

Matasse Razionali
e
Frazioni Continue

Federico Cipolletta

Ringraziamenti

Innanzitutto vorrei ringraziare il professor Piergallini, che è stato sempre disponibilissimo, anche nei giorni di festa, con la pioggia o con il vento, chi è che bussa a sto convento.

A parte gli scherzi devo davvero molto al professore, perchè è grazie a lui se ho capito un pò come funziona un lavoro del genere e se ho imparato (forse) a scrivere un pò in italiano.

Devo poi ringraziare il professor Spiro, che nonostante fossi alle strette con i tempi burocratici si è rivelato anche lui molto disponibile.

Come posso poi dimenticare delle discussioni fuori matematica con Andrea, che mi ha suggerito molte cose sia riguardo il Latex, sia riguardo aspetti tecnici-topologici?

Passiamo poi a tutti i ringraziamenti per il sostegno morale. In primo luogo alla mia famiglia (ovviamente non in ordine di importanza, dato che non ne saprei stabilire uno): mamma, papà, nonno e nonna, perchè è solo grazie a loro se ho avuto l'enorme opportunità di poter frequentare l'università.

Un grazie speciale va a Chiara, mia sorella, che è sempre due anni avanti a me e quindi mi prepara psicologicamente a ciò che mi aspetta di volta in volta. Inoltre mi è sempre stata vicina nei momenti di crisi (che sono stati a pensarci bene molti, forse anche troppi).

Ringrazio anche Marta e Fede, perchè grazie a loro spessissimo ho fatto tardi la sera e il giorno dopo non ho potuto studiare, ma soprattutto perchè sono le mie due migliori amiche, sempre presenti nei momenti belli e brutti.

Un altro grandissimo sostegno morale è stato Lollo che, tra le altre cose, si laurea esattamente il mio stesso giorno a Bologna, quindi abbiamo vissuto quest'esperienza di pari passo e perciò, oltre che dire un grazie grandissimo gli devo anche fare i complimenti.

Devo davvero molto anche a tutti i miei compagni di scalate, che mi hanno saputo aiutare a modo loro, non facendomi pensare alle stupidate, ma insegnandomi a differenziare il tempo e facendomi concentrare sempre sul lavoro, ovviamente dopo scalate mozzafiato. Un grazie particolare a Maurizio, che non è solo un compagno di scalata, ma anche un maestro di vita, da cui continuo ad imparare molto.

Ringrazio poi tutti (ma proprio tutti, nessuno escluso) gli amici di Camerino, con cui giornalmente dividiamo gioie e dolori (più i secondi), soddisfazioni e frustrazioni (più le seconde), ilarità immotivate e pazzie momentanee. Non li nomino tutti, perchè se no non finisco mai.

Un grazie particolare anche ad Alessandra e Sandra, che si laureano anche loro il mio stesso giorno, per i loro unmiliardoottocentonovantanove modi di aiutarmi quando rimango incastrato nella mia incapacità nel badare a me stesso.

Un ultimo, ma non per importanza, grazie va a Giulia e Giada, perchè sono il pretesto e il mezzo per scappare qualche volta da Camerino verso Matelica, senza alcun motivo particolare, ma giusto per cambiare.

Non smetterò mai di ringraziare tutte le persone, cose, entità che mi sono state vicino, a cui devo anche chiedere scusa perchè a causa di questo lavoro non sono stato molto presente negli ultimi tempi, in particolare al mio cagnolone Exel.

Indice

1	Nozioni algebriche	5
1.1	Gruppi e azioni	5
1.1.1	Definizioni iniziali	5
1.1.2	Gruppi liberi	8
1.1.3	Generatori e relazioni	8
1.1.4	Azione di un gruppo	9
1.2	Frazioni continue	11
1.2.1	Introduzione e cenni storici	11
1.2.2	Frazioni continue e numeri razionali	12
2	Nozioni topologiche	15
2.1	Nodi e link	15
2.1.1	Cenni storici	15
2.1.2	Nodi, link e movimenti Reidemeister	16
2.2	Matasse	18
2.2.1	Matasse razionali	19
2.2.2	Operazioni sulle matasse	19
3	Classificazione delle matasse razionali	22
3.1	Introduzione	22
3.2	$\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$	22
3.2.1	Azione di $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sui razionali	23
3.3	Gruppo di movimenti Λ	26
3.3.1	Movimenti di matasse razionali	26
3.3.2	Λ e relativa azione su \mathcal{R}	27
3.4	Biiezione tra i razionali e \mathcal{R}	29
3.4.1	Colorazione di matasse	31
3.5	Isomorfismo tra $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ e Λ	36
	Bibliografia	39

Introduzione

Nella tesi tratteremo la classificazione di matasse razionali, che sono oggetti puramente topologici, tramite le frazioni continue. In effetti risulta curioso questo legame tra due concetti apparentemente separati ed indipendenti.

Tutto il discorso verrà diviso in tre sezioni.

Nella prima si introdurranno i concetti algebrici che serviranno per lo sviluppo del ragionamento. Quindi si partirà dai gruppi, con le rispettive definizioni basilari, fino ad arrivare al *primo teorema di isomorfismo*. Verranno poi introdotti i gruppi liberi e da questo si spiegherà come si può arrivare ad una *presentazione di un gruppo*. Si passerà poi ad esporre il concetto di azione di un gruppo con i relativi risultati che ci saranno utili in seguito. Infine verranno definite le frazioni continue e si vedrà come si possono rappresentare i numeri razionali sotto forma di un'unica frazione continua.

Nella seconda sezione invece verranno introdotte le nozioni topologiche più importanti per lo scopo ultimo. Quindi dopo una breve introduzione sui nodi, link e sul concetto di isotopia, passeremo a parlare di matasse, che definiremo dapprima in via generale, per poi restringerci al caso di matasse razionali, che sono l'oggetto principale del discorso. In questa sezione introdurremo anche alcune delle possibili operazioni sulle matasse e si mostrerà un approccio diverso al problema (Cf. [3]).

Nell'ultima sezione invece si incentrerà il discorso sugli aspetti più tecnici per raggiungere l'obiettivo ultimo della tesi. Inizieremo con la definizione di $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, gruppo che faremo agire sui numeri razionali. Parallelamente a questo costruiremo un gruppo modulare dei movimenti applicabili alle matasse razionali, che denoteremo con Λ . Passeremo in seguito alla definizione di una funzione tra i numeri razionali e le matasse razionali, tramite l'uso delle frazioni continue. A questo punto si mostrerà l'invertibilità di questa funzione, tramite l'uso di un procedimento ripreso da Kauffman (Cf. [3]), denominato *colorazione delle matasse*, ottenendo in questo modo la classificazione cercata. Nell'ultima parte infine si arriverà a mostrare l'isomorfismo tra $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ e Λ , derivandolo dal risultato precedente.

Capitolo 1

Nozioni algebriche

1.1 Gruppi e azioni

1.1.1 Definizioni iniziali

Innanzitutto dobbiamo definire alcuni concetti generali algebrici, che ci serviranno poi in seguito per raggiungere il nostro obiettivo. Cominciamo dando la definizione di gruppo e sottogruppo.

Definizione 1.1. *Un gruppo è un insieme G con un'operazione binaria $*$: $G \times G \rightarrow G$, tale che:*

- (a) $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3), \forall g_1, g_2, g_3 \in G$ (proprietà associativa);
- (b) $\exists 1_G \in G$, tale che $g * 1_G = 1_G * g = g, \forall g \in G$ (elemento neutro);
- (c) $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$, tale che $g * g^{-1} = g^{-1} * g = 1_G$ (elemento inverso).

Un gruppo è *abeliano* se: $g_1 * g_2 = g_2 * g_1, \forall g_1, g_2 \in G$ (proprietà commutativa).

Definizione 1.2. *Dato G gruppo, un suo sottoinsieme $S \subseteq G$, si dice sottogruppo di G e si indica con $S < G$, se esso è chiuso rispetto all'operazione di G , contiene l'elemento neutro e contiene tutti gli inversi dei suoi elementi.*

In particolare, dato G un gruppo ed un sottoinsieme $S \subset G$, si chiama *sottogruppo generato da S* il più piccolo sottogruppo di G che contiene S e si scrive:

$$\langle S \rangle < G .$$

Esempi:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano e gli interi pari costituiscono un suo sottogruppo, cioè $(2\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Z}, +)$;
2. $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, *)$ è un gruppo abeliano e i razionali non nulli sono un suo sottogruppo, cioè $(\mathbb{Q}^*, *) < (\mathbb{R}^*, *)$;

3. $GL(n, \mathbb{R})$, che è l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili, cioè con determinante non nullo, a coefficienti reali, con il prodotto riga per colonna forma un gruppo non abeliano (*gruppo generale lineare*). Inoltre, denominato con T l'insieme delle matrici 2×2 , triangolari superiori e invertibili a coefficienti reali, si ha che $T < GL(n, \mathbb{R})$.

Considerando un gruppo G ed un suo sottogruppo H , possiamo definire le *classi laterali sinistre*, come insiemi del tipo:

$$aH = \{a * h \mid h \in H\} .$$

Definiamo la relazione di *congruenza modulo H* , $a \equiv_H b$ se $b = a * h$ per qualche $h \in H$ (cioè se $b \in aH$). Si nota facilmente che tale relazione è di equivalenza e quindi le classi laterali sinistre di un sottogruppo costituiscono una partizione del gruppo stesso.

Analogamente si possono definire le *classi laterali destre*, come insiemi del tipo:

$$Ha = \{h * a \mid h \in H\} .$$

Le classi laterali destre soddisfano proprietà analoghe alle sinistre, ma non coincidono necessariamente con queste altre.

Definizione 1.3. *Un sottogruppo N di un gruppo dato G , si dice sottogruppo normale, scrivendo $N \triangleleft G$, se per ogni $a \in N$ e per ogni $b \in G$, il coniugato $b * a * b^{-1}$ appartiene ad N .*

Proposizione 1.4. *Un sottogruppo H di un dato gruppo G è normale se e solo se ogni classe laterale sinistra è anche una classe laterale destra. In questo caso $aH = Ha$ per ogni $a \in G$.*

Dimostrazione. Cf. [7, pag. 70, proposizione 6.18] □

Consideriamo ora un sottogruppo normale $N \triangleleft G$, e date due sue classi laterali aN , bN (per quanto detto è indifferente se destre o sinistre) si può osservare che il loro prodotto è:

$$(aN) * (bN) = (a * b)N$$

cioè esso è ancora una classe laterale e più precisamente è quella classe che ha per rappresentante il prodotto dei rappresentanti (Cf. [7, pag. 76, lemma 10.1]).

Definizione 1.5. *Dato $H < G$, l'insieme quoziente, denotato con G/H , è l'insieme di tutte le classi laterali sinistre di H in G .*

Se $N \triangleleft G$ allora G/N è un gruppo con il prodotto definito sopra.

Denotiamo in genere anche con $\tilde{a} = aN$ e indichiamo con $\pi : G \rightarrow G/N$ la proiezione che manda l'elemento a nella rispettiva classe \tilde{a} .

Definizione 1.6. *Dati $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ due gruppi, un omomorfismo da G_1 a G_2 è un'applicazione $\phi : G_1 \rightarrow G_2$, tale che*

$$\phi(a *_1 b) = \phi(a) *_2 \phi(b), \forall a, b \in G_1 .$$

*Se in particolare l'applicazione ϕ è biunivoca essa si dice **isomorfismo**, e i gruppi G_1 e G_2 si dicono **isomorfi**.*

Un omomorfismo di gruppi $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ porta l'elemento neutro nell'elemento neutro e gli inversi negli inversi. In altre parole, $\phi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$ e $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$.

Esempi:

Le seguenti funzioni sono omomorfismi:

1. L'inclusione $i : H \rightarrow G$, ove $H < G$, definita da $i(x) = x, \forall x \in H$;
2. La funzione determinante, $\det : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$.

Dato un omomorfismo $\phi : G_1 \rightarrow G_2$, si definiscono:

Immagine di ϕ : $\text{im}(\phi) = \{x \in G_2 \mid x = \phi(a) \text{ per qualche } a \in G_1\}$;

Nucleo di ϕ : $\text{ker}(\phi) = \{a \in G_1 \mid \phi(a) = 1_{G_2}\} = \phi^{-1}(1_{G_2})$;

$\text{ker}(\phi)$ è un sottogruppo di G_1 , poichè se $a, b \in \text{ker}(\phi)$, si ha che $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b) = 1_{G_2} * 1_{G_2} = 1_{G_2}$ e quindi $a * b \in \text{ker}(\phi)$.

Analogamente $\text{im}(\phi) < G_2$.

Esempi di immagini:

1. Per l'inclusione i di un sottogruppo $H < G$, si ha $\text{im}(i) = H$;
2. Per la funzione $\det : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$, si ha $\text{im}(\det) = \text{codominio dell'applicazione}$.

Esempi di nuclei:

1. Per l'inclusione i di un sottogruppo $H < G$, si ha $\text{ker}(i) = \{1_{G_1}\}$;
2. Per la funzione $\det : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$, si ha $\text{ker}(\det) = \text{il sottogruppo delle matrici e determinante } 1 \equiv \text{SL}(n, \mathbb{R})$.

Il nucleo di un omomorfismo è sempre un sottogruppo normale al secondo gruppo, infatti: se $a \in \text{ker}(\phi)$ e $b \in G_1$, si ha che

$$\begin{aligned} \phi(b * a * b^{-1}) &= \phi(b) * \phi(a) * \phi(b^{-1}) = \phi(b) * 1_{G_2} * \phi(b)^{-1} = 1_{G_2} \\ &\implies b * a * b^{-1} \in \text{ker}(\phi) . \end{aligned}$$

Per esempio, conseguentemente a quanto detto si ha che $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ è un sottogruppo normale di $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, in quanto nucleo dell'omomorfismo \det (questo rifacendoci agli esempi fatti in precedenza).

Possiamo collegare ora la costruzione di gruppo quoziente con il concetto di omomorfismo grazie al seguente teorema:

Teorema 1.7 (primo teorema di isomorfismo). *Sia $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ un omomorfismo suriettivo di gruppi e sia $\text{ker}(\phi) = N$. Allora G_1/N è isomorfo a G_2 mediante l'applicazione $\tilde{\phi} : G_1/N \rightarrow G_2$ così definita:*

$$\tilde{\phi}(\tilde{a}) = \phi(a), \forall \tilde{a} \in G_1/N .$$

Dimostrazione. Cf. [7, pag.81, teorema 10.9] □

Proposizione 1.8 (proprietà di rappresentazione dell'insieme quoziente). *Dato un sottogruppo normale N di G , consideriamo G/N e denotiamo con π la proiezione canonica $: G \rightarrow G/N$, definita da $\pi(a) = \tilde{a} = aN$. Sia $\phi : G \rightarrow H$, un omomorfismo il cui nucleo contenga N . Allora esiste un unico omomorfismo $\tilde{\phi} : G/N \rightarrow H$ tale che $\tilde{\phi} \circ \pi = \phi$. Tale applicazione è definita da: $\tilde{\phi}(\tilde{a}) = \phi(a)$.*

Dimostrazione. Cf. [7, pag. 263, proposizione 8.4] □

1.1.2 Gruppi liberi

Consideriamo per cominciare un insieme arbitrario di simboli, cioè $S = \{a, b, c, \dots\}$, che può essere finito o infinito, e definiamo una *parola* come una successione finita di simboli di S , in cui sono ammesse ripetizioni.

Sull'insieme W di tutte le parole si considera l'operazione binaria di giustapposizione:

$$aa, ba \mapsto aaba .$$

Tale operazione è associativa e si ha come elemento neutro la parola vuota. Se poi consideriamo l'insieme \tilde{S} , costituito dai simboli di S e da tutti i rispettivi inversi, denotiamo con \tilde{W} di tutte le parole con simboli in \tilde{S} . In tale insieme se in una parola compare la sequenza $\dots xx^{-1} \dots$ o $\dots x^{-1}x \dots$, si può cancellare x e x^{-1} . Una parola si dice *ridotta* se non è possibile fare cancellazioni su di essa. Nonostante la cancellazione si possa attuare in differenti maniere (a seconda dell'ordine di cancellazione) vale la seguente importante proposizione (Cf. [7, pag. 259, proposizione 7.2]):

Proposizione 1.9. *Esiste un'unica forma ridotta di una parola assegnata w .*

Per questa ragione si può definire una relazione di equivalenza tra le parole in \tilde{W} , e cioè due parole w_1 e w_2 si dicono equivalenti, e si scrive $w_1 \sim w_2$, se esse hanno la stessa forma ridotta.

Inoltre si può dimostrare che le classi di equivalenza di parole possono essere moltiplicate tra loro semplicemente componendo i rispettivi rappresentanti.

In tal modo si può dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 1.10. *Denotato con F l'insieme delle classi di equivalenza delle parole in \tilde{W} , si ha che F è un gruppo rispetto all'operazione di composizione indotta da \tilde{W} .*

Dimostrazione. Cf. [7, pag. 260, proposizione 7.4] □

Definizione 1.11. *Il gruppo F delle classi di equivalenza di parole su \tilde{S} si dice **gruppo libero** sull'insieme S .*

Esempio:

Il gruppo libero sull'insieme $S = \{a\}$, formato da un solo elemento coincide con l'insieme di tutte le possibili potenze di a , cioè $F = \{a^n\}$ ed è un gruppo ciclico di ordine infinito.

1.1.3 Generatori e relazioni

Sostanzialmente si ha un gruppo libero, quando esso è generato da un insieme libero di generatori, nel senso che essi non soddisfano altre proprietà diverse da quelle degli assiomi di gruppo.

Consideriamo ora invece il caso in cui esistono alcune relazioni non banali tra i generatori.

Di fondamentale importanza risulta essere la *proprietà di rappresentazione del gruppo libero*, che ora enunceremo.

Proposizione 1.12 (proprietà di rappresentazione del gruppo libero). *Sia F il gruppo libero su un insieme $S = \{a, b, c, \dots\}$, e sia G un gruppo. Ogni applicazione $f : S \rightarrow G$ si estende in modo unico ad un omomorfismo di gruppi*

$\phi : F \rightarrow G$. Se denotiamo $f(x) = \tilde{x}$, ove $x \in S$, allora ϕ manda una parola di \tilde{S} nel corrispondente prodotto di elementi in G .

Dimostrazione. Cf. [7, pag. 261, proposizione 8.1] □

Se S genera G , cioè $G = \langle S \rangle$, gli elementi di S si dicono *generatori*. In tal caso, indicando con F il gruppo libero generato da S , per la proposizione 1.12 esiste un omomorfismo suriettivo $\phi : F \rightarrow G$ che estende l'inclusione di S in G . Per il teorema 1.7, si ha che $F/\ker(\phi)$ è isomorfo a G . Gli elementi di $\ker(\phi)$ si dicono *relazioni* tra i generatori. Essi sono classi di equivalenza di parole w con la proprietà che il prodotto corrispondente in G mediante ϕ è 1_G , cioè:

$$\phi(w) = 1_G \text{ o } w = 1_G .$$

In particolare se $\ker(\phi) = \{1\}$ si ha che ϕ stesso è un isomorfismo, e perciò anche G sarà chiamato gruppo libero.

Diremo che un insieme di relazioni $R = r_1, r_2, \dots$ è un *insieme di relazioni che definiscono G* se $R \subset \ker(\phi)$ e $\ker(\phi)$ è il più piccolo sottogruppo normale contenente R . Questo vuol dire che $\ker(\phi)$ è generato dal sottoinsieme costituito da tutte le parole di R e dalle loro coniugate.

Useremo la notazione:

$$\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$$

per indicare il gruppo libero generato dagli elementi x_1, \dots, x_m , quozientato con il sottogruppo normale generato dalle relazioni r_1, \dots, r_n . Una tale scrittura è detta *presentazione* del gruppo (Cf. [8, pag. 203]): $G \cong \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$, con generatori x_1, \dots, x_m e relazioni r_1, \dots, r_n .

Vale il seguente risultato:

Proposizione 1.13. *Sia $G \cong \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ e sia H un gruppo. Ogni applicazione $f : \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow H$ tale che tutti i prodotti in H corrispondenti alle relazioni r_1, \dots, r_n danno 1_H , ammette un'unica estensione ad omomorfismo $\phi : G \rightarrow H$.*

1.1.4 Azione di un gruppo

Definizione 1.14. *Dato un gruppo G e un insieme S , un'azione di G su S è un'applicazione $: G \times S \rightarrow S$, usualmente indicata come composizione:*

$$(g, s) \mapsto gs \in S,$$

che soddisfi le seguenti due proprietà:

- (a) $1s = s$, per ogni $s \in S$ (ove $1 \equiv 1_G$);
- (b) $(g_1 * g_2)s = g_1(g_2s)$, per ogni $g_1, g_2 \in G$ e $s \in S$.

Un insieme S , con un'azione di G , viene spesso chiamato un *G -insieme*, mentre un'azione come quella definita viene detta un'azione **a sinistra**, per come si effettua la moltiplicazione per gli elementi di G .

Il motivo per cui tale applicazione è detta azione, risiede nel fatto che se fissiamo $g \in G$ e facciamo variare s in S , la moltiplicazione a sinistra per g definisce un'applicazione di S in se stesso, che possiamo denotare con $m_g : S \rightarrow S$, definita da $m_g(s) = gs$ ed una tale applicazione descrive il modo in cui l'elemento g del gruppo opera sull'insieme S .

Quindi un modo equivalente per definire un'azione è quello di chiamare azione un'applicazione $\Phi : G \rightarrow \Sigma S$ (ovvero le permutazioni su S) che associa a $g \mapsto m_g$ e tale che essa sia un omomorfismo (il che vuol dire che deve rispettare le proprietà (a) e (b)).

Un'azione si dice *fedele* se $\ker(\Phi) = \{1_G\}$. Questa condizione, applicando il teorema 1.10, considerando $G_1 = G$, $N = \ker(\Phi)$, implica che:

$$G \cong \Phi(G) \subset \Sigma S$$

cioè a meno di isomorfismi possiamo pensare $G < \Sigma S$.

Il concetto di più rilevante importanza per lo studio di un insieme S su cui agisce un gruppo G , è quello di decomporre S in **orbite**. In particolare dato $s \in S$, la sua orbita è l'insieme:

$$O_s = \{w \in S \mid w = gs \text{ per qualche } g \in G\} .$$

Le orbite relative all'azione di un gruppo sono classi di equivalenza rispetto alla relazione:

$$s_1 \sim s_2 , \text{ se } s_2 = gs_1 \text{ per qualche } g \in G .$$

Per tale ragione le orbite formano una partizione di S .

In particolare se S consiste in una sola orbita, si dice che G agisce *transitivamente* su S , il che significa che ogni elemento di S viene portato in un qualsiasi altro elemento di S .

Invece definiamo lo *stabilizzatore* di $s \in S$, come il sottogruppo $G_s < G$ degli elementi che lasciano fisso s , cioè:

$$G_s = \{g \in G \mid gs = s\} .$$

Un risultato importante, a proposito di stabilizzatori ed orbite, che ci sarà molto utile è la seguente proposizione:

Proposizione 1.15. *Sia S un G -insieme e sia s un elemento di S . Sia H lo stabilizzatore di s e sia O_s l'orbita di s . Allora esiste un'applicazione biettiva naturale:*

$$\phi : G/H \rightarrow O_s$$

definita da:

$$aH \mapsto as .$$

Tale applicazione è compatibile con l'azione di G , nel senso che $\phi(gC) = g\phi(C)$, per ogni C classe laterale e per ogni $g \in G$.

Dimostrazione. Cf. [7, pag. 213, proposizione 6.4] □

1.2 Frazioni continue

1.2.1 Introduzione e cenni storici

Innanzitutto abbiamo bisogno di definire il concetto di frazione continua generalizzata:

Definizione 1.16. Una frazione continua generalizzata è un'espressione del tipo:

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{\dots}}}}$$

ove per $n > 0$ gli $a_n \in \mathbb{C}$ sono detti **numeratori parziali**, gli $b_n \in \mathbb{C}$ **denominatori parziali**, il primo termine b_0 si dice **parte intera** della frazione continua.

Osserviamo che dopo tale definizione bisogna distinguere due casi, cioè quello *finito* e quello *infinito*. In effetti le frazioni continue nacquero per poter avere una rappresentazione formale dei numeri reali (in particolare degli irrazionali); infatti all'inizio servivano come approssimazione di numeri irrazionali (tramite frazioni continue finite).

Il primo utilizzo conosciuto delle frazioni continue si ha con R. Bombelli (nel 1572) che fornì un'espressione approssimata per $\sqrt{13} (\simeq 3.60555)$, cioè

$$3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = 3.6 .$$

Quest'approssimazione deriva dalla formula

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}$$

Nel 1625 D.Schwenter cominciò a considerare frazioni continue finite e regolari (il che, come definiremo a breve, vuol dire con denominatori parziali uguali a 1 e con denominatori parziali interi) come approssimazioni per esprimere frazioni di grandi numeri, in termini di frazioni che coinvolgono numeri più piccoli. Ad esempio ottenne

$$\frac{177}{233} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}}$$

La prima espansione in frazione continua infinita è dovuta invece a Lord W. Brouncker (che fu il primo presidente della Royal Society di Londra), che intorno al 1659 fornì questa espressione

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \dots + \frac{(2n-1)^2}{2 + \dots}}}}$$

senza darne dimostrazione, ma deducendola probabilmente dalla formula in infiniti prodotti per $\frac{\pi}{2}$ dovuta a J. Wallis (cioè $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$).

Nonostante questi risultati, chi veramente diede uno sviluppo sistematico alle frazioni continue fu Eulero, durante l'inizio del 1737 e nel suo lavoro divenne chiara una loro possibile applicazione sia nella teoria dei numeri sia nell'analisi.

Nel 1770 Johann Heinrich Lambert pubblicò un lavoro in cui diede una sistemazione organica alle ricerche sulle frazioni continue fatte sino ad allora. Nello stesso anno Lagrange dimostrò che una frazione continua periodica è la radice di un'equazione di secondo grado e viceversa, un irrazionale quadratico (radice di un'equazione di secondo grado a coefficienti interi, in cui il discriminante non sia un quadrato perfetto) è esprimibile sotto forma di frazione continua periodica.

Molti altri in seguito furono i ricercatori e gli studiosi che si occuparono di frazioni continue e particolarmente notevoli furono i lavori di Gauss e Jacobi.

Per quanto riguarda le loro applicazioni odierne, le frazioni continue sono molto usate nella computazione, infatti forniscono rappresentazioni di funzioni trascendentali valide in maniera più generale rispetto alle serie di potenze, nella teoria dei controlli, per stabilire se un dato polinomio è stabile o meno, o nella matematica applicata, ove spesso non si hanno risultati precisi ma serie asintotiche che possono a loro volta essere espresse in forma di frazioni continue per poi venir valutate in determinati punti.

Un'altra e non meno importante applicazione delle frazioni continue si ha nella topologia e in particolare nella teoria dei nodi, come vedremo a breve, per quanto riguarda la classificazione delle matasse razionali.

Il discorso che ci interessa maggiormente, concernente quest'ultima applicazione riguarda l'utilizzo di frazioni continue per la rappresentazione dei numeri razionali.

1.2.2 Frazioni continue e numeri razionali

Definizione 1.17. Una frazione continua si dice semplice o regolare se è della forma:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \dots}}} ,$$

ove $a_1 \in \mathbb{Z}$ e per $i \geq 1$, $a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Risulta molto importante notare che ogni numero razionale si può scrivere in forma di frazione continua semplice finita, cioè:

Proposizione 1.18. Dato $\frac{a}{b}$ un qualunque numero razionale esistono $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, con n pari o dispari, tali che $\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Dimostrazione. Tale rappresentazione si ottiene dal classico **algoritmo di Euclide**, infatti se si considera una frazione $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ si può scrivere, grazie al **teorema del quoziente e del resto**, che esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che $a = bq + r$, ove $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ e quindi:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}} ,$$

e si può ripetere il procedimento con $\frac{b}{r}$. Poichè $|r| < |a|$ l'algoritmo ha fine, perciò la frazione continua che ne risulta è finita. \square

Un'altra definizione che può essere utile è la seguente:

Definizione 1.19. Una frazione continua $[\beta_1, \dots, \beta_m]$ si dice in forma canonica se tutti i suoi termini sono positivi o negativi ed m è dispari.

Vedremo a breve che definire una tale forma ha senso in quanto ogni frazione continua può essere trasformata in una equivalente forma canonica.

Intanto possiamo riassumere le proprietà più importanti delle frazioni continue per numeri razionali, nella seguente proposizione:

Proposizione 1.20. *Sia $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_n]$ un qualunque numero razionale. Allora:*

1. $\frac{p}{q} \pm 1 = [a_1 \pm 1, a_2, \dots, a_n]$;
2. $\frac{q}{p} = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$;
3. $-\frac{p}{q} = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]$;
4. Se $\frac{r}{d} = [a_{i+1}, \dots, a_n]$ allora $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \frac{r}{d}]$;
5. Se $a_i = b_i + c_i$ e $\frac{s}{u} = [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$, allora $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b_i + \frac{s}{u}]$ e $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + c_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$.

Dimostrazione. 1. $\frac{p}{q} \pm 1 = [a_1, a_2, \dots, a_n] \pm 1 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} \pm 1 = (a_1 \pm 1) + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} = [a_1 \pm 1, a_2, \dots, a_n]$;

2. Utilizzando l'algoritmo di Euclide si ha un passaggio iniziale in cui $q_1 = a_1 = 0$ e $\frac{r_1}{b} = \frac{q}{p}$ e continuando come esposto nella dimostrazione della proposizione 1.18 si ottiene lo sviluppo di $\frac{p}{q}$;

3. Ovvvia, basta sostituire a p , $-p$ nell'algoritmo e si ottengono gli stessi coefficienti cambiati di segno;

4. $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{i-1} + \frac{r}{d}}} = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \frac{r}{d}]$;

5. Siccome $b_i + \frac{s}{u} = b_i + \frac{1}{0 + \frac{1}{\frac{s}{u}}} = b_i + \frac{1}{\frac{s}{u}}$ si ha immediatamente la tesi voluta. \square

Notiamo ora che una qualunque frazione continua finita è equivalente ad una frazione continua di lunghezza dispari, infatti:

Osservazione 1.21. *Se una frazione continua finita ha lunghezza n pari, allora la si può portare ad una lunghezza dispari, con le trasformazioni che seguono:*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, +1] \text{ per } a_n > 0 \text{ e}$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n + 1, -1] \text{ per } a_n < 0 .$$

Ogni frazione continua semplice finita rappresenta un numero razionale. Dalla proposizione 1.18 e dall'osservazione 1.21 segue che ogni numero razionale ha due rappresentazioni come frazione continua semplice, una con n pari e una con n dispari e cioè:

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \pm 1] = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \pm 1] .$$

Utilizzando la proposizione 1.20 si può dimostrare (Cf. [3, pag 22, Proposition 3]) che tale rappresentazioni sono uniche. Quindi si ha la seguente:

Proposizione 1.22. *Ogni frazione continua $[a_1, \dots, a_n]$ può essere trasformata in un'unica forma canonica, con il segno uguale al segno del primo termine non nullo.*

Conseguentemente alla proposizione 1.22 si può concludere con questo importante teorema:

Teorema 1.23. *Ad ogni numero razionale corrisponde una ed una sola frazione continua semplice, finita e in forma canonica.*

Questo risultato ci sarà molto utile, nel prossimo capitolo, quando classificheremo finalmente le matasse grazie alle frazioni continue.

Capitolo 2

Nozioni topologiche

2.1 Nodi e link

2.1.1 Cenni storici

Nonostante sin dal XVIII secolo si abbiano notizie riguardanti i nodi in matematica, per ottenere una sistemazione ed una formalizzazione la Teoria dei Nodi ha dovuto aspettare fino alla seconda metà del XX secolo ed inoltre la nascita di nuove applicazioni, tra le quali la Teoria delle Stringhe in fisica teorica dopo il '70, generò un nuovo interesse per i nodi e, soprattutto, per gli invarianti associati ad essi. Il primo fisico ad impiegarla fu però William Thomson, meglio conosciuto come Lord Kelvin, nel 1897, durante il dibattito tra teoria ondulatoria e corpuscolare, infatti egli propose i cosiddetti *atomi vortice*, formati da un vortice di etere, intrecciato in un nodo chiuso.

Dopo Thomson, un suo allievo, Tait, si preoccupò di compiere una prima classificazione dei nodi alternati a meno di deformazioni continue nello spazio, cioè di movimenti delle stringhe del nodo, che però non ne cambiano la natura. Tale classificazione fu poi estesa nel 1899 da Little.

Con Thomson, quindi, la teoria dei nodi veniva utilizzata per spiegare le proprietà chimico fisiche degli atomi, ma poi, dopo la pubblicazione della tavola periodica degli elementi di Mendeleev, essa venne abbandonata.

Un altro passo importantissimo nella teoria dei nodi si ebbe nel 1927 con Reidemeister, che trovò tre operazioni (*Reidemeister moves*) che se applicate ad un nodo non lo cambiano, cioè danno origine ad un nodo equivalente, nel senso delle deformazioni detto sopra. Tali movimenti vanno perciò intesi come una realizzazione combinatoria dell'equivalenza in base a cui sono classificati i nodi.

Come si possono però distinguere due nodi non equivalenti? Nel 1928 si sono introdotti i primi invarianti che permettono di farlo, cioè degli oggetti algebrici da associare ad un nodo, che non variano a seguito dell'applicazione di una mossa Reidemeister (perciò due nodi a cui sono associati invarianti diversi, sono necessariamente diversi).

Durante tutto il XX secolo la ricerca nel campo della teoria dei nodi si è preoccupata principalmente di trovare nuovi invarianti sempre più potenti ed efficienti.

Per quanto riguarda invece l'argomento di questa tesi, la teoria delle matasse venne introdotta nel 1967 da John H. Conway ed è un passo avanti nella teoria

dei nodi. In effetti gli oggetti di studio di questa teoria sono appunto le matasse, raffigurabili come intrecci di più stringhe, che possono essere annodate. In particolare le matasse razionali formano una base per l'attuale classificazione dei nodi e trovano numerose applicazioni negli ambiti più disparati, come ad esempio lo studio della ricombinazione del DNA.

2.1.2 Nodi, link e movimenti Reidemeister

Bisogna per prima cosa dare alcune definizioni fondamentali, da cui poter partire, e cioè quella di nodo e link.

Definizione 2.1. *Un nodo è una curva chiusa e semplice C in R^3 , cioè un sottospazio $C \subset R^3$ omeomorfo alla circonferenza unitaria S^1 . Equivalentemente possiamo pensare $C = h(S^1)$ con $h : S^1 \rightarrow R^3$ immersione topologica (figura 2.1 (a)).*

Dato k , intero ≥ 2 , un link è un'immersione,

$$i: \overbrace{S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}^{k \text{ volte}} \rightarrow R^3,$$

cioè è un'unione disgiunta di k nodi. (figura 2.1 (b)).



(a) Nodo a trifoglio (b) Link di Hopf ($k = 2$)

Figura 2.1: Il nodo e il link più semplici

Come è facilmente intuibile, dunque, il concetto di nodo altro non è che un caso particolare di link (cioè quello in cui si ha una sola copia di S^1). Per questa ragione, per tutte le definizioni che seguono tratteremo solo il caso di link.

Inoltre questa è la definizione generale di link, ma vedremo tra poco che per poter lavorare con i link attraverso deformazioni e operazioni varie, sarà necessario restringere la classe di link da considerare ai cosiddetti link *docili*, il che sostanzialmente vuol dire con un numero finito di "intrecci".

Ora è possibile considerare una relazione di equivalenza tra i link, in modo tale che due link siano in relazione se l'uno è deformabile in maniera continua nell'altro, tramite le isotopie:

Definizione 2.2. *Date due omeomorfismi $f, g : X \rightarrow Y$, da uno spazio topologico X a un altro Y , ed un'omotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, si dice che H è un'isotopia se $\forall t \in [0, 1]$, si ha che l'applicazione $h_t : X \rightarrow Y$, definita come $h_t(x) = H(x, t)$, è un omeomorfismo.*

Definizione 2.3. *Dati due link $C_1, C_2 \subset R^3$ si dice che essi sono isotopicamente equivalenti, o isotopi se e solo se esiste un omeomorfismo $h : R^3 \rightarrow R^3$ isotopo all'identità e tale che $h(C_1) = C_2$ (cioè se esiste un'isotopia d'ambiente che trasforma C_1 in C_2).*

Come già detto qualche riga più in alto, non possiamo accontentarci di usare la definizione sopra fornita di link, perché troppo generale. Infatti, non sono da escludere link che presentano infiniti “intrecci” e con tali oggetti non si potrebbe operare. Dobbiamo perciò fornire un’ulteriore definizione:

Definizione 2.4. *Un link si dice **docile** se è equivalente ad un link poligonale, cioè se è ottenibile come unione finita di intervalli rettilinei.*

Si può dimostrare che una condizione equivalente a quella appena data è che l’immersione di S^1 in R^3 sia *differenziabile*.

Possiamo rappresentare i link docili nel piano tramite i *diagrammi* (figura 2.2), cioè considerando le loro proiezioni sul piano. Questa immersione che consideriamo proiettando il link nel piano deve in particolare essere regolare, cioè iniettiva a meno di un numero finito di punti doppi trasversali, detti comunemente *incroci*, nei quali è anche specificato qual’è l’arco che passa sopra e qual’è quello che passa sotto .

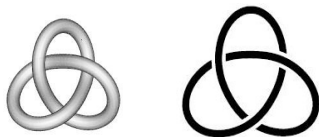


Figura 2.2: Nodo a trifoglio e relativo diagramma

A questo punto possiamo fornire un modo costruttivo per poter stabilire se due link sono equivalenti.

Innanzitutto è doveroso dire che interpreteremo l’equivalenza dei link in base ai loro diagrammi.

Come già anticipato nell’introduzione, un importante risultato nella teoria dei nodi si è avuto con Kurt Reidemeister, che nel 1926, parallelamente a J.W. Alexander e G.B. Briggs, dimostrò che due diagrammi di nodi provenienti da uno stesso nodo, a meno di isotopie del piano, si possono relazionare fra loro tramite una sequenza di tre movimenti, detti per l’appunto *movimenti di Reidemeister* (Cf. [1]).

Tali movimenti sono:

1. rotazione di una stringa in una delle due direzioni, per formare una spirale o scioglierne una (figura 2.3 (a));
2. muovere una stringa completamente sopra un’altra (figura 2.3 (b));
3. muovere una stringa completamente sopra (o sotto) un incrocio di due altre stringhe (figura 2.3 (c)).

Per dare un’idea di come i movimenti Reidemeister possono realizzare l’equivalenza isotopica dei link, possiamo descrivere un’isotopia elementare (infatti ogni isotopia tra link poligonali, si può pensare come una sequenza finita di tali isotopie elementari). In particolare, dato un link poligonale, un’isotopia (o mossa) elementare consiste nel sostituire un lato della spezzata con due segmenti, in modo che i tre segmenti formino un triangolo la cui parte interna è disgiunta dal link stesso.

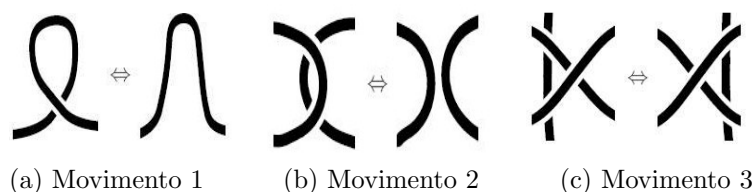


Figura 2.3: I movimenti Reidemeister

2.2 Matasse

Compresi i concetti fondamentali di nodo e link, si può ora introdurre la definizione di matassa (*tangle* in inglese) e di matassa razionale (*rational tangle* o *r-tangle*).

Un primo approccio intuitivo al concetto di matassa, può essere quello di considerare un intreccio di due segmenti chiusi nella boccia B^3 , tali che i loro estremi siano quattro punti distinti sulla superficie sferica e che l'immagine dell'interno dei segmenti giaccia nell'interno della boccia.

Possiamo assumere che la boccia sia centrata nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano in tre dimensioni X , Y e Z , e che gli estremi della matassa giacciono tutti nella circonferenza che si ottiene intersecando la superficie sferica con il piano $z = 0$, sulle diagonali dei vari quadranti (figura 2.4).

Definizione 2.5. *Dati due archi α_1 , α_2 non orientati e disgiunti, si dice matassa una loro immersione topologica propria nella boccia B^3 , $T : \alpha_1 \sqcup \alpha_2 \rightarrow B^3$, tale che le immagini degli estremi coincidono con i quattro punti $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.*

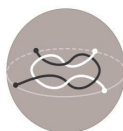


Figura 2.4: Esempio di matassa

Un ulteriore fatto che è necessario introdurre sulle matasse è che esse, proprio come nel caso dei link, vengono classificate a meno di isotopie e che queste trasformazioni, nella pratica, si possono realizzare con i movimenti Reidemeister.

Ciò induce naturalmente a definire una relazione di equivalenza nell'insieme delle matasse a estremi fissati, cioè la relazione di **isotopia**:

Definizione 2.6. *Due matasse sono dette isotope, se l'una può essere deformata in maniera continua nell'altra, nell'insieme delle matasse con estremi fissati.*

A breve, dopo una piccola panoramica sulle operazioni che è possibile applicare alle matasse, introdurremo anche i movimenti attuabili su ognuna di esse, cioè le deformazioni continue di cui si è appena parlato nella definizione 2.6, in modo da poter meglio definire le classi di equivalenza definite dalla relazione di isotopia ivi introdotta.

2.2.1 Matasse razionali

Introduciamo dapprima le due matasse banali, che sono rappresentate in figura 2.5.

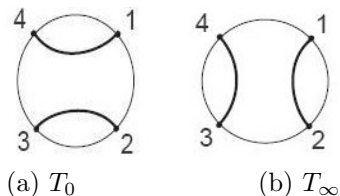


Figura 2.5: Matasse banali

Intuitivamente una matassa è detta razionale se può essere deformata in maniera continua nell'insieme delle matasse con estremi non fissati (muovendo gli estremi sulla circonferenza di contorno), nella matassa banale T_0 rappresentata in figura 2.5 (a). Formalmente:

Definizione 2.7. Una matassa $T = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$ si dice razionale se esiste un'isotopia ambiente di B^3 che trasforma T nella matassa banale T_0 .

Da ora in poi non parleremo più per matasse generiche, ma ci occuperemo solo di matasse razionali (definizione 2.7).

Rifacendoci a quanto detto nella definizione 2.5 di matassa e cioè che possiamo limitarci a considerare le matasse con estremi fissati, e alla definizione 2.6 di matasse isotope, possiamo da adesso in poi considerare le matasse a meno di isotopie, quindi nell'insieme delle matasse con estremi fissati consideriamo la relazione di equivalenza \sim che lo divide in classi di equivalenza.

Per rendere la notazione il più semplice possibile, da ora in poi denoteremo con gli stessi simboli le matasse con le loro classi di isotopia. In particolare con \mathcal{R} indicheremo l'insieme delle matasse razionali (e ugualmente l'insieme delle loro classi di isotopia).

Come si può però riconoscere quali matasse appartengono ad una data classe di isotopia?

Innanzitutto dobbiamo trovare un modo per rappresentare le matasse razionali, che sono gli oggetti con cui intendiamo lavorare. Possiamo ad esempio ricorrere alla definizione 2.7 di matasse razionali, partendo quindi dalle matasse banali $[0]$ e $[\infty]$, applicando poi una serie di movimenti, che definiremo più avanti, per poter generare tutto l'insieme delle matasse razionali.

Prima però cerchiamo di dare una breve descrizione delle operazioni applicabili alle matasse razionali.

2.2.2 Operazioni sulle matasse

Si possono definire delle operazioni applicabili alle matasse. Forniremo ora una breve descrizione di quelle principali.

Importante è anche notare che tutte le seguenti operazioni sono definite a meno di isotopie.

Definiamo queste due operazioni unarie che consistono nell'applicazione di isotopie:

Definizione 2.8. Flype: data una matassa ottenuta da un intreccio singolo affiancato ad una matassa t generica si ottiene applicando un'isotopia che sposta l'intreccio dall'altra parte di t (è come se si facesse scorrere l'intreccio oltre la matassa t e si ottiene perciò una matassa in cui t risulta girata di 180° lungo l'asse orizzontale, nel caso della somma, o lungo l'asse verticale, nel caso del prodotto), e si indica con il simbolo $\tilde{\text{flype}}$ (figura 2.8);

Rotazione: data una matassa T la sua rotazione, denotata con T^r , si ottiene ruotando T in senso antiorario di 90° ;

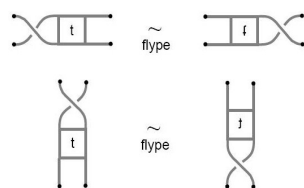


Figura 2.6: Flype

Possiamo definire operazioni unarie non di isotopia:

Definizione 2.9. Immagine Speculare: data una matassa T la sua immagine speculare, denotata con $-T$, si ottiene scambiando tutti gli incroci (se una stringa passa sopra ad un'altra in un incrocio, nell'immagine speculare, la prima passerà sotto la seconda).

Inverso: data una matassa T il suo inverso, denotato con T^i , si definisce come in figura 2.9;

Flip: data una matassa T , si applica una rotazione di tutta T di 180° lungo l'asse orizzontale ($hflip$) o lungo l'asse verticale ($vflip$), e si denota con T^{hflip} o T^{vflip} (figura 2.10).

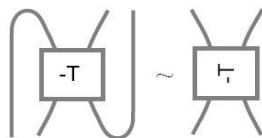


Figura 2.7: T^i

Infine ci sono anche altre operazioni unarie, che associano ad una matassa T un link (o un nodo). Ovviamente anche queste operazioni sono definite a meno di isotopie (quindi a matasse isotope, si associano link fra loro isotopi):

Definizione 2.10. Numeratore: data T una 2-matassa, il numeratore di T , denotato con $N(T)$, si ottiene unendo con archi semplici i due estremi superiori e i due estremi inferiori di T (figura 2.11 (a));

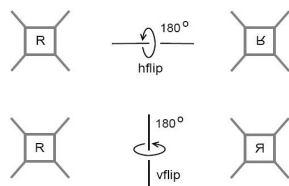


Figura 2.8: Flip

Denominatore: data T un 2-matassa, il denominatore di T , denotato con $D(T)$, si ottiene facendo la stessa cosa ma con le coppie di corrispondenti estremi in alto e in basso (insomma, si chiude a destra e a sinistra, come in figura 2.11 (b)).

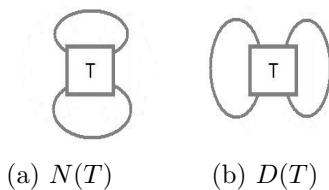


Figura 2.9: Numeratore e Denominatore

Noi non utilizzeremo nel discorso che segue queste ultime due operazioni, ma esse sono molto importanti. In effetti l'approccio al problema da noi utilizzato (Cf. [2]) non è l'unico possibile. Un approccio alternativo è quello fornito da Kauffman in [3], che si riferisce direttamente al lavoro originale di Conway (Cf. [6]). Conway definì un invariante topologico per una matassa arbitraria R , come:

$$F(R) = \frac{\Delta(N(R))}{\Delta(D(R))},$$

dove $\Delta(N(R))$ e $\Delta(D(R))$ sono i polinomi di Alexander rispettivamente dei nodi numeratore e denominatore di R (il *polinomio di Alexander* è un invariante per i nodi scoperto da James Waddel Alexander II, che assegna un polinomio a coefficienti interi ad ogni tipo di nodo).

Conway si accorse poi che il reciproco di $F(R)$, cioè $F(R)^{-1}$, coincideva con la frazione di una matassa razionale, concetto che egli aveva definito in precedenza con l'utilizzo delle frazioni continue.

Capitolo 3

Classificazione delle matasse razionali

3.1 Introduzione

Come facilmente intuibile dal titolo, lo scopo ultimo del nostro lavoro è esporre la dimostrazione di un importante teorema sulla classificazione di matasse razionali, tramite l'utilizzo di frazioni continue.

Fino ad ora ricordiamo che riguardo le frazioni continue, siamo giunti a mostrare col teorema 1.23 che ogni numero razionale ammette un'unica rappresentazione in forma di frazione continua semplice, finita ed in forma canonica.

Per quanto riguarda, invece le matasse i risultati più importanti sono la definizione di insieme delle classi di isotopia per matasse razionali, \mathcal{R} . A partire da questo concetto, a breve, definiremo il gruppo dei movimenti modulari per le matasse razionali e otterremo un importante risultato per la nostra tesi finale.

Prima di tutto però ci serve la presentazione del gruppo proiettivo lineare speciale, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

3.2 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Rifacciamoci agli esempi sui nuclei di omomorfismi fatti nel primo capitolo ed in particolare al secondo esempio. Avevamo detto che se consideriamo il gruppo generale lineare, cioè delle matrici $n \times n$ a coefficienti in \mathbb{R} , $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e l'omomorfismo $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, esso ha nucleo $\ker(\det) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, cioè il gruppo speciale lineare delle matrici a coefficienti reali, con determinante 1.

Restringiamoci ora al caso di $n = 2$ e dei coefficienti interi, cioè $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Consideriamo ora il suo *centro*, cioè il suo sottogruppo dei suoi elementi che commutano con gli elementi del gruppo stesso e cioè: dato G gruppo, il suo centro è l'insieme

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\} .$$

Nel nostro caso il centro di $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ è l'insieme delle trasformazioni lineari scalari a determinante unitario e lo denotiamo con $\mathrm{SZ}(2, \mathbb{Z}) = \{\pm I\}$.

Osservazione 3.1. *Ovviamente il centro di un gruppo è sempre un sottogruppo normale del gruppo stesso, proprio per la proprietà dei suoi elementi di commutare con gli elementi del gruppo.*

Per l'osservazione 3.1, possiamo perciò considerare il quoziente:

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\} \equiv \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) .$$

Cerchiamo ora di scrivere una presentazione di $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Innanzitutto due suoi generatori sono le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ma quali sono le relazioni che definiscono $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ in termini di questi generatori?

Lavorando sui generatori e chiamando E la matrice identità 2×2 , ci si accorge che:

$$r_1 = AB^{-1}AB^{-1}AB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E = -1 * E \sim E$$

e inoltre:

$$r_2 = B^{-1}AB^{-1}B^{-1}AB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E = -1 * E \sim E$$

In effetti si può dimostrare che quelle due relazioni sono sufficienti, cioè vale il seguente risultato:

Proposizione 3.2.

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \langle A, B \mid r_1, r_2 \rangle .$$

Dimostrazione. Cf. [9]

□

3.2.1 Azione di $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sui razionali

Su \mathbb{Z}^2 consideriamo la relazione d'equivalenza $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1q_2 = p_2q_1$. Per ogni coppia $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ indichiamo con $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ la relativa classe di equivalenza.

Allora l'insieme

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

si può identificare canonicamente con i numeri razionali con in più l'elemento ∞ e da ora in poi utilizzeremo indifferentemente le seguenti due notazioni per riferirci a suoi elementi:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \equiv \frac{p}{q} .$$

In particolare con $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{0}$ si intende l'elemento ∞ .

Ora si può considerare l'azione di $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ su $\tilde{\mathbb{Q}}$ indotta dal prodotto tra matrici e vettori colonna; cioè:

$$\text{dati } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \text{ e } r = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \tilde{\mathbb{Q}},$$

definiamo:

$$Mr = \begin{bmatrix} pa + qb \\ pc + qd \end{bmatrix} \in \tilde{\mathbb{Q}}.$$

Perchè la definizione sia ben posta, dobbiamo verificare che non dipende dai rappresentanti scelti per M e r . Per M si nota che, cambiando tutti i segni sui suoi coefficienti, il risultato non cambia, infatti:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = -M, \forall r \in \tilde{\mathbb{Q}} \Rightarrow -Mr = -1Mr = Mr.$$

Per r , invece dobbiamo verificare che:

$$\forall M \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}), \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \Rightarrow M \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Ponendo:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dobbiamo quindi verificare che se per ipotesi $p_1q_2 = p_2q_1$ si deve avere che:

$$\begin{bmatrix} ap_1 + bq_1 \\ cp_1 + dq_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap_2 + bq_2 \\ cp_2 + dq_2 \end{bmatrix}$$

cioè si deve avere che:

$$(ap_1 + bq_1)(cp_2 + dq_2) = (cp_1 + dq_1)(ap_2 + bq_2)$$

e in effetti

$$\begin{aligned} (ap_1 + bq_1)(cp_2 + dq_2) &= acp_1p_2 + adp_1q_2 + bcp_2q_1 + bdq_1q_2 = \\ &= acp_1p_2 + adp_2q_1 + bcp_1q_2 + bdq_1q_2 = (cp_1 + dq_1)(ap_2 + bq_2). \end{aligned}$$

Valgono le proprietà di un'azione?

Innanzitutto si deve avere che: $1s = s$, per ogni $s \in S$ (ove $1 \equiv 1_G$). Nel nostro caso 1_G è la matrice identità, E , quindi banalmente si ha che la prima proprietà è soddisfatta.

Poi bisogna verificare la proprietà associativa, cioè: $(g_1 * g_2)s = g_1(g_2s)$, per ogni $g_1, g_2 \in G$ e $s \in S$. Ma anche questa proprietà è banalmente soddisfatta a causa della validità della proprietà associativa per il prodotto riga per colonna.

Verifichiamo che quest'azione è fedele, cioè:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, M \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \forall \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow M = I.$$

Infatti:

$$\begin{bmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Leftrightarrow (ap + bq)q = (cp + dq)p, \forall p, q$$

ed in particolare:

$$p = 1, q = 0 \Rightarrow c = 0;$$

$$p = 0, q = 1 \Rightarrow b = 0;$$

$$p = 1, q = 1 \Rightarrow a = d.$$

Perciò la matrice deve essere della forma:

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

e il suo determinante è $\det(M) = a^2 = 1$, quindi si deve avere che $a = \pm 1$ e di conseguenza $M = [\pm I]$.

Cerchiamo ora di ottenere lo stabilizzatore di 0:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix},$$

affinchè la matrice stia nello stabilizzatore di 0.

Ma questo vuol dire che $b = 0 \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$, qualunque, e inoltre $d = q \Rightarrow a = \frac{1}{q}$ se vogliamo che la matrice sia in $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, ma siccome $a, d \in \mathbb{Z}$ si deve avere che $q = 1$ e $a = d = 1$.

Possiamo quindi dire che lo stabilizzatore di 0 è formato dalle matrici della forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} = B^m,$$

cioè:

$$\text{St}_0 = \{B^m \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

A questo punto applicando la proposizione 1.15, sappiamo che esiste

$$\phi_1 : \text{PSL}(2, \mathbb{Z})/\text{St}_0 \rightarrow O_0 = \tilde{\mathbb{Q}},$$

applicazione biettiva indotta da:

$$M \mapsto M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'ultima cosa che ci resta da mostrare è che O_0 coincide con tutto $\tilde{\mathbb{Q}}$.

Consideriamo un elemento generico di $\tilde{\mathbb{Q}}$ e lo poniamo uguale al prodotto $M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ e cerchiamo di esplicitare quest'ultima:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow b = p \text{ e } d = q.$$

Esistono a e c tali che una tale matrice appartenga a $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$? Perchè questo avvenga si deve verificare che:

$$aq - cp = 1.$$

Ma tali a e c esistono per l'identità di Bezout, se assumiamo p e q primi fra loro.

3.3 Gruppo di movimenti Λ

3.3.1 Movimenti di matasse razionali

Torniamo ora a considerare le matasse nella boccia. In tal modo, se guardiamo la proiezione della matassa sul piano X, Y , possiamo denotare con i numeri 1, 2, 3 e 4 gli estremi della matassa, assegnando in partenza 1 al vertice con ascissa e ordinata positive e procedendo in senso orario.

Ora possiamo considerare gli *avvitamenti* (in inglese *twists*) applicabili sulle coppie di vertici adiacenti e dare loro un segno. Un movimento di tale tipo si denota con X_i^σ o Y_i^σ , ove $\sigma = \pm$ e $i \in \{1, 2\}$.

Nel dettaglio la notazione per i segni che utilizzeremo sarà la seguente (Cf. a figura 3.1):

- $X_i, i = 2(1)$: guardando da destra verso sinistra (da sinistra verso destra) un avvitamento positivo si ottiene ruotando 1 intorno a 2 (3 intorno a 4) in senso orario, mentre un avvitamento negativo si ottiene con una rotazione dei medesimi in senso antiorario;
- $Y_i, i = 1(2)$: guardando dal basso verso l'alto (dall'alto verso il basso) un attorcigliamento positivo si ottiene ruotando 2 intorno a 3 (4 intorno ad 1) in senso antiorario, mentre un attorcigliamento negativo si ottiene con una rotazione dei medesimi in senso orario.

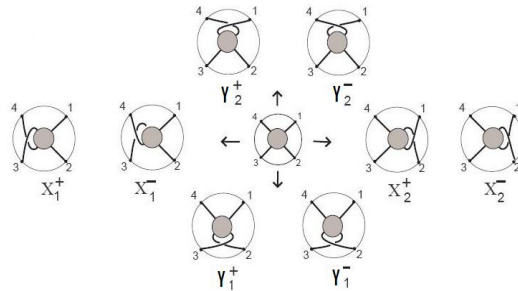


Figura 3.1: Segni dei twists

Lemma 3.3. *Per ogni matassa razionale $T \in \mathcal{R}$:*

$$X_2^\pm T \sim X_1^\pm T \text{ e } Y_1^\pm T \sim Y_2^\pm T$$

Dimostrazione. Questo lemma si ottiene facilmente grazie alla descrizione dei singoli movimenti appena fornita e al fatto che la rotazione è un'isotopia. In effetti se consideriamo, ad esempio, il twist X_2^+ (come in figura 3.1) e ruotiamo di 180° la matassa che si ottiene (il che vuol dire applicare due volte l'isotopia di rotazione), si può facilmente vedere che tutto ciò è equivalente ad applicare il twist X_1^+ .

Un ragionamento analogo vale per tutti gli altri casi. \square

Osservazione 3.4. Grazie al lemma 3.3, nello spazio $\tilde{\mathcal{R}}$ è possibile considerare, anziché quattro movimenti base, solo due di essi e cioè:

$$X = X_1^+ \text{ e } Y = Y_1^+$$

Mentre i loro inversi verranno denotati con

$$X^{-1} = X_1^- \text{ e } Y^{-1} = Y_1^-$$

Notiamo che i movimenti X e Y lasciano fisso l'estremo 1. C'è anche un altro movimento che lascia fisso questo estremo ed è l'avvitamento dei punti 2 e 4 attraverso la rotazione di π attorno alla diagonale $x = y$. Lo denotiamo con $R = Y^{-1}XY^{-1}$ (figura 3.2).

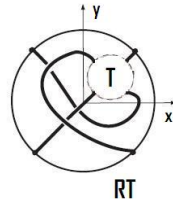


Figura 3.2: RT

3.3.2 Λ e relativa azione su \mathcal{R}

A questo punto torniamo a parlare di matasse razionali e, dopo aver stabilito quali sono tutti i movimenti base che generano le matasse razionali, cioè X, Y, X^{-1} , Y^{-1} , possiamo definire il gruppo di questi movimenti, denotato con Λ .

Innanzitutto, un generico elemento del gruppo lo possiamo scrivere nel modo seguente:

$$W = Z_1 Z_2 \dots Z_n ,$$

ove $n \in \mathbb{N}$ e ciascun Z_i è uno tra X, Y, X^{-1} o Y^{-1} . Quindi se $T \in \mathcal{R}$, se si vuole applicare ad essa il movimento W, si ha

$$Z_1 Z_2 \dots Z_n T = Z_1 (Z_2 (\dots (Z_n T) \dots) .$$

Due parole W, $W' \in \Lambda$ rappresentano lo stesso elemento, quindi, se e solo se, per ogni $T \in \mathcal{R}$ si ha:

$$WT \sim W'T .$$

Applicando il movimento Reidemeister (2), valgono le seguenti relazioni:

$$XX^{-1} = E \text{ e } YY^{-1} = E$$

ove E è il movimento identico, cioè quello che lascia la matassa invariata.

Inoltre se denotiamo una sequenza di k volte X (o Y) con X^k (Y^k) si ottiene facilmente che ogni parola $W = Z_1 Z_2 \dots Z_n \in \Lambda$ può essere scritta come:

$$W = X^{x_1} Y^{y_1} X^{x_2} Y^{y_2} \dots X^{x_m} Y^{y_m}$$

ove gli esponenti a_i, b_i sono interi non nulli, eccetto x_1 e y_m che possono essere anche 0. Per tale ragione, ovviamente, l'inverso si scriverà:

$$W^{-1} = Y^{-y_m} X^{-x_m} \dots Y^{-y_2} X^{-x_2} Y^{-y_1} X^{-x_1} .$$

Da quanto abbiamo appena visto possiamo quindi dire che il gruppo Λ nasce proprio facendo un'azione sull'insieme delle matasse razionali a meno di isotopie, \mathcal{R} .

Inoltre questa azione risulta essere transitiva, grazie alla seguente proposizione:

Proposizione 3.5. $O_{T_0} = \mathcal{R}$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare inizialmente che ogni matassa razionale si può ottenere da una delle due matasse banali, applicando una sequenza finita di movimenti di Λ .

Prima di dimostrare tale affermazione per induzione su n numero dei movimenti, è necessario mostrare che possiamo disporre gli incroci che si hanno nella matassa in modo che essi siano ad uno ad uno sempre più vicini al centro della sfera. Dobbiamo cioè *ordinarli*, in modo che convergano verso il centro.

Per far ciò dapprima consideriamo una matassa razionale generica T . Consideriamo inoltre l'omeomorfismo $d : B^3 \rightarrow \frac{1}{2}B^3$, dove $\frac{1}{2}B^3$ denota la boccia di raggio $\frac{1}{2}$, definito $d(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in B^3$.

Sia T' la matassa che nella boccia $\frac{1}{2}B^3$ coincide con $d(T)$, mentre nella corona $B^3 - \frac{1}{2}B^3$, consiste di quattro segmenti radiali, come in figura 3.3.

Tale matassa T' è isotopa alla matassa T , quindi è lei stessa razionale. Esiste quindi un'isotopia d'ambiente di B^3 , H , che porta T' nella matassa banale T_0 .

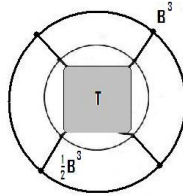


Figura 3.3: T'

A questo punto consideriamo l'isotopia:

$$\bar{h}_t(x) = \bar{H}(x, t) = \begin{cases} H(x, t) & , \|x\| < \frac{1}{2} \\ \|x\| H(\frac{x}{\|x\|}, t(2 - 2\|x\|)) & , \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases} .$$

Anche \bar{H} è un'isotopia d'ambiente di B^3 , ma a differenza di H essa fissa il bordo di B^3 , quindi la matassa $T'' = \bar{h}_1(T')$ è equivalente a T' , quindi T . Inoltre tale matassa T'' coincide con $d(T_0)$ in $\frac{1}{2}B^3$, mentre tutti gli intrecci della matassa iniziale T , vengano portati tra la boccia di raggio $\frac{1}{2}$ e quella di raggio 1, nel modo che avevamo prima spiegato, dato che l'isotopia \bar{H} conserva i gusci (figura 3.4).

A questo punto, dato che gli incroci sono ordinati come volevamo, si ottiene che con una sequenza finita di movimenti di Λ si può passare alla matassa banale T_0 . \square

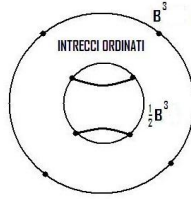


Figura 3.4: \overline{H}

A seguito della proposizione 3.5, possiamo, analogamente a quanto fatto tra $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ e $\widetilde{\mathbb{Q}}$, applicare la proposizione 1.15 ed in questo modo possiamo dire, pur non conoscendo esplicitamente lo stabilizzatore di T_0 , che esiste una funzione ϕ_2 biettiva che:

$$\phi_2 : \Lambda / \text{St}_{T_0} \rightarrow O_{T_0} = \mathcal{R}$$

e tale ϕ_2 è così definita: $M \mapsto MT_0$.

3.4 Biiezione tra i razionali e \mathcal{R}

Un'osservazione importante da fare è inoltre la seguente:

Proposizione 3.6. *In Λ valgono le relazioni:*

$$(XY^{-1})^3 \text{ e } (Y^{-1}XY^{-1})^2 .$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione fare riferimento alla figura 3.5 e alla figura 3.6. In entrambi i casi si può ottenere la matassa T con un rotazione completa del disco piccolo intorno alla retta $x = y$.

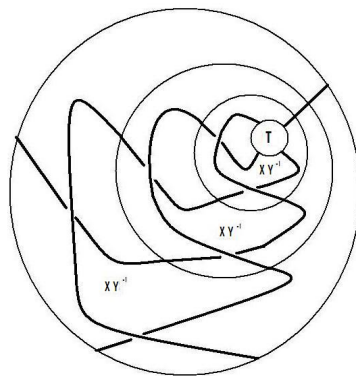


Figura 3.5: $(XY^{-1})^3 T$

□

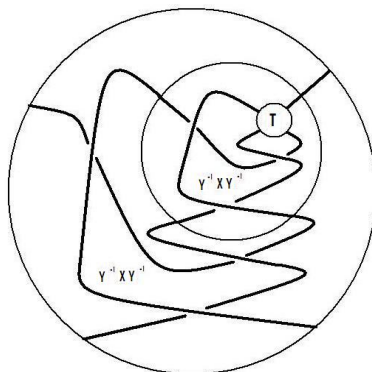


Figura 3.6: $(Y^{-1}XY^{-1})^2T$

Il problema è che non sappiamo se queste due relazioni sono le uniche relazioni in Λ , quindi non siamo in grado di dare una presentazione del gruppo Λ , ma conoscendo la presentazione di $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ e applicando la proposizione 1.13, possiamo dire che esiste $\mu : \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda$ omomorfismo suriettivo che manda i generatori di $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ nei generatori di Λ e precisamente:

$$\mu(A) = X, \mu(B) = Y .$$

Vogliamo ora costruire una biiezione tra $\tilde{\mathcal{Q}}$ e \mathcal{R} . Per cominciare consideriamo il lato semplice, cioè prendiamo un'applicazione $\eta : \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{R}$ definita mediante i seguenti passaggi:

1. $\eta(0) = T_0$ e $\eta(\infty) = T_\infty$;
2. Dato $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, per il teorema 1.23 sappiamo che esiste un'unica frazione continua in forma canonica $[a_1, \dots, a_n]$, il cui valore è $\frac{p}{q}$;
3. A $\frac{p}{q}$ si associa una matassa razionale così costruita: $X^{a_1}Y^{a_2} \dots X^{a_n}T_0$.

In particolare sappiamo che la sequenza di movimenti scelta in (3) comincerà e finirà sempre con potenze di A , dato che la frazione continua scelta sarà di lunghezza n dispari, essendo in forma canonica.

Tenendo conto della proposizione 1.20 si può provare che tale applicazione η rispetta anche le azioni dei gruppi che agiscono rispettivamente su $\tilde{\mathcal{Q}}$ e su \mathcal{R} , nel senso spiegato dallo schema in figura 3.7.

Inoltre tale applicazione η è suriettiva, perchè: data una matassa $T \in \mathcal{R}$ si ha che $T = WT_0$, con W un elemento generico di Λ , cioè

$$W = X^{x_1}Y^{y_1}X^{x_2}Y^{y_2} \dots X^{x_m}Y^{y_m} .$$

Esiste un $r \in \tilde{\mathcal{Q}}$ tale che $\eta(r) = T$?

Si, basta considerare $\mu^{-1}(X^{x_1}Y^{y_1}X^{x_2}Y^{y_2} \dots X^{x_m}Y^{y_m}) = M \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, dato che μ è suriettivo, e considerare il vettore $M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{Q}}$.

Il nostro scopo è ora quello di mostrare che tale η è biiettiva e di trovare la sua inversa e per far ciò utilizzeremo la *colorazione* di Kauffman (Cf. [3, pag. 34, Sezione (5)]).

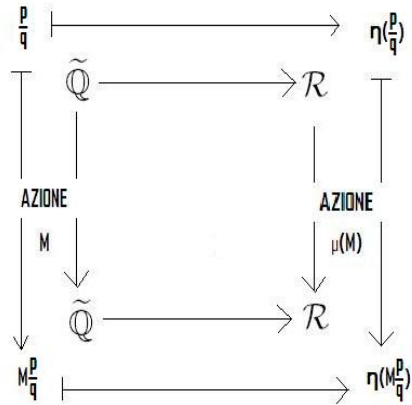


Figura 3.7: η rispetta le azioni dei gruppi

3.4.1 Colorazione di matasse

La colorazione secondo Kauffman, è un procedimento in cui si associano dei numeri interi agli archi in una data matassa con la regola che per ogni incrocio, detti α , β e γ i numeri così associati deve accadere che il numero associato all'arco che passa sopra è la media dei numeri associati ai due rami dell'arco che passa sotto (Cf. figura 3.8), cioè:

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

o equivalentemente

$$\gamma = 2\beta - \alpha .$$

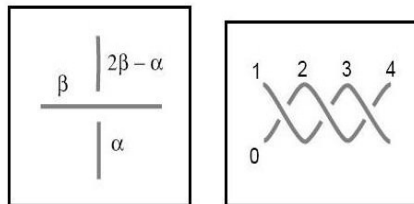


Figura 3.8: Regola per la colorazione ed esempio

Chiaramente ogni matassa ammette infinite colorazioni costanti, quando cioè a tutti gli archi è associato lo stesso intero n .

Si può dimostrare che ogni matassa razionale ammette una colorazione non costante (Cf. [3, pag. 35]), ragionando per induzione a partire da $T - 0$, infatti:

T_0 ammette una colorazione non costante: Cf. figura 3.9;

T colorabile $\Rightarrow XT$ colorabile: Cf. figura 3.10;

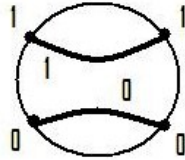


Figura 3.9: Colorazione non costante per T_0

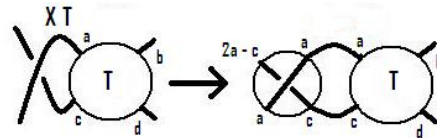


Figura 3.10: Colorazione non costante per XT

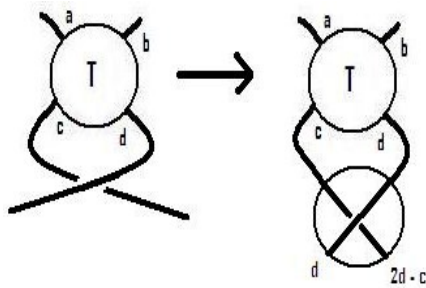


Figura 3.11: Colorazione non costante per YT

T colorabile \Rightarrow YT colorabile: Cf figura 3.11.

Inoltre, partendo con T colorata e applicando i movimenti X e Y che la generano a partire da T_0 all'inverso, si ottiene una colorazione non banale di T_0 (figura 3.12).

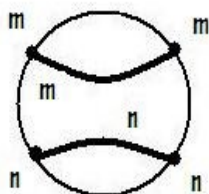


Figura 3.12: Colorazione non costante generale per T_0

Quindi ogni colorazione di T si ottiene da una colorazione di T_0 applicando i movimenti come appena detto.

Poi data una colorazione se ne possono ottenere infinite cambiando ogni colore con la regola $\alpha \mapsto k\alpha + n$, con $k, n \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Ciò dipende dal fatto che si può sostituire ad ogni colore α il colore $k\alpha + n$ e nella regola di colorazione si ha che

$$\gamma = 2\beta - \alpha \Rightarrow k\gamma + n = 2k\beta + n - (k\alpha + n) .$$

Inoltre in questo modo si ottengono tutte le possibili colorazioni di T , infatti questo vale per T_0 ($0 \mapsto k \cdot 0 + n, 1 \mapsto k + n = m$) e si conserva mediante i movimenti.

Data ora una matassa colorata associamo ad essa una matrice 2×2 costituita dai numeri corrispondenti ai vertici, che chiamiamo *matrice dei colori* (Cf. figura 3.13).

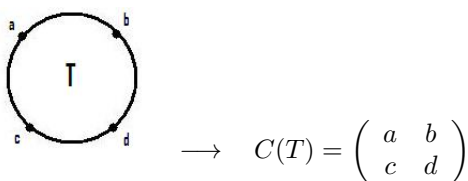


Figura 3.13: Matassa T a cui è associata la rispettiva matrice dei colori $C(T)$

Osservazione 3.7. Se

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è una matrice di colori data per una matassa fissata, ogni altra matrice dei colori (associata ad un'altra colorazione) è del tipo:

$$M = \begin{pmatrix} na + k & nb + k \\ nc + k & nd + k \end{pmatrix}$$

Le matrici dei colori cambiano come detto sotto l'azione di Λ , cioè:

$$C(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow C(XT) = \begin{pmatrix} 2a - c & b \\ a & d \end{pmatrix}$$

e

$$C(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow C(YT) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & 2d - c \end{pmatrix}$$

Proposizione 3.8. *Data C matrice di colorazione per una matassa razionale, essa è invariante per isotopie.*

Dimostrazione. Per ottenere la tesi è sufficiente dimostrare che applicando i movimenti Reidemeister esiste sempre una colorazione intera che lascia invariati gli estremi.

1. Riferirsi a figura 3.14. Nel verso come in figura e nel verso contrario questo caso è banale.

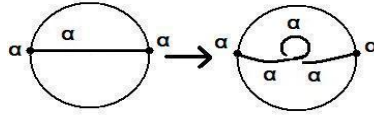


Figura 3.14: Primo movimento Reidemeister

2. Riferirsi a figura 3.15. Nel verso come in figura basta porre $\gamma = 2\alpha - \beta$. Nel verso opposto è banale, perchè basta considerare α e β come in figura.

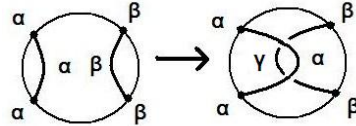


Figura 3.15: Secondo movimento Reidemeister

3. Riferirsi a figura 3.16. Nel verso come in figura, sappiamo che: $\frac{\beta + \gamma}{2} = \alpha \Rightarrow \gamma = 2\alpha - \beta$; $\zeta = 2\gamma - \delta$; $\zeta = 2\alpha - \epsilon$.

Ora, scegliendo $\theta = 2\alpha - \delta$, si dovrebbe ottenere anche che $\theta = 2\beta - \epsilon$, cioè $2\alpha - \delta = 2\beta - \epsilon$, ma dalle condizioni iniziali si ha che:

$$2\gamma - \delta = 2\alpha - \epsilon \Rightarrow$$

$$\epsilon = 2\alpha - 2\gamma + \delta = 2\alpha - 4\alpha + 2\beta + \delta = -2\alpha + 2\beta + \delta \Rightarrow$$

$$2\alpha - \delta = 2\beta - \epsilon .$$

Nel verso opposto è analogo.

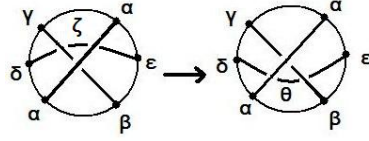


Figura 3.16: Terzo movimento Reidemeister

□

Grazie alla proposizione 3.8 abbiamo quindi ottenuto che data una classe di isotopia in \mathcal{R} , l'insieme delle possibili matrici dei colori sono le stesse per ogni matassa che vi è contenuta.

Passiamo ora al teorema che ci permetterà di invertire l'applicazione η prima definita.

Teorema 3.9. *Sia*

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice dei colori una matassa razionale T . Allora:

1. M soddisfa la regola di somma diagonale: $a + d = b + c$;
2. L'applicazione $\psi : T \mapsto \psi(T) = \frac{c-d}{a-c}$ è un invariante topologico per matasse;
3. Se $T \xrightarrow{\psi} \frac{p}{q}$ si ha che: $XT \xrightarrow{\psi} A_q^p$ e $YT \xrightarrow{\psi} B_q^p$.
4. $\psi(T) = \eta^{-1}(T)$, nel senso che $\psi(T)$ è la frazione a cui η associa la classe di T .

Dimostrazione. 1. Lo dimostreremo per induzione sui movimenti, partendo dalla matassa T_0 . Abbiamo mostrato che una generica matrice dei colori per T_0 , è:

$$C(T_0) = \begin{pmatrix} m & m \\ n & n \end{pmatrix}$$

quindi per tale matrice la proprietà è banalmente soddisfatta. Per il passo induttivo basta verificare la regola della somma diagonale per una matassa generica a cui sono stati applicati i movimenti X e Y, che generano il gruppo dei movimenti Λ . Quindi poniamo T matassa razionale ed $C(T)$ la sua matrice di colori per cui vale la regola della somma diagonale, cioè:

$$C(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ con } a + d = b + c.$$

Vale anche per $C(XT)$ e $C(YT)$?

Per $C(XT)$ si deve avere che $2a + d - c = a + b$, ma per ipotesi $a + d = b + c$, quindi l'equazione diventa: $a + (a + d) - c = a + b \Rightarrow a + b + c - c = a + b$, perciò è verificata.

Per $C(YT)$ si deve avere che $a + 2d - c = b + d$, ma, sfruttando sempre l'ipotesi si ottiene: $a(a + d) + d - c = b + d \Rightarrow b + c + d - c = b + d$, quindi anch'essa è verificata.

2. Sostanzialmente dobbiamo mostrare che ψ non dipende dalla colorazione scelta, ma questo è semplice, perchè per l'osservazione 3.7 se si ha una colorazione e la relativa matrice dei colori, ogni altra matrice in cui ogni colore α si sostituisce con $k\alpha + n$ è una matrice dei colori associata ad una colorazione. Quindi se in $\psi(T)$ facciamo questa sostituzione si ottiene:

$$\frac{c - d}{a - c} = \frac{(kc + n) - (kd + n)}{(ka + n) - (kc + n)},$$

formula che è facilmente soddisfatta per ogni $k, n \in \mathbb{Z}$.

3. Sia $T \xrightarrow{\psi} \frac{p}{q}$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \psi(XT) &= \frac{a - d}{2a - c - a} = \frac{a - d}{a - c} = \frac{a - c + c - d}{a - c} = 1 + \frac{c - d}{a - c} = 1 + \psi(T) = \\ &= 1 + \frac{p}{q} = \frac{p + q}{q}. \end{aligned}$$

Invece:

$$A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + q \\ q \end{bmatrix} = \frac{p + q}{q}$$

e quindi $\psi(XT) = A\psi(T)$.

Per B si dimostra analogamente.

4. Ovviamente: $0 \xrightarrow{\eta} T_0 \xrightarrow{\psi} 0$ e $\infty \xrightarrow{\eta} T_\infty \xrightarrow{\psi} \infty$. Inoltre per la (3) $\psi \circ \eta = id$, infatti:

$$\begin{aligned} r = [a_1, a_2, \dots, a_n] \xrightarrow{\eta} T = X^{a_1} Y^{a_2} \dots X^{a_n} T_0 \xrightarrow{\psi} \psi(X^{a_1} Y^{a_2} \dots X^{a_n} T_0) = \\ = A^{a_1} B^{a_2} \dots A^{a_n} \psi(T_0) = [a_1, a_2, \dots, a_n] = r. \end{aligned}$$

□

Corollario 3.10. *L'applicazione $\eta : \tilde{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{R}$ è biettiva.*

Dimostrazione. Per la proprietà (4) del teorema 3.9 si ha che $\psi \circ \eta = id$, cioè η è iniettiva. Ma η è anche suriettiva (già mostrato), quindi è biettiva ed inoltre: $\eta^{-1} = \psi$. □

3.5 Isomorfismo tra $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ e Λ

Abbiamo con il teorema 3.9 mostrato che l'applicazione η da noi definita in precedenza è in realtà una biiezione.

La nostra situazione attuale è mostrata in figura 3.17.

In particolare, il fatto che l'applicazione η si biettiva, ci dice che anche tra $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})/\text{St}_0$ e Λ/St_{T_0} ci deve essere un'applicazione biettiva.

Ma questo non basta, infatti vale la seguente proposizione:

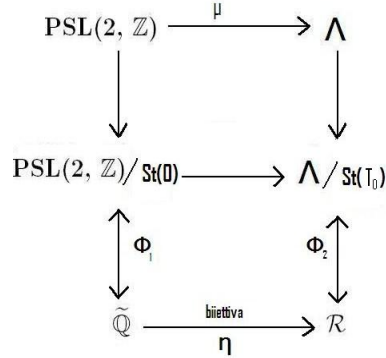


Figura 3.17: Insiemi e applicazioni studiati finora

Proposizione 3.11. $\mu^{-1}(\mathrm{St}_{T_0}) = \mathrm{St}_0$.

Dimostrazione. Svolgiamo la dimostrazione usando il principio di doppia inclusione:

(\supset) Sia $M \in \mathrm{St}_0$. Quindi:

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \eta(M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \eta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = T_0$$

ma

$$\eta(M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mu(M)\eta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mu(M)T_0$$

quindi: $\mu(M) \in \mathrm{St}_{T_0} \Rightarrow M \in \mu^{-1}(\mathrm{St}_{T_0})$.

(\subset) Sia $M \in \mu^{-1}(\mathrm{St}_{T_0})$. Si ha perciò che: $\mu(M) = Z \in \mathrm{St}_{T_0}$. Quindi:

$$\eta(M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mu(M)\eta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = ZT_0 = T_0 .$$

Ma siccome η è biettiva, si deve avere che:

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M \in \mathrm{St}_0 .$$

□

Per la proposizione 3.11 si deve quindi avere che $\mathrm{St}_{T_0} = \mu(\mathrm{St}_0) = \mu(\{B^m \mid m \in \mathbb{Z}\})$ e quindi si ha come immediato corollario:

Corollario 3.12. $\mathrm{St}_{T_0} = \{ Y^m \mid m \in \mathbb{Z} \}$

□

Il ragionamento usato per la Proposizione 3.11 si può applicare ad un qualsiasi stabilizzatore, quindi si ha quest'altro corollario:

Corollario 3.13. $\mu^{-1}(\text{St}_T) = \text{St}_r, \forall r \in \tilde{\mathbb{Q}}$.

□

Per il Corollario 3.13 e dal fatto che si hanno azioni fedeli si ottiene il seguente ultimo teorema:

Teorema 3.14. $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \cong \Lambda$, cioè l'applicazione μ è un isomorfismo.

Dimostrazione. μ è un omomorfismo suriettivo per costruzione. Resta da mostrare l'iniettività.

Ma si possono fare le seguenti due considerazioni, dato che le azioni sono fedeli:

1. in Λ , $\cap(\text{St}_T) = id_\Lambda = E$;
2. in $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, $\cap(\text{St}_r) = I$, matrice identità 2×2 .

Per il corollario 3.13 si deve avere che: $\mu^{-1}(\cap(\text{St}_T)) = \cap(\text{St}_r)$, cioè $\mu^{-1}(E) = I$. Questa condizione vuol dire che μ è anche iniettiva e perciò risulta essere un isomorfismo. □

Bibliografia

- [1] W.B.Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*, Graduate texts in mathematics, 175, Springer, 1997.
- [2] Francesca Aicardi. *Rational tangles and the modular group*, preprint avXiv:0908.2195 [math.GT], 2009.
- [3] Louis H. Kauffmann e Sofia Lambropoulou. *On the classification of rational tangles*. Adv. in Appl. Math. 33, 2004, 199-237.
- [4] W. Menasco, M. Thistlethwaite. *The classification of alternating links*. Ann. of Math., 138, 1993, 113-171.
- [5] William B. Jones, W. J. Thron. *Continued fractions. Analytic theory and applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- [6] J. H. Conway. *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*, *Proceedings of the conference on Computational problems in Abstract Algebra held at Oxford in 1967*, J. Leech ed., (First edition 1970), Pergamon Press, 329-358.
- [7] Michael Artin. *Algebra*, Programma di matematica fisica elettronica, Bollati Boringhieri, 1997.
- [8] Czes Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, (Prima edizione 1988), 201-214.
- [9] C. Kassel, V. Turaev. *Braid groups*, GTM 247, Springer, 2008.