sia vuoto oppure no.

Hoffman e Meek hanno ipotizzato che per una superficie minima completa immersa di curvatura totale finita

$$g \geq k - 2.$$

Gli esempi dati finora soddisfano questa disuguaglianza. Secondo una congettura ancora aperta: *lo spazio $\mathcal{F}_{g,k}$ è vuoto se $g < k - 2$.*

Appendice A

Forniamo qui alcune immagini degli esempi classici incontrati nel corso della trattazione, riassumendo le loro principali caratteristiche.



Figura a.

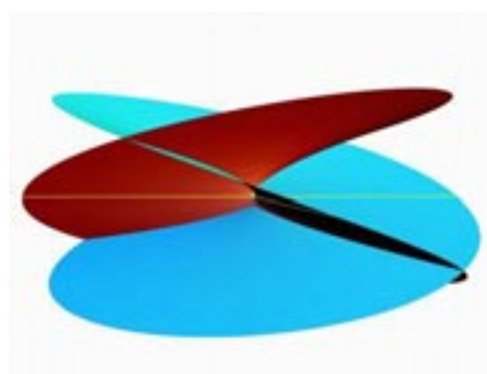


Figura b.

La superficie di Enneper

Nelle due immagini si è messo in evidenza il fatto che allungando gli estremi della “sella” (figura **a**), la superficie ha autointersezioni. Come mostra la figura **b**, da lontano sembra un piano che ricopre se stesso tre volte. La superficie minima di Enneper e il catenoide sono le più semplici superfici minime in \mathbb{R}^3 che siano complete, orientabili e non piane. Questo perché come per il catenoide la mappa di Gauss è iniettiva e la curvatura totale è uguale a -4π . Anzi si dimostra (vedi §3) che sono le sole superfici minime con queste proprietà. E' semplicemente connessa (ha una fine di molteplicità tre) e di genere zero (omeomorfa alla sfera meno un punto).

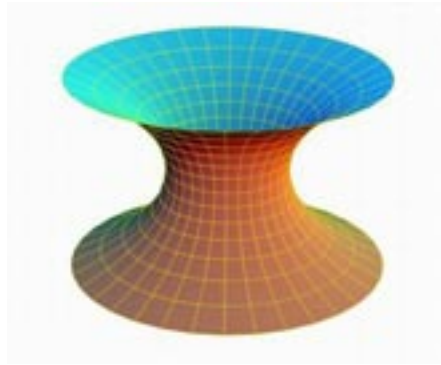


Figura c.

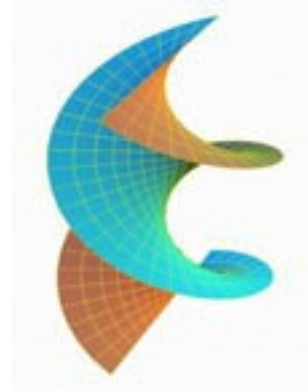


Figura d.

Il catenoide e l'elicoide

In figura **c** e **d** sono rappresentati il catenoide e l'elicoide rispettivamente. Il catenoide e l'elicoide sono i primi esempi non banali di superfici minime, scoperti nel 1776 da Meusnier. Per ben 200 anni dalla loro scoperta, insieme al piano, hanno rappresentato le sole note superfici minime complete (senza bordo) e senza autointersezioni (immerse). Oggi sappiamo che esistono infinite altre superfici con le stesse proprietà, come ad esempio la superficie minima di Costa (vedi figura **e**). Queste sono superfici particolari in quanto la maggior parte delle superfici minime o hanno autointersezioni (come la superficie di Enneper), oppure sono limitate da un contorno o addirittura hanno entrambe le proprietà. Il catenoide è inoltre la sola nota superficie minima di rotazione, oltre il piano; la sua mappa di Gauss è iniettiva e ha curvatura totale finita uguale a -4π . Essa si ottiene facendo due buchi sulla sfera e poi scambiando l'esterno con l'interno (ha topologia finita). È l'unica superficie minima immersa di genere zero e due fini. Mentre si dimostra che l'elicoide è la sola nota superficie minima di rivoluzione, oltre il piano; benché abbia topologia finita, come il catenoide si ottiene facendo un buco sulla sfera, ha curvatura totale infinita. Anche il piano si ottiene nella stessa maniera, ma ha curvatura totale nulla. Ha genere zero e una fine. Nel 1992 Hoffman provò l'esistenza di un'altra superficie minima di genere uno con una fine e topologia finita (vedi figura). Il catenoide e l'elicoide sono localmente isometriche ed è possibile trasformare l'una nell'altra mediante una famiglia continua di superfici minime localmente isometriche.

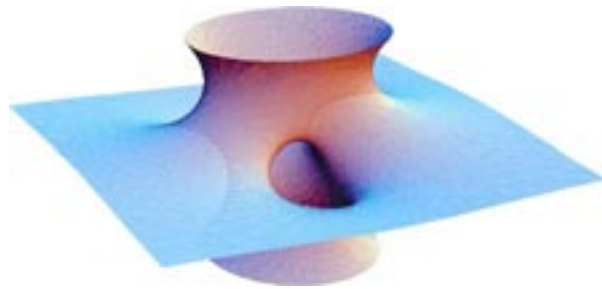


Figura e.

La superficie minima di Costa

Questa superficie venne scoperta da Costa. Fa parte di una famiglia infinita di superfici minime, le superfici \mathcal{M}_n di Hoffman e Meeks (vedi figura f). E' il primo esempio dopo il catenoide e l'elicoide di superficie minima senza autointersezioni e non limitata. Poiché la superficie di Costa ha proprietà simili a quelle del piano, dell'elicoide e del catenoide, anche questa superficie si ottiene facendo tre buchi (numero fini $k = 3$) in un toro (genere $g = 1$) e scambiando poi l'esterno con l'interno. Da una certa distanza, come mostra la figura, sembra un catenoide bucato nel suo cerchio di gola con un piano equatoriale. Costa provò che questa è l'unica superficie minima con tre fini, genere uno e curvatura totale uguale a -12π .

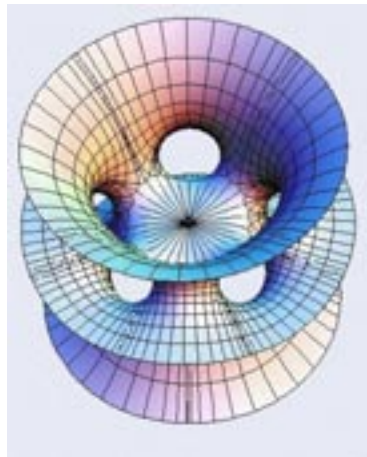


Figura f.

La superficie minima di Hoffman e Meeks

In figura è rappresentata una superficie della famiglia infinita \mathcal{M}_n di superfici minime immerse complete di curvatura totale finita di cui fa parte la superficie di Costa \mathcal{M}_2 . Sono tutte superfici con tre fini, due fini catenoidali esterne e una fine centrale piatta e di qualsiasi genere $g = n - 1$. Hanno un gruppo di simmetria costituito da $4(n)$ elementi e curvatura totale uguale a $-4\pi(n + 1)$. Ammettono una rappresentazione di Weierstrass $g = \rho w, \quad dh = dz/[(z - 1)(z + 1)]$ con $(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2$.

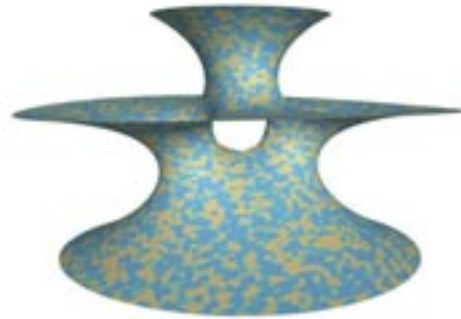


Figura g.

La superficie $\mathcal{M}_{n,x}$

In figura abbiamo la superficie $\mathcal{M}_{2,x}$ che si ottiene deformando la superficie minima di Costa. Fa parte di una famiglia infinita di superfici minime immerse complete con curvatura totale finita $\mathcal{M}_{n,x}$ costituite da tre fini catenoidali e di qualsiasi genere $g = n - 1$ che si ottengono deformando le superfici \mathcal{M}_n spostando la fine centrale piatta che ora diventa catenoidale. Hanno un gruppo di simmetria generato da n piani verticali di simmetria.

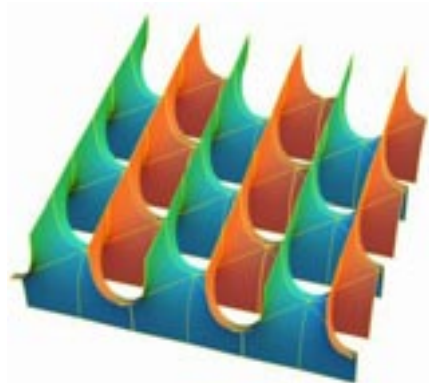


Figura h.

La superficie minima di Scherk

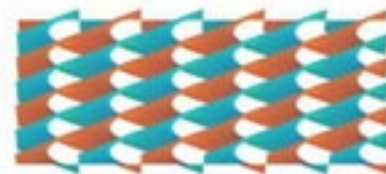


Figura i.

Questo è il più vecchio e classico esempio di superficie minima completa, immersa con due periodicità e come tutte le superfici periodiche ha curvatura totale infinita. Si può considerare come due famiglie di semipiani ugualmente distanziati, paralleli, verticali che si incontrano ortogonalmente. Queste famiglie di semipiani suddividono il piano orizzontale come una scacchiera e nei quadrati neri (o bianchi) di questa, la superficie ha la forma di una sella (figura **h**). A destra (figura **i**) abbiamo una variazione in cui le famiglie dei semipiani si incontrano formando un angolo che varia da zero e $\pi/2$. In questo caso la sella si forma su regioni alternate del piano suddiviso, questa volta, a rombi. Al limite, quando l'angolo tende a zero, si può vedere l'elicoide.

Appendice B

Diamo ora altri esempi di superfici minime in \mathbb{R}^3 . Alcuni di questi sono non completi, altri hanno autointersezioni, altri ancora sono periodici o non sono orientabili e per questo non sono stati inclusi nella nostra trattazione.

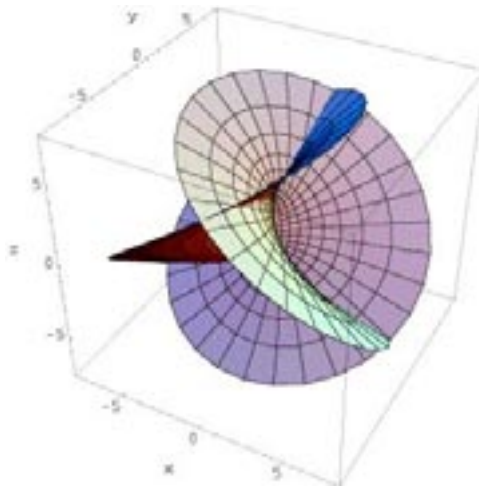


Figura 1.

La superficie di Henneberg

Tale superficie è non orientabile, non è completa e con curvatura totale uguale a -2π . Ammette una parametrizzazione del tipo

$$\begin{aligned}x(u_1, u_2) &= 2 \sinh u_1 \cos u_2 - \frac{2}{3} \sinh(3u_1) \cos(3u_2) \\y(u_1, u_2) &= 2 \sinh u_1 \sin u_2 - \frac{2}{3} \sinh(3u_1) \sin(3u_2) \\z(u_1, u_2) &= 2 \cosh(2u_1) \cos(2u_2).\end{aligned}$$

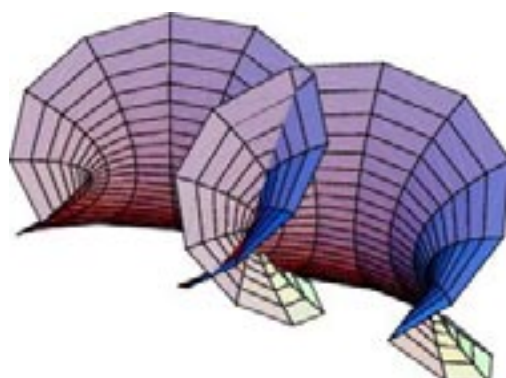


Figura m.

La superficie minima di Catalan

Si vede facilmente che una superficie non immersa ha autointersezioni, ammette una parametrizzazione

$$\begin{aligned} x(u_1, u_2) &= u_1 - \sin u_1 \cosh u_2 \\ y(u_1, u_2) &= 1 - \cos u_1 \cosh u_2 \\ z(u_1, u_2) &= 4 \sin\left(\frac{1}{2}u_1\right) \sinh\left(\frac{1}{2}u_2\right). \end{aligned}$$

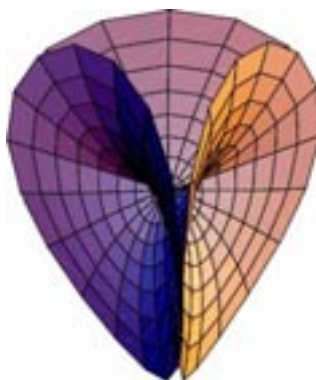


Figura n.

La superficie minima di Maeder

Questa ammette una parametrizzazione del tipo:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta - \frac{1}{2}r^2 \cos(2\vartheta) \\ y &= -r \sin \vartheta + \frac{1}{2}r^2 \sin(2\vartheta) \\ z &= \frac{4}{3}r^{3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\vartheta\right). \end{aligned}$$

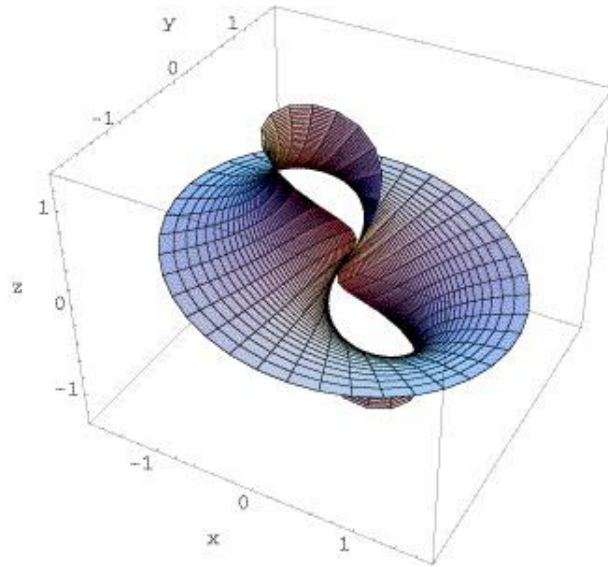


Figura o.

La superficie di Richmond

Ammette una parametrizzazione del tipo

$$\begin{aligned}
 x(u_1, u_2) &= \frac{-3u_1 - u_1^5 + 2u_1^3u_2^2 + 3u_1u_2^4}{6(u_1^2 + u_2^2)} \\
 y(u_1, u_2) &= \frac{-3u_2 - 3u_1^4u_2 - 2u_1^2u_2^3 + u_2^5}{6(u_1^2 + u_2^2)} \\
 z(u_1, u_2) &= u_1.
 \end{aligned}$$

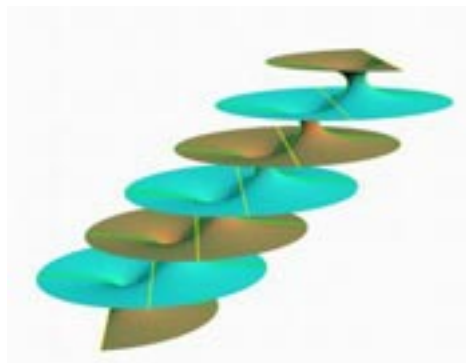


Figura p.

La superficie minima di Riemann

E' una superficie minima periodica le cui intersezioni con piani orizzontali sono cerchi. E' una superficie minima completa senza autointersezioni con topologia infinita.

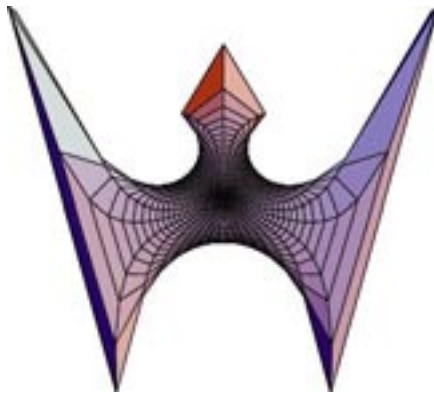


Figura q.
Il trinoide

E' una superficie minima scoperta da Jorge e Meeks nel 1983. Ammette una parametrizzazione di Weierstrass del tipo

$$f = \frac{1}{(\xi^3 - 1)} \quad g = \xi^2.$$

Bibliografia

- [1] Lars V. Ahlfors, Leo Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press 1960.
- [2] C. Costa, *Uniqueness of minimal surfaces embedded in \mathbb{R}^3 with total curvature 12π* , J. Differ. Geom. **30** (1989), 597-618.
- [3] M. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [4] Y. Fang, W.H. Meeks, *Some global properties of complete minimal surfaces of finite topology in \mathbb{R}^3* , Topology **30** (1991), 9-20.
- [5] A.T. Fomenko, A.A. Tuzhilin, *Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-Dimensional Space*, American Mathematical Society 1991.
- [6] Greene Robert E., Krantz Steven G., *Function Theory of One Complex Variable*, John Wiley & Sons, Inc. 1997.
- [7] D. Hoffman, H. Karcher, F. Wei, *The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery*, in "Global Analysis and Modern Mathematics" Perish Press 1993, 119-170.
- [8] D. Hoffman, W.H. Meeks, *The asymptotic behavior of properly embedded minimal surfaces of finite topology*, J. Am. Math. **2** (1989), 667-682.
- [9] D. Hoffman, W.H. Meeks, *Embedded minimal surfaces of finite topology*, Ann. Math.Ser. **131** (1990), 1-34.
- [10] D. Hoffman, W.H. Meeks, *Les surfaces minimales: la caténoïde par les deux bouts*, Quadrature **5** (1990), 31-47.
- [11] D. Hoffman, W.H. Meeks, *Limits of minimal surfaces and Scherk's Fifth Surface*, Arch. Ration. Mech. Anal. **111** (1990), 181-195.
- [12] D. Hoffman, W.H. Meeks, *One-parameter families of embedded complete minimal surfaces of finite topology*, preprint.

-
- [13] D. Hoffman, W.H. Meeks, *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*, Invent. Math. **101** (1990), 373-377.
- [14] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Hel. **32** (1957), 13-72.
- [15] L. Jorgeand, W.H. Meeks, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology **22** (1983), 203-221.
- [16] F. J. Lopez, F. Martin, *Complete minimal surface in \mathbb{R}^3* , Publication Mathematiques **43** (1999), 341-449.
- [17] F. J. Lopez, A. Ros, *On embedded complete minimal surfaces of genus zero*, J. Differ. Geom. **33** (1991), 293-300.
- [18] W.H. Meeks, H. Rosenberg, *The geometry and conformal structure of properly embedded minimal surfaces of finite topology in \mathbb{R}^3* , Invent. Math. **114** (1993), 625-639.
- [19] J.C.C. Nitsche, *A characterization of the catenoid*, J. Math. Mech. **11** (1962), 293-301.
- [20] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Vol. 1, Cambridge Uni. Press 1989.
- [21] R. Osserman, *Geometry V*, Encyclopaedia of Math. Sci. **90**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1997), 5-93.
- [22] J. Perez, A. Ros, *Some uniqueness and nonexistence theorems for embedded minimal surfaces*, preprint.
- [23] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1966.
- [24] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri 1989.
- [25] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differ. Geom. **18** (1983), 791-809.

