

I Fondamenti della Geometria e il Teorema di Jordan per i poligoni



Elaborato Finale in Geometria

Candidato:
Jacopo Gazzani

Jacopo Gazzani

Relatore
Prof. Riccardo Piergallini

Riccardo Piergallini

Indice

1	Gli assiomi di Hilbert	4
1.1	Assiomi di incidenza	5
1.2	Assiomi di ordinamento	5
1.3	Assioma delle parallele	22
1.4	Assiomi di congruenza	23
1.5	Assiomi di continuità	34
2	Il Teorema di Jordan per i poligoni	36
2.1	La dimostrazione di Feigl	39
2.1.1	Una poligonale semplice piana aperta non sconnette il piano	39
2.1.2	Scomposizione del piano per mezzo di un poligono sem- plice	43
2.2	Poligoni e trapezi	49
2.3	Una dimostrazione alternativa	59
2.3.1	I poligoni hanno orecchie	59
2.3.2	Il Teorema di Jordan	63
A	Assiomi di Hilbert	87
A.1	Fondamenti della Geometria (prima edizione)	87
A.2	Fondamenti della Geometria (decima edizione)	90

Introduzione

La prima edizione de *I Fondamenti della Geometria* (Grundlagen der Geometrie) fu pubblicata per la prima volta in lingua tedesca nel 1899. Da allora, l'opera di Hilbert ha subito diverse revisioni ed è stata tradotta in numerose lingue europee (come italiano, inglese, francese, spagnolo e russo) e non (come cinese e giapponese). In tutte le edizioni che si sono susseguite, l'obiettivo di Hilbert è rimasto invariato: come Kant risale alle origini della conoscenza umana e ispeziona i limiti della ragione nella sua *Critica della Ragion Pura*, ne *I Fondamenti della Geometria*, Hilbert organizza gli assiomi della Geometria Euclidea, costruendo un sistema completo e il più semplice possibile, cioè minimale; a partire da questi, egli analizza criticamente l'indipendenza dei diversi gruppi di assiomi, ne enuncia e dimostra le conseguenze più importanti, come i Teoremi di Pascal e Desargues. Obiettivo di questo elaborato è quello di studiare il sistema assiomatico costruito da Hilbert e approfondire alcune importanti conseguenze dei primi due gruppi di assiomi: gli assiomi di incidenza e gli assiomi dell'ordine. Fra queste figura il seguente risultato, indicato nella prima edizione come Teorema 6 e nell'ultima edizione (la decima) come Teorema 9:

Teorema. *Ogni poligono semplice, i cui vertici giacciono tutti su un piano α , divide i punti di questo piano non appartenenti al poligono in due regioni, un **interno** e un **esterno**, con le seguenti proprietà:*

- *Se A è un punto interno e B un punto esterno, allora ogni poligonale che congiunge A e B interseca il poligono almeno in un punto.*
- *Se A, A' sono due punti interni e B, B' sono due punti esterni, allora esistono poligonali che congiungono A con A' e poligonali che congiungono B con B' , che non hanno alcun punto in comune con il poligono.*
- *Esistono rette nel piano α che giacciono interamente all'esterno del poligono, ma non esistono rette che siano completamente interne al poligono.*

Fino alla nona edizione, questo teorema era riportato come semplice conseguenza dei teoremi enunciati precedentemente; nella decima edizione, l'editore, il Professor Paul Bernays, ha scelto di omettere la frase originale

*Con l'aiuto del Teorema 8 si può ottenere,
senza troppe difficoltà, il seguente teorema*

sostituendola con

*Con l'aiuto del Teorema 8, si può ottenere il seguente teorema
(vedi bibliografia alla fine del Supplemento I, 1).*

La dimostrazione del risultato sopra enunciato, noto anche come “Teorema di Jordan per i poligoni”, in effetti non è banale e soprattutto non è immediato verificare che si tratta di una conseguenza dei soli assiomi di incidenza e dell'ordine. Nella trattazione che segue, ci occuperemo pertanto di analizzare il *Supplemento I, 1* e riporteremo altre dimostrazioni del Teorema di Jordan che si servono unicamente degli assiomi di incidenza e dell'ordine.

Capitolo 1

Gli assiomi di Hilbert

Ogni teoria matematica è solo
un telaio, uno schema di
concetti unitamente alle loro
mutue relazioni necessarie, e gli
elementi fondamentali possono
venir pensati in modo arbitrario.

David Hilbert

Ne “I Fondamenti della Geometria”, Hilbert organizza gli assiomi della Geometria Euclidea in cinque gruppi: gli assiomi di incidenza, gli assiomi dell’ordine, l’assioma delle parallele, gli assiomi di congruenza e gli assiomi di continuità. Tali assiomi riguardano le relazioni che sussistono tra gli elementi della Geometria Euclidea nello spazio, ma in questo capitolo ci limiteremo a enunciare gli assiomi di Hilbert della geometria piana (riportando il sistema assiomatico completo in appendice [A](#)), che descrivono le proprietà degli elementi della Geometria Euclidea nel piano, ovvero i punti e le rette. Ne discuteremo le principali conseguenze, con particolare attenzione agli assiomi dell’ordine, che costituiscono le fondamenta su cui erigere la dimostrazione del Teorema di Jordan che tratteremo nel capitolo successivo. Se non diversamente specificato, faremo riferimento alla decima edizione de “I Fondamenti della Geometria” ([\[6\]](#)).

Nel seguito, considereremo due distinti insiemi di oggetti: i **punti** e le **rette**. I punti verranno indicati con le lettere maiuscole A, B, C, \dots e le rette verranno indicate con le lettere minuscole a, b, c, \dots . Diciamo che i punti costituiscono gli elementi della **geometria lineare**, i punti e le rette gli elementi della **geometria piana**. Poniamo poi, per definizione, che questi concetti primitivi siano legati fra loro mediante relazioni, anch’esse *primitive*,

definite dalle espressioni: **appartiene** (o **giace su**), **sta tra** e **congruente**. Il modo in cui questi concetti primitivi sono legati fra loro è determinato dagli assiomi della Geometria Euclidea.

D'ora in avanti, se non altrimenti specificato, ogni volta che si incontreranno espressioni come “dati due punti qualunque” o “comunque scelti due (o più) punti su una retta”, questi punti si dovranno intendere distinti.

1.1 Assiomi di incidenza

- 1) *Dati due punti qualunque A, B , esiste una retta r che li contiene*^[1]
- 2) *Dati due punti qualunque A, B , esiste al più una retta che li contiene.*
- 3) *Esistono almeno due punti su una retta. Esistono almeno tre punti non allineati.*

Semplice conseguenza di questi assiomi è il seguente teorema:

Teorema 1.1.1. *Due rette distinte*^[2] *hanno al più un punto in comune.*

Dimostrazione. Siano r, s due rette distinte. Supponiamo per assurdo che $r \cap s = \{A, B\}$ con $A \neq B$; allora, A e B determinano due rette distinte, in contraddizione con l'assioma [2]. Dunque, $r \cap s = \emptyset$ o $r \cap s = \{P\}$. \square

Pertanto, è ben posta la seguente

Definizione 1.1.2. *Siano r, s due rette distinte. r ed s si dicono:*

- ***incidenti** se hanno un punto in comune, oppure*
- ***parallele** se non hanno alcun punto in comune.*

1.2 Assiomi di ordinamento

Gli assiomi dell'ordine definiscono la relazione ternaria “Tra” e le sue principali proprietà, fra cui quella di transitività. A partire da questi cinque assiomi, dimostreremo che l'insieme dei punti su una retta è infinito e ordinato, nel senso che è possibile definire una relazione di ordine totale fra i punti di una retta.

¹Hilbert suggerisce di utilizzare piuttosto l'espressione “la retta r passa per i punti A e B ”, oppure “congiunge i punti A e B ”.

²Due rette sono distinte se esiste almeno un punto di una delle due rette che non appartiene all'altra retta.

- 4) Se B sta tra A e C , allora A, B, C sono tre punti distinti di una retta e B sta anche tra C e A .
- 5) Dati due punti A e C su una retta r , esiste almeno un punto B che sta tra A e C e almeno un punto D tale che C sta tra A e D .
- 6) Dati tre punti su una retta, ne esiste uno e uno solo che sta tra gli altri due.
- 7) Dati quattro punti A, B, C, D su una retta r , è sempre possibile rinominarli in modo tale che valgano le seguenti:
 - B sta tra A e C e tra A e D ;
 - C sta tra A e D e tra B e D .

Definizione 1.2.1. Siano A, B punti appartenenti a una retta r . L'insieme dei due punti A e B è detto **segmento** e lo si indica con AB o BA . I punti tra A e B si dicono **punti del segmento** AB , o punti **interni** al segmento AB . I punti A e B sono detti **estremi** del segmento AB e tutti gli altri punti della retta r si dicono **esterni** al segmento AB .

- 8) ³Siano A, B, C tre punti non allineati e sia r una retta nel piano ABC che non incontra nessuno dei punti A, B e C . Se la retta r incontra il segmento AB in un punto interno, allora incontra anche il segmento AC , oppure il segmento BC in un punto interno.

Il secondo degli assiomi di ordinamento è tratto in realtà dalla prima edizione de "I Fondamenti della Geometria" ([5]); nell'ultima edizione figura solo la seconda parte di questo come assioma, mentre la prima parte è riportata tra le conseguenze degli assiomi di incidenza (in particolare l'assioma [3]) e degli altri assiomi dell'ordine. L'assioma [7] fu invece riconosciuto nel 1902 da E. H. Moore ([8]) come conseguenza degli altri assiomi di incidenza e dell'ordine, perciò dalla seconda edizione dei Fondamenti in poi, questo risultato divenne noto come "Teorema dei quattro punti". La dimostrazione del Teorema dei quattro punti è trattata anche da Georg Feigl nel suo articolo "Sui principi elementari dell'ordinamento nella Geometria Euclidea", sulla base dei precedenti lavori di Moore e Veblen riguardo l'ordinamento dei punti su una retta.

Le conseguenze degli assiomi dell'ordine sono molteplici e non riguardano soltanto la possibilità di ordinare un insieme qualunque di punti su una retta, ma anche la scomposizione del piano da parte di una retta, di un angolo

³Questo assioma si deve a M. Pasch, che per primo si occupò di studiare in dettaglio gli assiomi di ordinamento.

e di un “poligono piano semplice” in due regioni con la proprietà che due punti qualunque appartenenti alla stessa regione possono essere “connessi”, cioè collegati, dall’unione di un numero finito di segmenti. Nell’enunciare e dimostrare tali conseguenze faremo riferimento all’articolo di Feigl *Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie*, citato dal professor Paul Bernays nella bibliografia del Supplemento I, 1 allegato alla decima edizione de “I Fondamenti della Geometria”.

Teorema 1.2.2. *Dati due punti qualunque A e B su una retta r , esiste un numero infinito di punti tra A e B .*

Dimostrazione. Per l’assioma [5], esiste $C \in r$ tale che C sta tra A e B . Consideriamo allora A e C (o, analogamente, C e B). \implies Per lo stesso assioma, esiste un punto $D \in AC = r$ che sta tra A e C . Applicando lo stesso ragionamento ai punti A e D (o, equivalentemente, ai punti D e C), si ottiene l’esistenza di un altro punto E tra A e D (risp. tra D e C), e così via. \square

Nell’ultima edizione de “I Fondamenti della Geometria”, il sistema assiomatico di Hilbert viene modificato concordemente con l’obiettivo di Hilbert di costruire un insieme minimale di assiomi, ossia tale che ciascun assioma sia indipendente e non deducibile da altri assiomi. Ad esempio, nell’ultima edizione, l’assioma [6] viene modificato e si stabilisce solamente che, dati tre punti su una retta, ne esiste al più uno che sta tra gli altri due, poiché l’esistenza di questo punto discende dal seguente

Teorema 1.2.3. *Siano A , B , C tre punti distinti su una retta r . Allora, almeno uno dei tre punti sta tra gli altri due.*

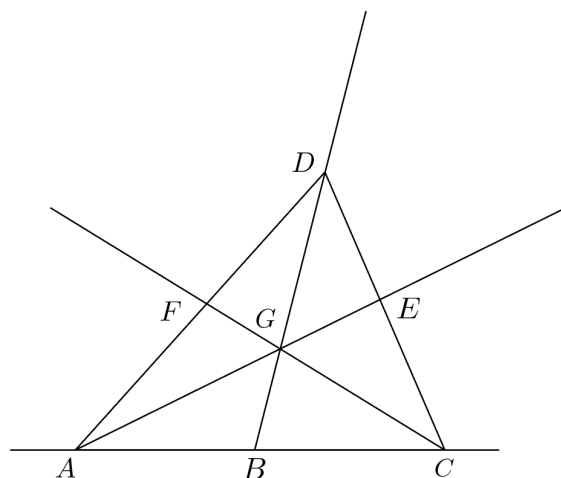


Figura 1.1

Dimostrazione. Supponiamo che A non stia tra B e C e che C non stia tra A e B . Occorre provare che, necessariamente, B sta tra A e C . Per l'assioma [3], esiste un punto $D \notin r$ e, per l'assioma [5], esiste un punto G sulla retta BD che sta tra B e D . Applicando l'assioma di Pasch (assioma [8]) al triangolo BCD e alla retta AG , si ha che, siccome AG non può incontrare il lato BC , in quanto le rette AG e AC sono distinte, AG deve incontrare il lato CD in un punto interno E . Considerando il triangolo ACD , poiché la retta CG non può incontrare né CD , né AC in un punto diverso da C , la retta CG incontra il lato AD del triangolo in un suo punto interno F . Applicando nuovamente l'assioma di Pasch al triangolo AED , si ha che la retta FC , non potendo incontrare il lato DE , incontra il lato AE esattamente nel punto G , da cui segue che G sta tra A ed E . Infine, applicando l'assioma di Pasch al triangolo AEC , si deduce che la retta BD , non potendo incontrare CE , incontra il lato AC nel punto B . Pertanto, B sta tra A e C . \square

Osserviamo che, per ottenere la minimalità del suo sistema assiomatico, Hilbert ha dovuto rinunciare a un po' di eleganza: il teorema appena dimostrato infatti dipende fortemente dall'assioma di Pasch [8], che è un assioma della geometria piana, mentre l'ordinamento dei punti su una retta è chiaramente un problema della geometria lineare. In generale, la scelta di Hilbert di eliminare alcuni assiomi nelle successive edizioni della sua opera, ha il vantaggio logico di ridurre al minimo gli assiomi necessari per la costruzione della Geometria Euclidea (sia nel piano, sia nello spazio) ma, d'altra parte, complica notevolmente questa costruzione poiché richiede di dimostrare

esplicitamente tutto ciò che nelle prime edizioni era dato per assioma. Per questa ragione, nell'elencare gli assiomi dell'ordine, abbiamo scelto di riportare l'assioma [6] nella forma originale in cui compare nella prima edizione de "I Fondamenti della Geometria".

Teorema 1.2.4. *Da ABC ⁴ e ACD seguono BCD e ABD (transitività della relazione "Tra").*

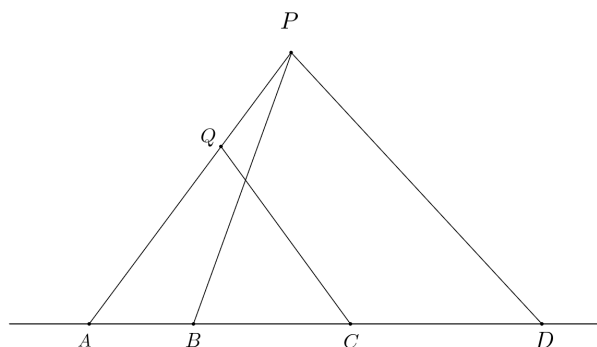


Figura 1.2

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente BCD e ABD :

- a) Dimostrazione di BCD : consideriamo un punto P non appartenente alla retta data e colleghiamolo con A , B e D ; consideriamo poi un punto Q , interno al segmento AP , e colleghiamolo con C ([1], [2], [3], [5]). Applichiamo l'assioma di Pasch ai triangoli PAB , PAD , PBD , utilizzando ogni volta CQ come retta intersecante. Nel triangolo PAB , CQ interseca AP in un punto interno, ma non interseca AB in un punto interno e quindi interseca BP in un punto interno; nel triangolo PAD , CQ interseca AD e AP in un punto interno, dunque CQ non interseca PD in un punto interno. Pertanto, nel triangolo PBD , il lato BD è intersecato da CQ in un punto interno e quindi vale la relazione BCD .
- b) Dimostrazione di ABD : Per l'assioma [6], tra A , B e D può sussistere una sola delle seguenti relazioni: ABD , BAD , ADB , ma la seconda e la terza sono impossibili. Infatti, se valesse ADB , allora ADB e ABC implicherebbero, per [a], DBC , che contraddirebbe BCD per [6]. Analogamente si dimostra che non può valere BAD , dunque non resta che ABD .

⁴Con la scrittura ABC si intende: " B sta tra A e C ".

□

Con tecniche simili e usando la transitività della relazione “Tra” (cfr. [3]) si possono dimostrare anche i seguenti teoremi:

Teorema 1.2.5. ABC e $BCD \implies ABD$ e ACD .

Teorema 1.2.6. ABD e $ACD \implies (ABC$ e $BCD)$ o $(ACB$ e $CBD)$.

Come accennato sopra, l’assioma [7] è riportato nella decima edizione come teorema. Per completezza, ne riportiamo qui la dimostrazione data da Hilbert.

Teorema 1.2.7 (Teorema dei quattro punti). *Dati quattro punti A, B, C, D su una retta r , è sempre possibile rinominarli in modo tale che:*

- B stia tra A e C e tra A e D
- C stia tra A e D e tra B e D .

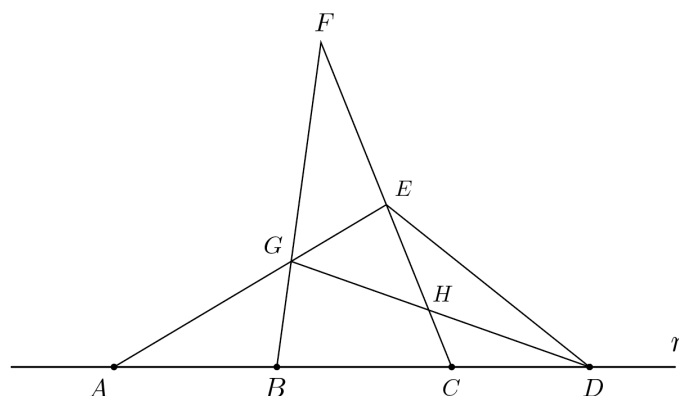


Figura 1.3

Dimostrazione. Siano A, B, C, D quattro punti su una retta r . Per l’assioma [6], fra i punti A, B e C uno solo sta tra gli altri due e, analogamente, fra i punti C, B, D e fra i punti A, C, D , ne esiste uno solo che sta tra gli altri due. Allora, dimostriamo che:

1. $B \in AC$ e $C \in BD \implies B, C \in AD$: per l’assioma [3] esiste un punto $F \notin r$ e, per l’assioma [5], esiste un punto E sulla retta CF che sta tra C ed F . Esattamente come nella dimostrazione del Teorema [1.2.3] (cioè

mediante ripetute applicazioni dell'assioma di Pasch), si deduce che i segmenti AE e BF si incontrano in un punto G e, inoltre, applicando l'assioma di Pasch al triangolo BGD , si ha che la retta CF incontra il lato GD in un punto H (poiché se incontrasse il lato BG in un punto interno, allora AE e BF si incontrerebbero anche in un punto G' che sta tra B e G). Siccome H sta tra G e D e poiché, per l'assioma [6], E non sta tra A e G (perché già G sta tra A ed E per costruzione), allora per l'assioma di Pasch applicato al triangolo ADG , la retta EH interseca il lato AD , dunque C sta tra A e D . Analogamente, applicando l'assioma di Pasch al triangolo AED , si ha che la retta FG incontra il lato AD , e quindi B sta tra A e D .

2. $B \in AC$ e $C \in AD \implies C \in BD$ e $B \in AD$: come prima, sia $F \notin r$ e sia G sulla retta BF tale che G sta tra B ed F (si applicano nuovamente gli assiomi [3] e [5]). Poiché la retta CF non incontra il segmento AB né il segmento BG , per l'assioma di Pasch non può incontrare nemmeno il segmento AG . D'altra parte, $C \in AD$, quindi per l'assioma di Pasch la retta CF incontra il segmento GD in un punto H . Come al punto precedente, per gli assiomi [6] e [8], la retta FH incontra il lato BD del triangolo AGD , dunque C sta tra B e D . Il fatto che anche B stia tra A e D , a questo punto, segue dal caso precedente.

Ora, consideriamo quattro punti qualunque su una retta; dati tre di questi punti, uno solo di essi sta tra gli altri due. Chiamiamo B questo punto e rispettivamente A e C gli altri due. Inoltre, indichiamo con D il quarto punto. Allora, per l'assioma [6], il punto D può stare in una sola delle seguenti posizioni:

- C sta tra A e D
- A sta tra C e D
- D sta tra A e C , mentre B sta tra A e D
- D sta tra A e B
- A sta tra B e D

A meno di rinominare i punti, le prime quattro di queste relazioni soddisfano l'ipotesi del punto 2 (ad esempio, nella seconda si devono scambiare A e C), mentre la quinta soddisfa l'ipotesi del punto 1. Ciò dimostra il Teorema dei quattro punti. \square

Il “Teorema dei quattro punti” si può generalizzare al caso di un qualunque numero finito di punti su una retta utilizzando il principio di induzione (completa):

Teorema 1.2.8 (Generalizzazione del Teorema dei quattro punti). *Dato un numero finito n di punti A, B, C, D, E, \dots, K su una retta, è sempre possibile rinominarli in modo tale che il punto B stia tra A e C , D, E, \dots, K , il punto C stia tra A, B e D, E, \dots, K , il punto D stia tra A, B, C ed E, \dots, K , ecc. Oltre a questo, l'unico altro ordine che soddisfa questa proprietà è l'ordine inverso.*

Il seguente teorema, tratto dall'articolo di Feigl, giustifica la definizione di *semiretta* generata da un punto O su una retta r :

Teorema 1.2.9. *Siano r una retta e $O \in r$. Allora, O divide r in due classi dalle seguenti proprietà:*

1. *Ogni $P \in r - \{O\}$ appartiene a una e una sola delle due classi.*
2. *Due punti $P, Q \in r - \{O\}$ della stessa classe determinano un segmento PQ di cui O è un punto esterno.*
3. *Due punti $P, Q \in r - \{O\}$ di classi distinte determinano un segmento PQ di cui O è un punto interno*

Ciascuna delle due classi è detta semiretta originata da O e giacente sulla retta r .

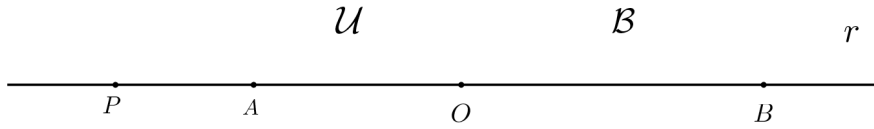


Figura 1.4

Dimostrazione. Siano $A, B \in r$ due punti tali che O sta tra A e B . Definiamo due insiemi \mathcal{U}, \mathcal{B} di punti sulla retta r come segue:

- Sia $P \in r - \{A, O, B\}$. $P \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{\iff} O$ non sta tra A e P .
- Sia $P \in r - \{A, O, B\}$. $P \in \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{\iff} O$ non sta tra B e P

Con questa definizione, ciascun punto $P \in r - \{O\}$ appartiene a uno e uno solo dei due insiemi \mathcal{U} e \mathcal{B} . Infatti, poiché O sta tra A e B , sia PAO , sia APO implicano POB (ovvero: $P \in \mathcal{U} \implies P \notin \mathcal{B}$), mentre se O sta tra A e P , non è possibile che O stia tra P e B perché AOB e AOP implicano PBO , o BPO (dunque, $P \notin \mathcal{U} \implies P \in \mathcal{B}$). Inoltre, se $P, P' \in \mathcal{U}$, allora non è possibile che O stia tra P e P' , poiché se così fosse, assieme ad AOB comporterebbe una tra: AOP e AOP' , cioè $P \notin \mathcal{U}$ o $P' \notin \mathcal{U}$, contro l'ipotesi. Se $P \in \mathcal{U}$ e $Q \in \mathcal{B}$, allora necessariamente O sta tra P e Q (se così non fosse, ad esempio se valesse PQO , allora si avrebbe AQO , oppure QAO , ma comunque “ O non sta tra A e Q ”, ovvero $Q \in \mathcal{U}$, contro l'ipotesi). \mathcal{U} e \mathcal{B} sono dunque le due semirette della retta a uscenti da O . \square

Grazie a questo teorema possiamo definire una relazione d'ordine tra i punti di una retta:

Teorema 1.2.10. *Sia r una retta. Siano O un punto sulla retta r e \mathcal{U} , \mathcal{B} le semirette da esso generate. Per i punti della retta r definiamo la seguente relazione binaria, espressa dalla parola “prima”, o dal simbolo $<$:*

- $P < O$, se $P \in \mathcal{U}$
- $O < Q$, se $Q \in \mathcal{B}$
- $P < Q$, se $P \in \mathcal{U}$ e $Q \in \mathcal{B}$
- $P < P'$, se $P, P' \in \mathcal{U}$ e P' sta tra P e O
- $Q < Q'$, se $Q, Q' \in \mathcal{B}$ e Q sta tra O e Q' .

Allora, “prima” è una relazione d'ordine totale.

Dimostrazione. Occorre provare che “prima” soddisfa le proprietà che definiscono una relazione d'ordine:

- *Proprietà riflessiva.* Basta osservare che se $P, P' \in \mathcal{U}$ e $P = P'$, allora vale la penultima delle relazioni esposte sopra; similmente, se $Q, Q' \in \mathcal{B}$ e $Q = Q'$, allora vale l'ultima delle relazioni enunciate.
- *Proprietà antisimmetrica.* Distinguiamo diversi casi:
 - Sia $P \in \mathcal{U}$ tale che $P < O$ e $O < P \implies P \in \mathcal{B}$ per definizione di “prima” \implies necessariamente $P = O$ poiché le semirette \mathcal{U} e \mathcal{B} sono disgiunte.
 - Siano $P, P' \in \mathcal{U}$ tali che $P < P'$ e $P' < P \implies P'$ sta tra P e O e P sta tra P' e O , dunque $P = P'$ per l'assioma 6.

- Se $Q, Q' \in \mathcal{B}$ sono tali che $Q < Q'$ e $Q' < Q \implies Q$ sta tra O e Q' e Q' sta tra O e Q , dunque $Q = Q'$ per l'assioma 6).
- Se $P \in \mathcal{U}$ e $Q \in \mathcal{B}$ sono tali che $P < Q$ e $Q < P \implies Q \in \mathcal{U}$ e $P \in \mathcal{B}$ per definizione di “prima”. Pertanto, $P = Q = O$ perché le semirette sono disgiunte.
- Infine, sia $Q \in \mathcal{B}$ tale che $Q < O$ e $O < Q \implies Q \in \mathcal{U}$, dunque $Q = O$ di nuovo, perché le semirette sono disgiunte.

Ciò dimostra che la relazione “prima” è antisimmetrica.

- *Proprietà transitiva.* Anche qui, occorre considerare diverse situazioni:
 - Siano $P, Q \in r$ tali che $O < Q$ e $Q < P \implies$ per definizione di $<$, dalla prima relazione segue che $Q \in \mathcal{B}$, mentre dalla seconda segue che $P \in \mathcal{B}$ e quindi $O < P$.
 - Siano $P, P' \in \mathcal{U}$ e $Q \in r$ tali che $P < P'$ e $P' < Q \implies P, P' \in \mathcal{U}$ e P' sta tra P e O . Allora, se $Q \in \mathcal{U}$, $P < Q$ per la transitività della relazione “Tra”; se $Q \in \mathcal{B}$, si ha $P \in \mathcal{U}$ e $Q \in \mathcal{B}$, quindi $P < Q$ per definizione di $<$.
 - Se $P, P', P'' \in \mathcal{U}$ sono tali che $P < P'$ e $P' < P'' \implies P'$ sta tra P e O e P'' sta tra P' e O . Allora, P'' sta anche tra P e O , dunque $P < P''$ per definizione di $<$.

In maniera simile si ragiona nei casi in cui, al posto di $P, P', P'' \in \mathcal{U}$ si considerano $Q, Q', Q'' \in \mathcal{B}$.

Questo dimostra che “prima” è una relazione d'ordine tra i punti di una retta. Si può infine dimostrare che questo ordine è totale. Infatti, siano $P, Q \in r$ punti distinti:

- Se $Q = O \implies P < O$ o $O < P$ perché se $P \neq O$, allora P appartiene a una e una sola delle due semirette \mathcal{U} e \mathcal{B} .
- Se $Q \in \mathcal{B}$ e $P \in \mathcal{U}$, allora $P < Q$ per definizione di $<$.
- Se $Q \in \mathcal{U}$ e $P \in \mathcal{B}$, allora $Q < P$ per definizione di $<$.
- Se entrambi $P, Q \in \mathcal{U}$, allora vale una e una sola delle seguenti: PQO , QPO . Nel primo caso, $P < Q$; nel secondo caso, $Q < P$ per definizione di $<$.
- Se entrambi $P, Q \in \mathcal{B}$, allora vale una e una sola delle seguenti: OPQ , OQP . Nel primo caso, $P < Q$; nel secondo caso, $Q < P$ per definizione di $<$.

Quindi $<$ è un ordine totale. \square

I risultati che seguono riguardano l'ordinamento dei punti su un piano, in particolare la scomposizione del piano da parte di una retta e di un angolo in due "regioni", che si possono vedere come due classi d'equivalenza rispetto a una relazione d'equivalenza che definiremo opportunamente.

Cominciamo con la seguente

Definizione 1.2.11. Chiamiamo **curva poligonale** o semplicemente **poligonale** oppure ancora **cammino** l'unione di un numero finito di segmenti $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ con $n \geq 2$ (in particolare, per $n = 2$, la poligonale si riduce ad un singolo segmento). Questi segmenti si chiamano **lati** della poligonale, mentre i punti A_1, A_2, \dots, A_n sono i suoi **vertici**. Inoltre, se $A_1 = A_n$, la poligonale si dice **chiusa** (in tal caso, la si chiama semplicemente **poligono**), altrimenti si dice **aperta**. Infine, se la poligonale "non ha autointersezioni", cioè nessun punto interno di ciascun lato appartiene a più di un lato e nessun vertice è comune a più di due lati, la poligonale si dice **semplice**.

Consideriamo ora un piano α e un insieme di punti $\mathcal{V} \subset \alpha$. Definiamo una relazione tra i punti di $\alpha - \mathcal{V}$:

$$P \sim_{\mathcal{V}} Q \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \mathcal{C} = C_1 \dots C_n \subset \alpha - \mathcal{V} \text{ poligonale t.c. } C_1 = P, C_n = Q$$

cioè $\forall P, Q \in \alpha - \mathcal{V}, P \sim_{\mathcal{V}} Q \iff$ esiste una poligonale \mathcal{C} in $\alpha - \mathcal{V}$ che congiunge P e Q .

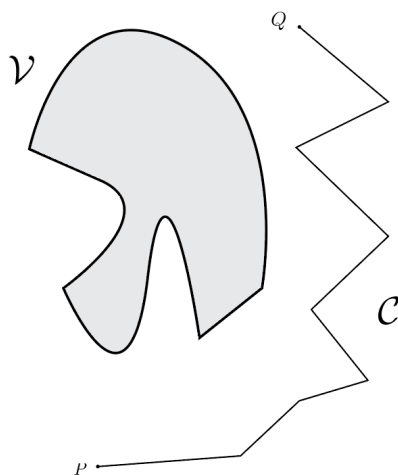


Figura 1.5

Proposizione 1.2.12. $\sim_{\mathcal{V}}$ è una relazione d'equivalenza tra i punti di $\alpha - \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Occorre provare che $\sim_{\mathcal{V}}$ soddisfa le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva che definiscono una relazione d'equivalenza:

- Naturalmente, $P \sim_{\mathcal{V}} P$, $\forall P \in \alpha - \mathcal{V}$, perché basta considerare come poligonale \mathcal{C} il segmento degenero PP costituito dal solo punto P .
- Siano $P, Q \in \alpha - \mathcal{V}$ tali che $P \sim_{\mathcal{V}} Q$. Allora, esiste $\mathcal{C} = C_1 \dots C_n \subset \alpha - \mathcal{V}$ poligonale tale che $C_1 = P$ e $C_n = Q$. $\implies \mathcal{C}' = C_n C_{n-1} \dots C_1$, cioè la poligonale percorsa in senso inverso, è una poligonale in $\alpha - \mathcal{V}$ che congiunge Q e P , dunque $Q \sim_{\mathcal{V}} P$.
- Siano $P, Q, R \in \alpha - \mathcal{V}$ tali che $P \sim_{\mathcal{V}} Q$ e $Q \sim_{\mathcal{V}} R$. Allora, esistono una poligonale $\mathcal{C} = C_1 \dots C_n \subset \alpha - \mathcal{V}$ tale che $C_1 = P$ e $C_n = Q$, e una poligonale $\mathcal{C}' = C'_1 \dots C'_m \subset \alpha - \mathcal{V}$ tale che $C'_1 = Q$ e $C'_m = R$. Allora, la poligonale

$$\mathcal{C}'' = P \dots \mathcal{C} \dots Q \dots \mathcal{C}' \dots R$$

non incontra \mathcal{V} e congiunge P ed R . Dunque, $P \sim_{\mathcal{V}} R$, cioè $\sim_{\mathcal{V}}$ è transitiva.

$\sim_{\mathcal{V}}$ è pertanto una relazione d'equivalenza su $\alpha - \mathcal{V}$. □

Osservazione: Nella definizione di $\sim_{\mathcal{V}}$ possiamo richiedere di più, cioè possiamo definire una relazione $\sim'_{\mathcal{V}}$ tra i punti di $\alpha - \mathcal{V}$ dicendo che due punti $P, Q \in \alpha - \mathcal{V}$ sono equivalenti se esiste una poligonale semplice \mathcal{C} che congiunge P e Q senza incontrare \mathcal{V} in alcun punto. Si può dimostrare che anche $\sim'_{\mathcal{V}}$ è una relazione d'equivalenza: la proprietà riflessiva e la proprietà simmetrica si dimostrano come sopra; per quanto riguarda la proprietà transitiva invece, adottando le stesse notazioni usate nella dimostrazione precedente, supponiamo che le poligonali \mathcal{C} e \mathcal{C}' siano semplici:

- Se $R \in \mathcal{C}$, la poligonale \mathcal{C} percorsa da P fino a R è semplice e congiunge P ed R senza incontrare \mathcal{V} .
- Se $R \notin \mathcal{C}$, allora percorriamo la poligonale \mathcal{C} da P a Q . Su di essa, esiste un primo lato $C_i C_{i+1}$ che interseca la poligonale \mathcal{C}' ; sul lato $C_i C_{i+1}$ (orientato da C_i a C_{i+1}), sia Q' il primo di questi punti d'intersezione⁵. Allora, la poligonale

$$\mathcal{C}'' = P \dots \mathcal{C} \dots C_i Q' \dots \mathcal{C}' \dots R$$

è semplice e collega P ed R senza incontrare \mathcal{V} .

⁵Se esiste un intero lato di \mathcal{C}' che giace su \mathcal{C} , basta considerare gli estremi di questo lato su $C_i C_{i+1}$.

Si può inoltre dimostrare che le relazioni $\sim_{\mathcal{V}}$ e $\sim'_{\mathcal{V}}$ sono equivalenti, cioè $P \sim_{\mathcal{V}} Q$ se e solo se $P \sim'_{\mathcal{V}} Q$.

Grazie a questa proposizione, è ben posta la seguente

Definizione 1.2.13. *Sia α un piano e sia $\mathcal{V} \subset \alpha$ un insieme di punti. Si chiamano **regioni** del piano α determinate da \mathcal{V} le classi d'equivalenza determinate dalla relazione d'equivalenza $\sim_{\mathcal{V}}$. Un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset \alpha$ si dice **connesso per poligonali** se per ogni $P, Q \in \mathcal{R}$, esiste una poligonale $C \subset \mathcal{R}$ che collega P e Q .*

Il Teorema che segue è riportato nella decima edizione de “I Fondamenti della Geometria” come “Teorema 8” e stabilisce che una retta che giace su un piano divide quest'ultimo esattamente in due regioni, che chiamiamo **semipiani**.

Teorema 1.2.14. *Sia a una retta che giace su un piano α . Allora, a divide α esattamente in due regioni. Due punti qualsiasi della stessa regione determinano un segmento che non contiene alcun punto di a ; due punti appartenenti a regioni distinte determinano un segmento che incontra la retta a esattamente in un punto.*

Dimostrazione. Nel dimostrare questo teorema, definiamo la relazione d'equivalenza \sim_a in maniera più stringente rispetto alla sua definizione originale, cioè diciamo che $\forall P, Q \in \alpha - a$,

$$P \sim_{a|} Q \iff PQ \cap a = \emptyset$$

La relazione $\sim_{a|}$ è ancora una relazione d'equivalenza tra i punti di $\alpha - a$. Infatti, è chiaro che $\sim_{a|}$ è riflessiva e simmetrica ma, d'altra parte, se $P \sim_{a|} Q$ e $Q \sim_{a|} R$, allora anche $P \sim_{a|} R$ poiché, se la retta a incontrasse il segmento PR in un punto interno, per l'assioma di Pasch, a dovrebbe incontrare anche il punto Q , oppure un punto interno del lato PQ o del lato QR del triangolo PQR . Pertanto, $\sim_{a|}$ è anche transitiva.

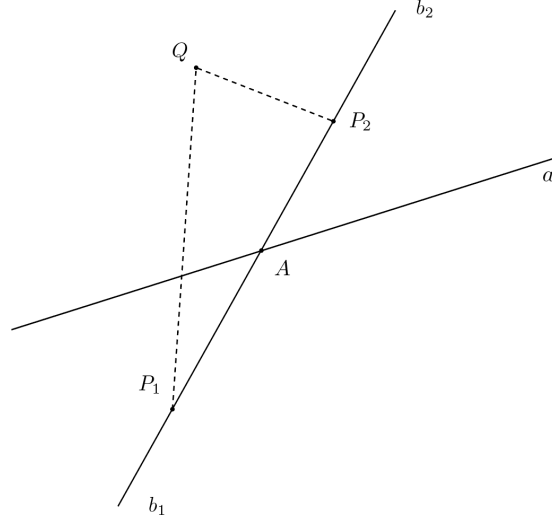


Figura 1.6

il fatto che $\sim_{a|}$ determini almeno due classi d'equivalenza in $\alpha - a$ si può verificare se tracciamo una retta b che interseca la retta a nel punto A . Per il Teorema 1.2.9, il punto A divide b in due semirette b_1 e b_2 . $\implies \forall P_1 \in b_1$ e $P_2 \in b_2$, si ha che $P_1 \not\sim_{a|} P_2$ poiché il segmento P_1P_2 incontra la retta a nel punto A . Allora, se $P_1 \in b_1$, $P_2 \in b_2$ e $Q \in \alpha - (a \cup b) \implies Q \sim_{a|} P_1$ o $Q \sim_{a|} P_2$. Infatti, applichiamo l'assioma di Pasch al triangolo P_1P_2Q e alla retta a , che interseca il lato P_1P_2 nel punto A : se a incontra il lato P_1Q , allora Q appartiene alla stessa classe di P_2 ; se incontra P_2Q , allora Q appartiene alla stessa classe di P_1 . Dunque, $\sim_{a|}$ determina esattamente due classi di equivalenza. Infine, osserviamo che se $P, Q \in \alpha - a$ sono tali che $P \not\sim_{a|} Q$, allora $P \not\sim_a Q$ (da cui $P \sim_a Q \implies P \sim_{a|} Q$), cioè non può esistere una poligonale che collega P e Q in $\alpha - a$, poiché se esistesse, ogni segmento della poligonale non incontrerebbe la retta a , quindi, per transitività della relazione $\sim_{a|}$, si dovrebbe avere $P \sim_{a|} Q$, contro l'ipotesi. Siccome si ha anche $P \sim_{a|} Q \implies P \sim_a Q$, allora:

$$P \sim_a Q \iff P \sim_{a|} Q$$

Dunque a divide il piano esattamente in due regioni. □

Definizione 1.2.15. Siano α un piano e h, k due semirette distinte uscenti da un punto $O \in \alpha$ e relative a rette distinte. La coppia di semirette h ,

k è detta **angolo** e si indica con $\angle(h, k)$ o $\angle(k, h)$. Le semirette k e h si chiamano **lati** dell'angolo e il punto O **vertice** dell'angolo.⁶

Più impegnativo è dimostrare che anche un angolo divide il piano esattamente in due regioni, che chiamiamo **interno** ed **esterno**. Hilbert in realtà enuncia senza dimostrazione questo risultato all'inizio della sua trattazione degli assiomi di congruenza, dopo aver dato la definizione di *angolo* (1.2.15), presentandolo come semplice conseguenza dei primi due gruppi di assiomi. Altrettanto “semplici”, secondo Hilbert, sarebbero alcuni corollari di questo teorema, come il fatto che due punti appartenenti a semirette distinte di un angolo determinano un segmento che, eccetto per gli estremi, è tutto contenuto nell’ “interno” dell'angolo.

Teorema 1.2.16. *Un angolo w divide il piano α su cui giace esattamente in due regioni. Una di queste, quella interna all'angolo, ha la proprietà che due punti qualunque possono essere collegati da un unico segmento, mentre nell'altra regione, quella esterna, generalmente due punti possono essere collegati da una poligonale semplice di almeno due lati.*

Dimostrazione. Siano g e h due rette con intersezione nel punto S . Esse sono scomposte da S in due semirette ciascuna: g_1, g_2 e h_1, h_2 rispettivamente. Per il teorema precedente inoltre, g determina i semipiani $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ e h determina i semipiani $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Scegliamo le notazioni in modo tale che:

$$g_1 \subset \mathcal{H}_1, g_2 \subset \mathcal{H}_2, h_1 \subset \mathcal{G}_1 \text{ e } h_2 \subset \mathcal{G}_2$$

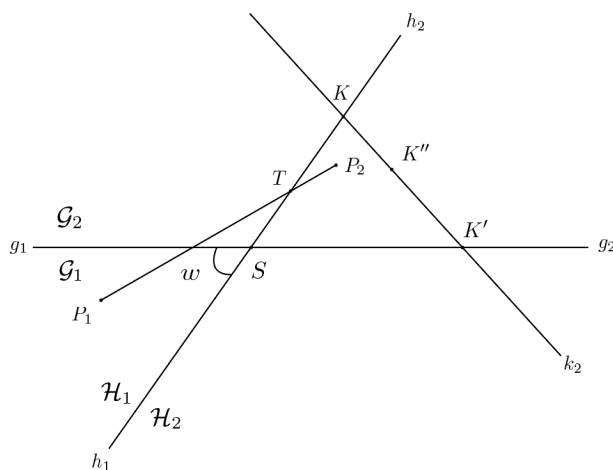


Figura 1.7

⁶Anche in questa definizione, come nella 1.2.1, non si fa riferimento a un'orientazione dell'angolo.

Dimostreremo la tesi del Teorema per l'angolo

$$w = \angle(g_1, h_1)$$

Prima di tutto, dimostriamo che $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{H}_k \neq \emptyset$ per ogni $i, k = 1, 2$:

- $\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$: consideriamo una retta k che passa per un punto $K \in h_2$. Sia k_2 la semiretta uscente da K contenuta in \mathcal{H}_2 . Se $k_2 \cap g = \emptyset$, allora $k_2 \subset \mathcal{G}_2$ perché $K \in \mathcal{G}_2$ in quanto $K \in h_2$ e per costruzione $h_2 \subset \mathcal{G}_2$; dunque $k_2 \subset \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_2$. Se invece $k_2 \cap g \neq \emptyset$, allora sia $K' \in k_2 \cap g$. $\implies K' \in \mathcal{H}_2$ perché $k_2 \subset \mathcal{H}_2$; dunque $K' \in g_2$. Pertanto, dato K'' tra K e K' , si ha che $K'' \in \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_2$.
- $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_1 \neq \emptyset$: consideriamo una retta k che interseca h_1 in K . Sia k_2 la semiretta uscente da K che è contenuta in \mathcal{H}_1 . Come sopra, se $k_2 \cap g = \emptyset \implies k_2 \subset \mathcal{G}_1$ perché $K \in h_1$ e per costruzione $h_1 \subset \mathcal{G}_1$; dunque $k_2 \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_1$. Se invece $k_2 \cap g \neq \emptyset$, sia $K' \in k_2 \cap g$. Allora, $K' \in \mathcal{H}_1$ perché $k_2 \subset \mathcal{H}_1$ e quindi $K' \in g_1$; se K'' è un punto che sta tra K e $K' \implies K'' \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_1$, dunque $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_1 \neq \emptyset$.
- I restanti casi $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ e $\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_1 \neq \emptyset$ si dimostrano in maniera analoga: si considera una retta passante per un punto K della retta h_i e si sceglie la semiretta uscente da K che è contenuta nel semipiano \mathcal{H}_j ($j \neq i$) e poi si distingue il caso in cui tale semiretta incontra g da quello in cui non la incontra, ottenendo, in ciascuna delle due situazioni, un punto in $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{H}_j$.

A questo punto, definiamo:

$$I(w) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_1$$

$$E(w) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{H}_2$$

e dimostriamo che $I(w)$ ed $E(w)$ sono proprio le regioni cercate e, in particolare, $I(w)$ è l'interno dell'angolo, mentre $E(w)$ è l'esterno:

dalle definizioni di $I(w)$ ed $E(w)$ segue immediatamente che per ogni $P \in \alpha - w$, $P \in I(w)$ o $P \in E(w)$. Se $P_1, Q_1 \in I(w)$, allora ogni punto del segmento P_1Q_1 appartiene a $I(w)$ (se così non fosse, tale segmento dovrebbe incontrare g o h , ma ciò non può accadere perché P_1 e Q_1 sono punti degli stessi semipiani sia rispetto alla retta g sia rispetto alla retta h), cioè $P_1 \sim_w Q_1$. Se $P_2, Q_2 \in E(w)$, allora distinguiamo diversi casi:

- Se $P_2, Q_2 \in \mathcal{G}_2 \implies P_2Q_2 \cap g = \emptyset$. P_2Q_2 può intersecare la retta h in un punto di h_2 , ma comunque il segmento P_2Q_2 non interseca l'angolo w . Lo stesso vale se $P_2, Q_2 \in \mathcal{H}_2$.

- Se $P_2 \in \mathcal{G}_2$ e $Q_2 \in \mathcal{H}_2$, consideriamo un terzo punto $R \in \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_2$. I segmenti P_2R e RQ_2 non incontrano w per i casi precedenti, quindi collegano P_2 e Q_2 senza incontrare w .

Pertanto, comunque si scelgano $P_2, Q_2 \in E(w)$, si ha che $P_2 \sim_w Q_2$. Resta ora da dimostrare che per ogni $P_1 \in I(w)$ e per ogni $P_2 \in E(w)$, il segmento P_1P_2 ha esattamente un punto in comune con w : se $P_2 \in \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_1$ o $P_2 \in h_2$, allora il segmento P_1P_2 ha esattamente un punto in comune con g , ma nessun punto in comune con h (segue dall'applicazione del teorema precedente ai punti P_1 e P_2 , osservando che P_1 e P_2 appartengono a semipiani distinti di g). Tuttavia, poiché $P_1P_2 - \{P_1, P_2\} \subset \mathcal{H}_1$, questo punto d'intersezione si trova su g_1 , dunque su w . Il caso in cui $P_2 \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_2$ o $P_2 \in g_2$ si tratta in maniera analoga (in questo caso, P_1P_2 interseca h_1 esattamente in un punto perché P_1 e P_2 sono entrambi in \mathcal{G}_1). Infine, se $P_2 \in \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_2$, allora il segmento P_1P_2 deve intersecare entrambe le rette g e h . Nel caso più semplice, P_1P_2 interseca g e h nel vertice S . Se il segmento P_1P_2 , a partire da P_2 incontra per prima h in un punto T , allora T si trova nello stesso semipiano di P_2 rispetto a g , cioè in \mathcal{G}_2 (se fosse in \mathcal{G}_1 , vorrebbe dire che prima ha incontrato g); dunque, $T \in h_2$. Per quanto dimostrato sopra, il segmento P_1T interseca l'angolo w esattamente in un punto. Il caso in cui il segmento P_1P_2 , a partire da P_2 incontra per prima g si tratta in modo analogo. Poiché ogni segmento P_1P_2 interseca l'angolo w esattamente in un punto, concludiamo, come nella dimostrazione del Teorema [1.2.14](#), che qualsiasi poligonale che collega P_1 e P_2 deve incontrare l'angolo w : se \mathcal{C} è una poligonale che congiunge P_1 e P_2 , deve esistere un lato V_1V_2 di \mathcal{C} tale che $V_1 \in I(w)$ e $V_2 \in E(w) \cup w$; dunque, V_1V_2 incontra w esattamente in un punto. Ciò dimostra che l'angolo w divide il piano α esattamente nelle due regioni $I(w)$ ed $E(w)$; il fatto che non coincidano è chiaro dalla loro definizione. Infine, avendo già osservato, nel corso della dimostrazione, che poligonali di due lati sono sufficienti per connettere due punti qualunque in $E(w)$, è dimostrata anche la seconda parte del Teorema, riguardo le proprietà della regione esterna. \square

Da questo teorema seguono i seguenti, semplici corollari:

Corollario 1.2.17. *L'esterno di un angolo contiene sempre delle rette.*

Dimostrazione. Siano $P \in g_2$ e $Q \in h_2$. \implies La retta che collega P e Q è tutta contenuta in $E(w)$ perché, da un lato la semiretta uscente da P e passante per Q è tutta contenuta in \mathcal{G}_2 in quanto $Q \in h_2 \subset \mathcal{G}_2$ e, d'altra parte, la semiretta uscente da Q e passante per P è tutta contenuta in \mathcal{H}_2 perché $P \in g_2 \subset \mathcal{H}_2$. \square

Per dimostrare invece che l'interno di un angolo non contiene delle rette, dobbiamo invocare l'assioma delle parallele, di cui discuteremo più avanti in questo capitolo: se a fosse una retta tutta contenuta nell'angolo w , allora a non dovrebbe intersecare né g né h , quindi dovrebbe essere parallela a una coppia di rette incidenti, ma ciò non può accadere nella Geometria Euclidea. Tuttavia, l'interno di un angolo contiene delle semirette: consideriamo infatti un punto $A \in I(w)$; allora, la semiretta uscente da S e passante per A è tutta contenuta in \mathcal{G}_1 e in \mathcal{H}_1 per proprietà dei semipiani, quindi la semiretta è tutta contenuta in $I(w)$.

Corollario 1.2.18. *Il segmento (estremi esclusi) congiungente due punti sui lati di un angolo è costituito interamente da punti interni all'angolo.*

Dimostrazione. La semiretta uscente dal punto A e contenente B è contenuta nel semipiano \mathcal{G}_1 e la semiretta uscente da B e contenente A è contenuta nel semipiano \mathcal{H}_1 . Pertanto, tutto il segmento AB (estremi esclusi) è contenuto in $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_1 = I(w)$. \square

Simile a questo è il seguente:

Corollario 1.2.19. *Sia l una semiretta uscente dal vertice S e contenuta in $I(w)$, siano $A \in g_1$ e $B \in h_1$. Allora, $l \cap AB - \{A, B\} \neq \emptyset$, cioè l interseca il segmento AB in un punto interno.*

Dimostrazione. Sia $C \in g_2$. \implies Il lato AC del triangolo ABC è intersecato dalla retta relativa a l in un punto interno. Tale retta è interamente contenuta in $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_1$ e $\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{H}_2$ poiché non interseca g_1 né h_1 , e non può incontrare il lato BC perché i punti interni di quest'ultimo sono in $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{H}_2$. Dall'assioma di Pasch segue che l incontra AB in un punto interno. \square

Osserviamo che sulla base di questo risultato è possibile ordinare le semirette uscenti dal vertice S contenute all'interno dell'angolo w : fissiamo due punti $A \in g_1$, $B \in h_1$. \implies Ogni semiretta uscente da S e interna a w interseca AB in un punto interno. Avendo già dimostrato che i punti di una retta costituiscono un insieme ordinato, identificando ciascuna semiretta con il corrispondente punto d'intersezione con AB , si possono ordinare le semirette attraverso l'ordine determinato da questi punti sul segmento AB .

1.3 Assioma delle parallele

Detto anche “assioma di Euclide”, l'assioma delle parallele è forse il più celebre della Geometria Euclidea nella letteratura matematica. La dimostrazione

della sua indipendenza causò problemi a matematici di spicco fra cui Gauss, Bolyai e Lobačevskij; questi problemi si risolsero con l'introduzione della cosiddetta “Geometria Iperbolica”, un modello di geometria che soddisfa tutti gli assiomi della Geometria Euclidea, a eccezione dell'assioma delle parallele. Ricordiamo che due rette che giacciono su uno stesso piano si dicono **parallele** se non hanno punti in comune.

- 9) *Sia r una retta e sia P un punto non appartenente a essa. Allora esiste un'unica retta s passante per il punto P e parallela alla retta r .*

L'assioma delle parallele contiene quindi due asserzioni: la prima è l'esistenza di una retta passante per P e parallela a r ; la seconda è l'unicità di questa retta. L'assioma concerne tuttavia solo l'unicità della parallela, in quanto l'esistenza è dimostrabile come conseguenza degli assiomi di congruenza. Riguardo alla seconda affermazione, vale invece questo risultato:

Teorema 1.3.1. *La seconda affermazione dell'assioma delle parallele è equivalente alla seguente:*

Siano r , s due rette parallele a una terza retta t . Allora, r ed s sono parallele tra loro.

Dimostrazione. Siano r , s e t tre rette distinte tali che r ed s sono entrambe parallele a t . Se per assurdo r ed s avessero un punto P in comune, r ed s sarebbero due rette parallele a t e passanti per $P \notin t$ ($P \notin t$ perché per ipotesi r ed s non hanno alcun punto in comune con t), in contraddizione con la seconda parte dell'assioma delle parallele. Viceversa, siano r una retta e $P \notin r$. Se per assurdo esistessero due rette s ed s' parallele a r e passanti per P , si avrebbe che $s \cap s' = \{P\}$, cioè s ed s' non sarebbero parallele, mentre dovrebbero esserlo perché entrambe parallele a una terza retta. \square

1.4 Assiomi di congruenza

Con gli assiomi di congruenza, Hilbert definisce una relazione di “congruenza” fra segmenti e angoli, delineandone le principali proprietà (in particolare le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva).

I segmenti, così come gli angoli, stanno fra loro in una certa relazione che indichiamo con le parole **congruente** o **uguale**.

- 10) *Se A e B sono punti appartenenti a una retta r e A' è un punto sulla stessa o su un'altra retta r' , allora è possibile determinare un punto B' su una delle due semirette di r' determinate da A' tale che il segmento AB è congruente, o uguale al segmento $A'B'$.*

- 11) Se un segmento $A'B'$ e un segmento $A''B''$ sono congruenti a un terzo segmento AB , allora il segmento $A'B'$ è congruente al segmento $A''B''$, ovvero: se due segmenti sono entrambi congruenti a un terzo segmento, allora sono congruenti fra loro.
- 12) Siano AB e BC due segmenti su una retta r che hanno solo il punto B in comune e siano, sulla stessa o su un'altra retta r' , $A'B'$ e $B'C'$ due segmenti che non hanno punti in comune al di fuori di B' . Se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, allora $AC \equiv A'C'$
- 13) Siano $\sphericalangle(h, k)$ un angolo su un piano α e r' una retta su un piano α' . Sia inoltre fissato uno dei due semipiani di r' e sia h' una semiretta della retta r' uscente da un punto O' . Allora esiste nel piano α' una e una sola semiretta k' tale che l'angolo $\sphericalangle(h, k)$ è congruente all'angolo $\sphericalangle(h', k')$ e, al tempo stesso, tutti i punti interni dell'angolo $\sphericalangle(h', k')$ appartengono al semipiano di r' fissato. Ogni angolo è congruente a se stesso, ovvero, $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k)$ è sempre vero.
- 14) Dati due triangoli ABC e $A'B'C'$ ⁷, se $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, allora $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$.

Osserviamo che gli assiomi 10-12 riguardano la congruenza di segmenti, mentre gli assiomi 13 e 14 concernono la congruenza di angoli, perciò chiamiamo i primi assiomi *lineari* di congruenza, mentre chiamiamo i secondi assiomi *piani* di congruenza. Gli assiomi di congruenza consentono di definire le nozioni di *congruenza* (o *uguaglianza*) fra elementi della Geometria Euclidea. A partire da questa relazione di congruenza, si possono definire la *lunghezza* di un segmento e l'*ampiezza* di un angolo, nonché il concetto di *movimento rigido*. Anzi, Hilbert stesso asserisce che l'esistenza del gruppo delle isometrie dello spazio dipende unicamente dagli assiomi di incidenza, gli assiomi di ordinamento e, soprattutto, gli assiomi di congruenza. Fra le conseguenze degli assiomi di congruenza, troviamo i ben noti criteri di congruenza per i triangoli e il Teorema dell'angolo esterno.

L'assioma 10) concerne la possibilità di costruire un segmento su una delle due semirette individuate da un punto su una retta assegnata. Nella prima edizione de "I Fondamenti della Geometria", nello stesso assioma si stabiliva anche l'unicità della costruzione, cioè l'unicità del punto B' sulla semiretta fissata di r' tale che $AB \equiv A'B'$. Nella decima edizione, Hilbert modifica tale assioma nella forma in cui è stato riportato sopra: non è necessario assumere

⁷Qui e nel seguito, i vertici di un triangolo si assumeranno sempre non allineati.

l'unicità della costruzione, poiché questa si può ricavare come conseguenza dell'assioma [14] e dell'assioma [13], il quale stabilisce invece che un qualunque angolo su un piano può essere costruito in modo unico su uno dei due semipiani determinati da una retta assegnata sullo stesso o su un altro piano. Infatti, sia r una retta e siano $A, B \in r$; siano r' un'altra retta e $A' \in r'$.

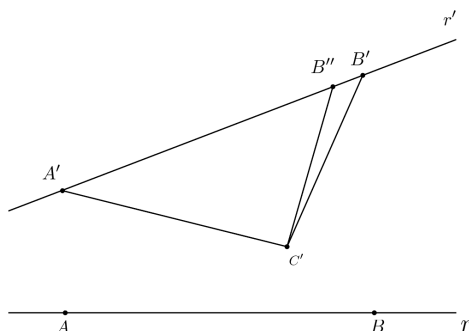


Figura 1.8

Supponiamo per assurdo che esistano $B', B'' \in r'$ punti distinti tali che $AB \equiv A'B' \equiv A'B''$. Consideriamo un punto $C' \notin r' = A'B'$. $\implies A'B' \equiv A'B''$, $A'C' \equiv A'C'$ e $\angle C'A'B' \equiv \angle C'A'B'' \implies$ per l'assioma [14] $\angle A'C'B' \equiv \angle A'C'B''$, ma ciò contraddice [13] (la semiretta $C'B'$ deve essere unica). Per quanto riguarda gli angoli, sono utili le seguenti definizioni:

Definizione 1.4.1. Due angoli aventi un vertice e un lato in comune e i cui lati (diversi da quello in comune) sono allineati si dicono **supplementari**. Due angoli con un vertice in comune e i cui lati sono a due a due allineati, si dicono **opposti al vertice**. Infine, un angolo che è congruente a uno dei suoi angoli supplementari si chiama **angolo retto**.

Il primo teorema di questa sezione è un classico risultato della Geometria Euclidea, utilizzato frequentemente nelle dimostrazioni di Geometria elementare:

Teorema 1.4.2. In un triangolo, angoli opposti a due lati congruenti sono congruenti, ovvero: gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.

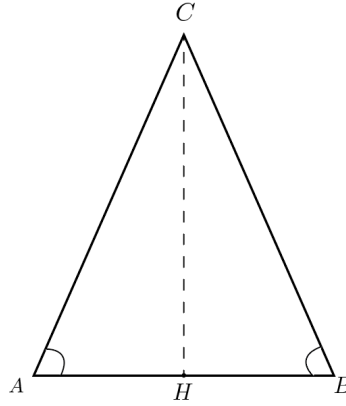


Figura 1.9

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo isoscele con base AB . Consideriamo i triangoli ABC e BAC : $BC \equiv AC$, $AC \equiv BC$ e, per l'ultima parte dell'assioma [13], l'angolo in C è congruente a se stesso. Per l'assioma, [14], gli angoli $\sphericalangle CAB$ e $\sphericalangle CBA$ sono congruenti. \square

Passiamo ora ai famosi criteri di congruenza per i triangoli.

Definizione 1.4.3. *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli. Essi si dicono **congruenti** se hanno i lati a due a due congruenti e gli angoli a due a due congruenti, ovvero se:*

- $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $AC \equiv A'C'$ e,
- $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$.

Il primo criterio di congruenza è un'immediata conseguenza degli assiomi [13] e [14]:

Teorema 1.4.4 (1° Criterio di congruenza per i triangoli). *Siano ABC , $A'B'C'$ due triangoli tali che*

$$AB \equiv A'B' \quad AC \equiv A'C' \quad \text{e} \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

Allora, i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti (cioè $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ e $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$).

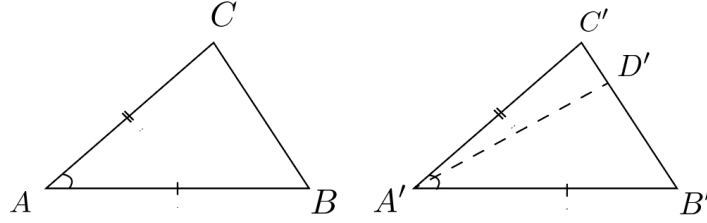


Figura 1.10

Dimostrazione. Se $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \implies$ per l'assioma [14](#)), $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ e anche $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ (basta scambiare i ruoli di B e C). Resta dunque da dimostrare che $BC \equiv B'C'$. Supponiamo per assurdo che non sia così. \implies Per l'assioma [10](#)), sulla retta $B'C'$, esiste un unico punto D' tale che $BC \equiv B'D'$. Consideriamo allora i triangoli ABC e $A'B'D'$: $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'D'$ e $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'D'$. $\implies \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle D'A'B'$. D'altra parte, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$; ciò contraddice l'unicità della costruzione dell'angolo in [13](#)) e quindi dimostra che $BC \equiv B'C'$. \square

Teorema 1.4.5 (2° Criterio di congruenza per i triangoli). *Siano ABC , $A'B'C'$ due triangoli tali che*

$$AB \equiv A'B' \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \quad \text{e} \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$$

Allora, i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti.

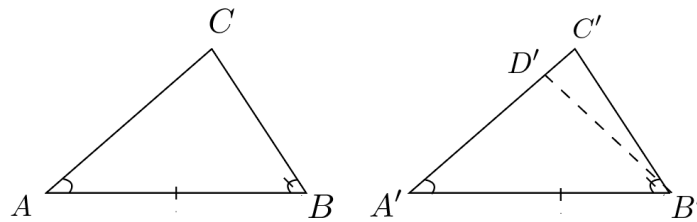


Figura 1.11

Dimostrazione. Osserviamo che, una volta dimostrata la congruenza di AC e $A'C'$, oppure di BC e $B'C'$, la tesi segue direttamente dal primo criterio di congruenza. Dunque, supponiamo per assurdo che AC non sia congruente

ad $A'C'$. \implies Per l'assioma [10], esiste un unico punto $D' \neq C'$ sulla retta $A'C'$ tale che $AC \equiv A'D'$. Consideriamo allora i triangoli ABC e $A'B'D'$: $AB \equiv A'B'$ per ipotesi, $AC \equiv A'D'$ e $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'D'$ per ipotesi, \implies per [14], $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'D'$. D'altra parte, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ per ipotesi; ciò contraddice [13] e quindi dimostra che $AC \equiv A'C'$. \square

Per dimostrare il terzo criterio di congruenza, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari:

Teorema 1.4.6. *Siano A, B, C, A', B', C' tutti distinti. Se $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$, allora anche i corrispondenti angoli supplementari sono congruenti, cioè: $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle C'B'D'$.*

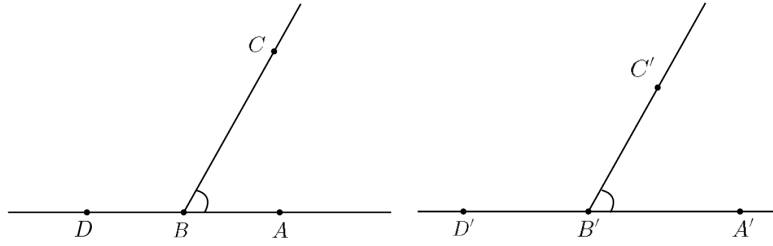


Figura 1.12

Dimostrazione. Gli angoli $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle A'B'C'$ originano (ciascuno) da due semirette, dunque per l'assioma [10], possiamo sempre scegliere $A', B', C', D', A, B, C, D$ in modo tale che:

$$AB \equiv A'B', BC \equiv B'C', BD \equiv B'D'$$

Allora, poiché $AB \equiv A'B', BC \equiv B'C'$ e $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$, per il primo criterio di congruenza $AC \equiv A'C'$. Inoltre, per l'assioma [12] (additività), anche $AD \equiv A'D'$. Di nuovo allora, per il primo criterio di congruenza, i triangoli CAD e $C'A'D'$ sono congruenti. $\implies \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle B'D'C'$; insieme a $BD \equiv B'D'$ e $CD \equiv C'D'$, per l'assioma [14] si ha: $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle C'B'D'$, cioè la tesi. \square

Corollario 1.4.7. *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*

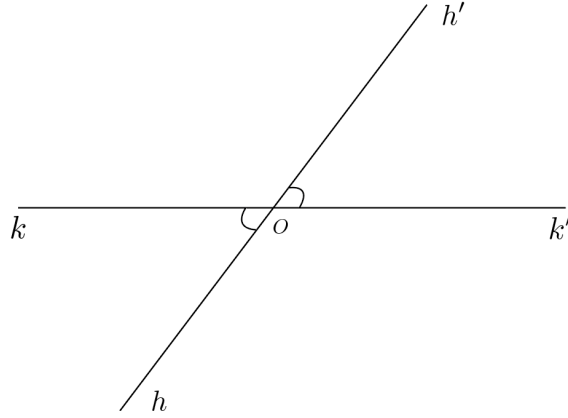


Figura 1.13

Dimostrazione. Consideriamo due rette incidenti in un punto O e chiamiamo h e h' , k e k' le semirette determinate dal punto O su queste rette. Allora, gli angoli $\sphericalangle(h, k)$ e $\sphericalangle(h', k')$ sono opposti al vertice. Per l'ultima parte dell'assioma [13](#), l'angolo $\sphericalangle(k, h')$ è congruente a se stesso, quindi per il Teorema [1.4.6](#), sono congruenti anche i corrispondenti angoli supplementari, cioè:

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$$

□

Teorema 1.4.8. *Siano h, k, l e h', k', l' semirette uscenti rispettivamente da O e O' . Supponiamo che h, k e h', k' giacciono sullo stesso semipiano o su semipiani opposti rispettivamente di l ed l' . Se $\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l')$ e $\sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l')$, allora $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$.*

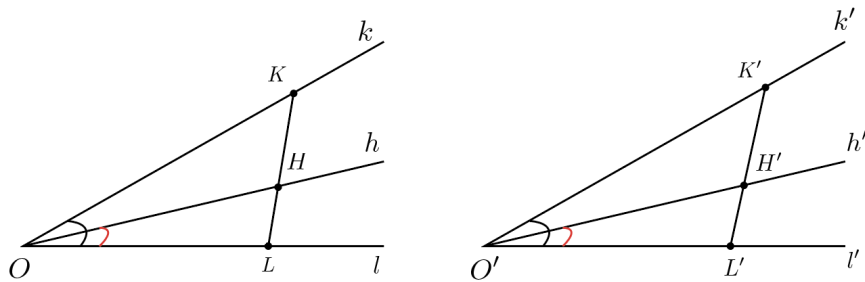


Figura 1.14

Dimostrazione. Assumiamo che h, k e h', k' stiano sullo stesso semipiano rispettivamente di l ed l' e supponiamo che la semiretta h sia interna all'angolo $\sphericalangle(k, l)$. Per l'assioma [10], sulle semirette k, l, k', l' , possiamo scegliere rispettivamente K, L, K', L' tali che $OL \equiv O'L'$ e $OK \equiv O'K'$. Poiché h è interna all'angolo $\sphericalangle(k, l)$ e KL congiunge due punti che si trovano su semirette opposte di questo angolo, h incontra KL in un punto H . Allora, sulla retta h' scegliamo H' tale che $OH \equiv O'H'$. Siccome $OK \equiv O'K', OL \equiv O'L'$ e per ipotesi $\sphericalangle KOL \equiv \sphericalangle K'O'L'$, per il primo criterio di congruenza dei triangoli valgono anche: $\sphericalangle OKL \equiv \sphericalangle O'K'L', \sphericalangle OLK \equiv \sphericalangle O'L'K'$ e $KL \equiv K'L'$. Analogamente, poiché $OH \equiv O'H', OL \equiv O'L'$ e per ipotesi $\sphericalangle HOL \equiv \sphericalangle H'O'L'$, per il primo criterio di congruenza valgono anche: $\sphericalangle OHL \equiv \sphericalangle O'H'L', HL \equiv H'L'$ e $\sphericalangle HLO \equiv \sphericalangle H'L'O'$. In particolare, $\sphericalangle OLK \equiv \sphericalangle O'L'K'$ e $\sphericalangle OLH \equiv \sphericalangle O'L'H'$ comportano, per l'unicità della costruzione dell'angolo data dall'assioma [13], che H' e K' giacciono sulla stessa retta (perché K e H giacciono sulla stessa retta). Allora, poiché $KL \equiv K'L'$ e $HL \equiv H'L'$, per l'assioma [12], anche $HK \equiv H'K'$ e quindi, essendo $OK \equiv O'K'$ e $\sphericalangle OKH \equiv \sphericalangle O'K'H'$, per l'assioma [14], $\sphericalangle KOH \equiv \sphericalangle K'O'H'$, cioè $\sphericalangle(k, h) \equiv \sphericalangle(k', h')$, la tesi.

Supponiamo ora che h, k e h', k' si trovino su semipiani opposti rispettivamente di l ed l' . Al posto di $\sphericalangle(k, l)$ e $\sphericalangle(k', l')$, consideriamo i corrispondenti angoli supplementari, riconducendoci al primo caso della dimostrazione. Segue la congruenza degli angoli supplementari a $\sphericalangle(h, k)$ e $\sphericalangle(h', k')$, dunque, per il Teorema [1.4.6], la congruenza di $\sphericalangle(h, k)$ e $\sphericalangle(h', k')$. \square

Teorema 1.4.9. *Siano Z_1, Z_2 due punti su semipiani opposti del lato XY , tali che $XZ_1 \equiv XZ_2$ e $YZ_1 \equiv YZ_2$. Allora, $\sphericalangle XYZ_1 \equiv \sphericalangle XYZ_2$.*

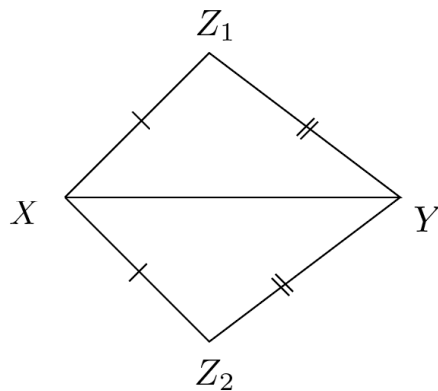


Figura 1.15

Dimostrazione. $XZ_1 \equiv XZ_2 \implies$ per il Teorema 1.4.2, $\sphericalangle XZ_1Z_2 \equiv \sphericalangle XZ_2Z_1$. Per la stessa ragione, $\sphericalangle YZ_1Z_2 \equiv \sphericalangle YZ_2Z_1$. Allora, per il teorema precedente, $\sphericalangle XZ_1Y \equiv \sphericalangle XZ_2Y$. Dall'assioma 14) segue allora che $\sphericalangle XYZ_1 \equiv \sphericalangle XYZ_2$. \square

A questo punto possiamo dimostrare il terzo criterio di congruenza dei triangoli:

Teorema 1.4.10 (3° Criterio di congruenza per i triangoli). *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli. Se*

$$AB \equiv A'B', BC \equiv B'C', AC \equiv A'C',$$

allora ABC e $A'B'C'$ sono congruenti.

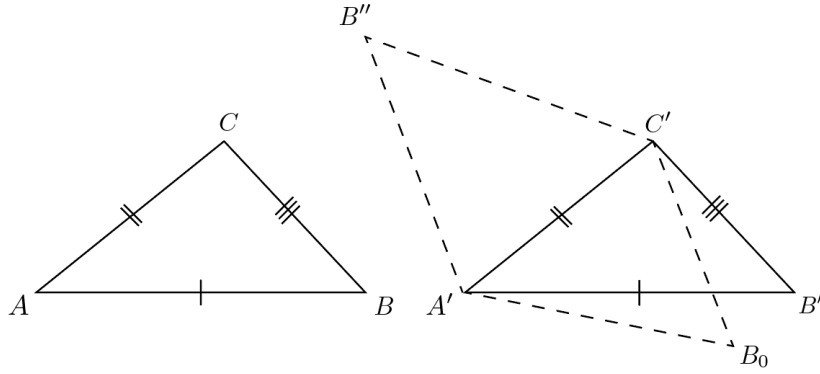


Figura 1.16

Dimostrazione. In virtù degli assiomi 10) e 13), scegliamo B_0 e B'' tali che $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B_0A'C'$, $AB \equiv A'B_0$, $A'B'' \equiv AB$ e $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B''A'C'$. Allora, considerando i triangoli ABC e $A'B_0C'$, si ha: $AB \equiv A'B_0$, $AC \equiv A'C'$ per ipotesi e $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B_0A'C'$. Per il primo criterio di congruenza dei triangoli, ABC e $A'B_0C'$ sono congruenti; in particolare, $BC \equiv B_0C'$. Per la stessa ragione, considerando i triangoli ABC e $A'B''C'$, si ha che $BC \equiv B''C'$. Inoltre, per l'assioma 11), $A'B_0 \equiv AB$, $A'B'' \equiv AB \implies A'B_0 \equiv A'B''$ e $B_0C' \equiv BC$, $B''C' \equiv BC \implies B_0C' \equiv B''C'$. Allora, i triangoli $A'B_0C'$ e $A'B''C'$ e i triangoli $A'B'C'$ e $A'B''C'$ soddisfano le ipotesi del Teorema 1.4.9 $\implies \sphericalangle B_0A'C' \equiv \sphericalangle B''A'C'$ e $\sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle B''A'C'$; allora, per l'assioma 11), $\sphericalangle B_0A'C' \equiv \sphericalangle B'A'C'$, dunque $B_0 = B'$ e $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$. Applicando il primo criterio di congruenza ai triangoli ABC e $A'B'C'$, si ha che ABC e $A'B'C'$ sono congruenti. \square

Concludiamo la discussione degli assiomi di congruenza con il “Teorema dell’angolo esterno”, utilizzato spesso anche da Euclide, ma prima abbiamo bisogno di alcune definizioni:

Definizione 1.4.11. Siano $\sphericalangle(h, k)$ e $\sphericalangle(h', k')$ due angoli. Diciamo che l’angolo $\sphericalangle(h, k)$ è **minore** dell’angolo $\sphericalangle(h', k')$ (e scriviamo $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', k')$) se la costruzione del primo a partire dalla semiretta h' nel semipiano contenente k' comporta una semiretta k'' interna all’angolo $\sphericalangle(h', k')$. Se invece k'' è esterna a $\sphericalangle(h', k')$, si dice che l’angolo $\sphericalangle(h, k)$ è **maggiore** dell’angolo $\sphericalangle(h', k')$ (e si scrive $\sphericalangle(h, k) > \sphericalangle(h', k')$).

Si osservi che questa definizione è ben posta, sia in virtù dell’assioma 13 riguardante l’unicità nella costruzione di un angolo a partire da una semiretta e un semipiano originato della retta su cui giace fissati, sia per la nozione di “interno” di un angolo, che è stata ben definita nella sezione precedente, come conseguenza degli assiomi dell’ordine.

Definizione 1.4.12. Sia ABC un triangolo. Gli angoli $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ e $\sphericalangle CAB$ si chiamano **angoli interni** del triangolo. I loro angoli supplementari si chiamano **angoli esterni** del triangolo.

Teorema 1.4.13 (Teorema dell’angolo esterno). Qualunque angolo esterno di un triangolo ABC è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti a esso.

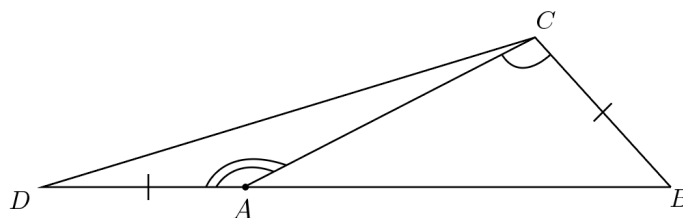


Figura 1.17

Dimostrazione. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di A e, in virtù dell’assioma 10, consideriamo su tale prolungamento un punto D tale che $AD \equiv BC$. Consideriamo quindi l’angolo esterno $\sphericalangle CAD$ e l’angolo interno $\sphericalangle ACB$. Supponiamo per assurdo che non sia $\sphericalangle CAD > \sphericalangle ACB$. Allora, sono possibili due situazioni:

- $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ACB$. \implies Poiché $AC \equiv AC$ e $DA \equiv BC$ per costruzione, per l’assioma 14, $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CAB$. Allora, poiché $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ACB$,

per il Teorema [1.4.6](#), sono congruenti anche i corrispondenti angoli supplementari, cioè $\sphericalangle CAB$ è congruente all'angolo supplementare di $\sphericalangle ACB$. Ma allora, per l'unicità della costruzione dell'angolo data dall'assioma [13](#), D sta sulla retta BC . D'altra parte, D sta anche sulla retta AB , che è distinta da BC . Ciò contraddice [2](#) e dimostra quindi l'impossibilità della congruenza di $\sphericalangle CAD$ con $\sphericalangle ACB$.

- $\sphericalangle CAD < \sphericalangle ACB$. In tal caso, la costruzione di $\sphericalangle CAD$ a partire da AC con vertice in C nel semipiano (individuato da AC) contenente B comporta una semiretta interna all'angolo ACB e tale che $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ACB'$, dove B' è il punto d'intersezione di tale semiretta con AB . Questo tuttavia è impossibile per quanto dimostrato al punto precedente (si applica lo stesso ragionamento di prima, ma al triangolo $AB'C$).

Dunque, non può che essere $\sphericalangle CAD > \sphericalangle ACB$. Per dimostrare infine che $\sphericalangle CAD > \sphericalangle ABC$, si prolunga il lato AC dalla parte di A e su tale prolungamento si sceglie D' tale che $AD' \equiv BC$; come sopra, si dimostra che $\sphericalangle BAD' > \sphericalangle ABC$ e quindi, poiché $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle BAD'$ in quanto opposti al vertice ([1.4.7](#)), $\sphericalangle CAD > \sphericalangle ABC$. \square

Come annunciato nella sezione precedente, conseguenza degli assiomi di congruenza - in particolare del Teorema dell'angolo esterno - è la prima asserzione contenuta nell'assioma delle parallele, ovvero l'esistenza di almeno una retta parallela a una retta data e passante per un punto non appartenente a essa. Infatti, consideriamo una retta a e un punto $A \notin a$. A partire da un punto $B \in a$, tracciamo la retta c passante per A e B . Per l'assioma [13](#), esiste un'unica retta b , passante per A , tale che $\sphericalangle(c, b) \equiv \sphericalangle(c, a)$.

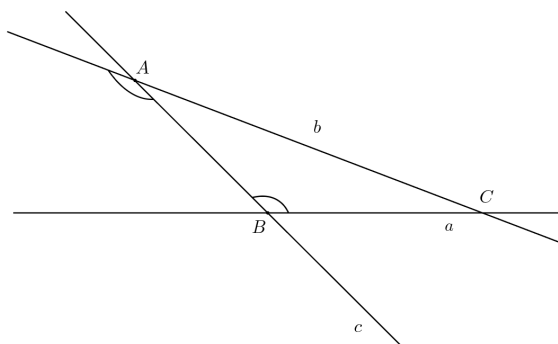


Figura 1.18

Allora, a e b non hanno alcun punto in comune, cioè sono parallele. In effetti, se per assurdo si incontrassero in un punto C , si avrebbe che $\sphericalangle(c, b)$ è un angolo esterno del triangolo ABC , dunque per il Teorema dell'angolo esterno non potrebbe essere congruente a $\sphericalangle(c, a)$, che è invece un angolo interno.

1.5 Assiomi di continuità

- 15) (Assioma di Archimede). *Siano AB e CD due segmenti. Allora, esiste un numero intero $n > 0$ tale che n segmenti CD costruiti contigualmente a partire dal punto A , lungo la semiretta uscente da A verso B , superano il punto B .*
- 16) (Assioma di completezza lineare). *Non è possibile un'estensione dell'insieme dei punti su una retta che preservi le relazioni esistenti fra gli elementi originali, nonché le proprietà fondamentali dell'ordine e della congruenza lineari, che seguono dagli assiomi di incidenza, dell'ordine e di congruenza e dall'Assioma di Archimede.*

Per “proprietà fondamentali” si intendono le principali proprietà riguardanti l'ordinamento della retta, le proprietà che definiscono la relazione di congruenza e la possibilità di costruire in modo unico un segmento su una semiretta, a partire da un punto dato.

Nella formulazione dell'assioma di completezza, la presenza dell'assioma di Archimede tra gli assiomi di cui si richiede la validità in un'eventuale estensione della retta è essenziale. Infatti, se non si richiedesse la validità dell'assioma di Archimede, sarebbe possibile aggiungere all'insieme dei punti su una retta degli altri punti, mantenendo inalterate tutte le proprietà dell'ordine e della congruenza lineari. Ne è una prova l'insieme \mathbb{E} dei *numeri euclidei*, che estende la retta reale includendo dei numeri *infiniti*, ovvero dei numeri ω tali che $\omega > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque, per un numero infinito si ha:

$$1 < \omega, 1 + 1 < \omega, 1 + 1 + 1 < \omega, \dots, 1 + 1 + 1 + 1 + \dots < \omega$$

e quindi \mathbb{E} non è archimedeo. L'esistenza di un modello di retta in cui valgono tutte le proprietà principali dell'ordinamento e della congruenza, ma non l'assioma di Archimede, mostra l'indipendenza dell'assioma di Archimede dagli altri assiomi della Geometria Euclidea.

Tra le conseguenze degli assiomi di continuità, Hilbert enuncia il seguente teorema, che nella prima edizione era riportato come “assioma di completezza”, o *Vollständigkei*t, a completamento non solo degli assiomi della geometria piana, ma di tutti e cinque i gruppi di assiomi della Geometria Euclidea nello spazio (cfr. A).

Teorema 1.5.1 (Teorema di completezza). *Gli elementi della Geometria Euclidea (punti, rette, piani) formano un sistema che non è suscettibile di estensione. In altre parole, non è possibile estendere il sistema di punti, rette e piani della Geometria a un nuovo sistema in cui continuino a valere tutti i cinque gruppi di assiomi.*

La dimostrazione di questo teorema, che non riportiamo, si basa sugli assiomi di incidenza (non solo quelli della geometria piana, esposti sopra - cfr. A), l'assioma di Pasch e l'assioma di completezza lineare.

Capitolo 2

Il Teorema di Jordan per i poligoni

La matematica ci dà uno
splendido esempio di quanto
possiamo spingerci innanzi nella
conoscenza a priori,
indipendentemente
dall'esperienza.

Immanuel Kant

In questo capitolo ci occuperemo del Teorema di Jordan per i poligoni: lo enunceremo e ne esporremo diverse dimostrazioni.

Hilbert enuncia questo risultato già nella prima edizione de “I Fondamenti della Geometria”, nella sezione “Conseguenze degli assiomi di incidenza e dell’ordine”; dopo aver enunciato il Teorema 5, riguardante la scomposizione di un piano in due semipiani da parte di una retta, egli afferma:

*Con l’aiuto del Teorema 5 possiamo ottenere,
senza grosse difficoltà, il seguente teorema:*

Teorema 2.0.1. *Ogni poligono semplice, i cui vertici giacciono tutti su un piano α , divide i punti di questo piano non appartenenti al poligono in due regioni, un **interno** e un **esterno**, con le seguenti proprietà:*

- *Se A è un punto interno e B un punto esterno, allora ogni poligonale che congiunge A e B interseca il poligono almeno in un punto.*
- *Se A, A' sono due punti interni e B, B' sono due punti esterni, allora esistono poligoni che congiungono A con A' e poligoni che*

congiungono B con B' , che non hanno alcun punto in comune con il poligono.

- *Esistono rette nel piano α che giacciono interamente all'esterno del poligono, ma non esistono rette che siano completamente interne al poligono.*

L'affermazione di questo teorema sembra ovvia (e forse per Hilbert lo era davvero), ma in realtà la sua dimostrazione è tutt'altro che banale. La difficoltà nella dimostrazione risiede nel carattere generale del teorema: può sembrarci ovvio che un quadrilatero divida i restanti punti del piano in due regioni, perché identifichiamo “a occhio” l'interno e l'esterno, ma il teorema deve valere per poligoni con un qualunque numero di lati, quindi anche per costruzioni più “selvagge” come poligoni di 15000 lati (purché semplici, naturalmente!), per i quali l'esterno e, soprattutto l'interno, non ci capitano proprio sotto il naso.

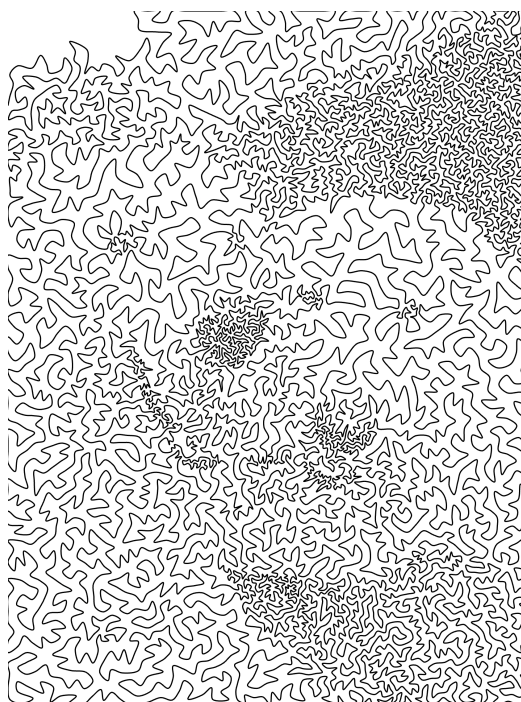


Figura 2.1. Qui dove sono l'interno e l'esterno?

A complicare ulteriormente la dimostrazione c'è il fatto che abbiamo a disposizione solo due gruppi di assiomi della geometria piana: gli assiomi di incidenza e gli assiomi dell'ordine.

Storicamente, la prima dimostrazione assiomatica del Teorema di Jordan fu

realizzata dal matematico statunitense Oswald Veblen nel 1905, esposta nella sua opera “A System of axioms for Geometry” ([10]). La dimostrazione di Veblen si articola in due lemmi:

1. *Se un lato di un poligono \mathcal{Q} interseca un lato di un poligono \mathcal{P} in un punto singolo, allora \mathcal{P} e \mathcal{Q} , semplici o meno, hanno almeno un altro punto in comune.*
2. *Ogni punto di un poligono \mathcal{P} è accessibile da un qualunque punto Q del piano α su cui giace \mathcal{P} .*

dove per “punto singolo” Veblen intende un punto che non è “multiplo”: un punto multiplo è un punto interno comune a due lati del poligono, oppure è un vertice interno a un lato del poligono. Invece, secondo la nomenclatura adottata da Veblen, un punto $P \in \mathcal{P}$ si dice “accessibile” da un punto $O \in \alpha$ se esiste una poligonale \mathcal{S} che congiunge O e P senza incontrare il poligono in un punto diverso da P .

Il Teorema di Jordan risulta essere allora una conseguenza di questi due lemmi; in particolare, dal Lemma 1 segue che $\alpha - \mathcal{P}$ ha almeno due componenti connesse. Infatti, sia $A \notin \mathcal{P}$; a partire da A , tracciamo una semiretta g che incontra \mathcal{P} ma non in un suo vertice. Allora, g incontra \mathcal{P} in un numero finito di punti; fra questi, vi è un primo punto P a partire da A . Se P è l’unico punto d’intersezione con \mathcal{P} , allora sia B un qualunque punto sulla stessa semiretta, a partire da P . Se invece esiste un altro punto $P' \neq P$, allora P sta tra A e P' sulla semiretta g ; dunque, scegliamo B interno al segmento PP' . In ogni caso, otteniamo un segmento AB che incontra \mathcal{P} solamente in un punto. Allora, per il Lemma 1, ogni poligonale che collega A e B incontra \mathcal{P} almeno in un altro punto. Ciò dimostra che $\alpha - \mathcal{P}$ ha almeno due componenti connesse, perché qualunque poligonale che colleghi A e B deve incontrare il poligono \mathcal{P} . Dopodiché, con l’aiuto del Lemma 2, ragionando per assurdo si dimostra che le componenti connesse non possono essere più di due, da cui la tesi.

Esiste in realtà anche una versione topologica, più generale del Teorema di Jordan: essa stabilisce che ogni curva piana chiusa semplice (ovvero omeomorfa alla circonferenza unitaria S^1) divide i rimanenti punti del piano esattamente in due componenti connesse, l’interno e l’esterno del poligono: la prima è limitata e semplicemente connessa, mentre la seconda è illimitata, ed entrambe hanno come frontiera proprio la curva di partenza. Nella dimostrazione del teorema, è essenziale il caso dei poligoni: una volta dimostrato il caso speciale dei poligoni (da molti considerato banale, come da Jordan stesso), il Teorema di Jordan si può dimostrare per un’arbitraria curva chiusa

semplice del piano, sfruttando approssimazioni poligonali. Nel caso generale, la continuità gioca un ruolo essenziale; in particolare, è importante il concetto di punto di accumulazione, la possibilità di avvicinarsi arbitrariamente a un punto del piano mediante una successione non costante di punti a esso “vicini”. L’esistenza di punti di accumulazione, quindi il Teorema di Bolzano-Weierstrass, sono derivabili dagli assiomi di continuità, in particolare dall’assioma di completezza lineare. L’implicita assunzione degli assiomi di continuità nella dimostrazione topologica del Teorema di Jordan è quindi fondamentale. Invece, la dimostrazione che proponiamo nella prima sezione di questo capitolo (riguardante solo il caso dei poligoni), dovuta a Georg Feigl^[1], non fa alcun utilizzo dell’assioma di completezza e nemmeno dell’assioma di Archimede, ma si rifà unicamente agli assiomi di incidenza e dell’ordine e alle principali proprietà dell’ordinamento dei punti su una retta e sul piano, come la scomposizione del piano in due semipiani da parte di una retta, o la scomposizione del piano da parte di un angolo.

2.1 La dimostrazione di Feigl

Georg Feigl riporta la dimostrazione del Teorema di Jordan nel suo articolo *Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie* (1924, [3]); essa si articola in due parti: nella prima parte si dimostra che una poligonale semplice aperta non sconnette il piano, attraverso l’introduzione del concetto di “approdo” di un cammino congiungente un punto fissato P con una poligonale; la seconda parte riguarda invece la dimostrazione del Teorema di Jordan vero e proprio, che avviene grazie ai risultati della sezione precedente e alla nozione di “caratteristica di Kronecker” di un punto non appartenente al poligono rispetto al poligono dato.

Di seguito riportiamo la traduzione delle due sezioni dell’articolo di Feigl riguardanti la dimostrazione del Teorema di Jordan, mantenendo le notazioni e le figure originali.

2.1.1 Una poligonale semplice piana aperta non sconnette il piano

Cominciamo dimostrando il seguente teorema sulle poligonali:

Teorema 2.1.1. *Sia \mathcal{S} una poligonale semplice piana^[2]; siano A, B punti di uno stesso lato di \mathcal{S} e sia a una retta passante per A ma non per B . Allora,*

¹Matematico tedesco che si occupò per lo più di fondamenti della geometria e di topologia.

²Per “piana” si intende che i suoi vertici giacciono tutti su un piano α .

su almeno una semiretta a_1 della retta a uscente da A è possibile determinare un punto C in modo tale che sui segmenti AC e BC non vi sia alcun punto di \mathcal{S} diverso da A e B (Fig. 2.2)³.

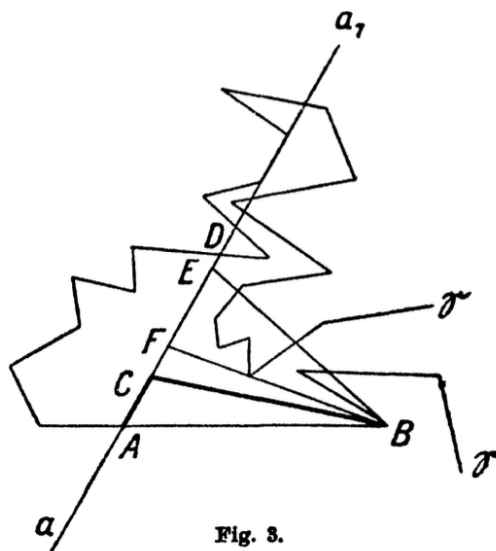


Fig. 3.

Figura 2.2

Dimostrazione. Se A non è un vertice di \mathcal{S} , allora il teorema si applica a ognuna delle due semirette della retta a uscenti da A . Sia a_1 una di queste. Se nessun lato di \mathcal{S} giace su a_1 , allora \mathcal{S} ha al più un numero finito di punti in comune con a_1 . Tra questi vi è un primo punto D , a partire da A . Se invece a_1 contiene un lato di \mathcal{S} , allora poiché \mathcal{S} è semplice, A non può coincidere né con un punto interno, né con un vertice di tale lato. La determinazione del punto D resta comunque fattibile, poiché è sufficiente considerare il primo estremo di questo lato a partire dal punto A . Se E è un punto che sta tra A e D , allora il segmento AE non contiene punti di \mathcal{S} eccetto A . Tracciamo il segmento BE e indichiamo con \mathcal{W} l'interno dell'angolo $\angle ABE$ e con \mathcal{U} il semipiano definito da a che contiene B . Con \mathcal{D} indichiamo invece l'unione di $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ con il segmento BE , estremi esclusi (cioè $\mathcal{D} = (\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) \cup (BE - \{B, E\})$). Poiché \mathcal{S} ha solo un numero finito di vertici, può esserci al massimo un numero finito di vertici di \mathcal{S} in \mathcal{D} . Se colleghiamo questi vertici con B , otteniamo diverse semirette uscenti da B , che giacciono all'interno di $\angle ABE$ e quindi intersecano tutte il segmento AE . Sia F il primo di questi punti d'intersezione a partire da A e sia C un punto

³Nota del traduttore: in figura in realtà viene riportato solo il caso speciale in cui B coincide con uno dei vertici del lato in questione.

tra A ed F . Allora, siccome C sta tra A e D , non esiste alcun punto di \mathcal{S} sul segmento AC diverso da A . Definiamo gli insiemi di punti \mathcal{W}' e \mathcal{D}' per $\angle ABC$ nello stesso modo in cui \mathcal{W} e \mathcal{D} sono stati definiti per $\angle ABE$; allora, \mathcal{D}' non contiene alcun vertice di \mathcal{S} . Affermiamo inoltre che nessun punto di \mathcal{S} appartiene a \mathcal{D}' . Infatti, BC è l'unico lato del triangolo ABC che può essere ancora intersecato da un lato del poligono. Se ciò accade, la retta g su cui giace questo lato del poligono dovrebbe passare o per il punto A , oppure per un punto interno dei lati AB e AC (assioma di Pasch); dunque, prima di questo passaggio dovrebbe esserci un vertice di \mathcal{S} su g , che appartiene anche all'insieme dei punti \mathcal{D}' , e questa è una contraddizione. Ciò dimostra il teorema. \square

Se A è un vertice di \mathcal{S} , la dimostrazione subisce l'unica modifica che la semiretta a_1 non può più essere scelta arbitrariamente su a : siano AA' il secondo lato del poligono passante per A , a_2 la semiretta uscente da A su a e che si trova, rispetto ad AB , nello stesso semipiano che contiene A' . Se a_2 coincide con AA' , allora basta scegliere come a_1 la semiretta di a opposta ad a_2 . Se questo caso speciale non si verifica, AA' si trova all'esterno o all'interno di $\angle(a_2, AB)$. Nel primo caso la scelta di a_1 non subisce alcuna restrizione; nel secondo, solo la semiretta opposta ad a_2 può essere scelta come a_1 , poiché il segmento che collega ciascun punto di a_2 a B interseca la semiretta AA' in un punto interno (cfr. [1.2.19](#)).

Corollario 2.1.2. *Se C ha la proprietà richiesta nel Teorema [2.1.1](#), allora essa vale anche per ogni punto C' tra A e C .*

Diamo ora la seguente definizione:

Definizione 2.1.3. *Siano \mathcal{S} una poligonale semplice piana, S e P due punti tali che $S \in \mathcal{S}$, $P \notin \mathcal{S}$ e sia \mathcal{W} un cammino che collega P a S . Ignorando il caso facilmente evitabile in cui \mathcal{S} e \mathcal{W} hanno un lato in comune, \mathcal{S} e \mathcal{W} hanno un numero finito di punti d'intersezione. Chiamiamo **approdo** (Mündung) del cammino \mathcal{W} sul poligono \mathcal{S} il primo di questi punti su \mathcal{W} , a partire da P .*

Teorema 2.1.4. *Siano $S, M' \in \mathcal{S}$ e $P \notin \mathcal{S}$ punti fissati. Allora, esiste un cammino \mathcal{W}' che collega P a S , il cui approdo sul poligono \mathcal{S} è proprio M' [4](#).*

⁴Nota del traduttore: nella traduzione letterale del testo, in questo teorema si stabilisce che "l'approdo M di un cammino che va da un punto fisso P verso il poligono semplice \mathcal{S} può essere posizionato arbitrariamente su \mathcal{S} ". In altre parole, l'approdo di un cammino che va da un punto fisso $P \notin \mathcal{S}$ verso il poligono \mathcal{S} si può scegliere arbitrariamente su \mathcal{S} .

Dimostrazione. Sia \mathcal{W} una poligonale che collega P a S , con approdo in $M \in \mathcal{S}$. Senza ledere alla generalità, possiamo supporre in partenza che M ed M' giacciono sullo stesso lato di S .

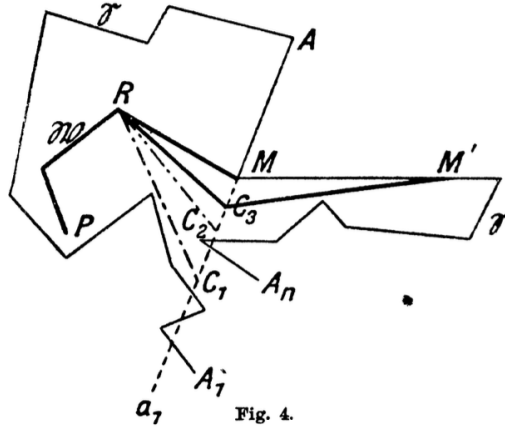


Figura 2.3

Sia R l'ultimo vertice del cammino \mathcal{W} prima di M . Se M non è un vertice di \mathcal{S} , possiamo applicare il Teorema 2.1.1 alla semiretta MR e determinare un punto C sul segmento MR in modo tale che i segmenti MC ed $M'C$ non contengano alcun punto di \mathcal{S} oltre a M ed M' . Se sostituiamo il percorso $P...W...RCM$ con il percorso $P...W...RCM'$, allora \mathcal{W}' è il cammino cercato. Se M è un vertice di \mathcal{S} ed MA è il secondo lato di \mathcal{S} passante per M , allora - come mostra la seconda parte della dimostrazione del Teorema 2.1.1 - il nostro ragionamento resta invariato se si verifica una delle seguenti condizioni: A ed R appartengono a semipiani differenti rispetto alla retta MM' , oppure R è interno all'angolo $\angle AMM'$. È necessaria una modifica solo se R e A appartengono allo stesso semipiano rispetto alla retta MM' ed R è esterno all'angolo $\angle AMM'$ (Fig. 2.3). Introduciamo in tal caso la semiretta a_1 della retta MA uscente da M che non contiene A ; a_1 ed R si trovano su semipiani opposti rispetto alla retta MM' . Se A_1 e A_n sono gli estremi di \mathcal{S} , che possono anche coincidere (i teoremi 2.1.1 e 2.1.4 valgono sia per poligonali aperte sia per poligonali chiuse), applichiamo prima di tutto il Teorema 2.1.1 al percorso $\mathcal{S}_1 = RMA...S...A_1$ e alla semiretta a_1 : su a_1 è possibile determinare un punto C_1 in modo tale che i segmenti MC_1 ed RC_1 non contengano alcun punto di \mathcal{S}_1 eccetto M ed R . Allo stesso modo, l'applicazione del Teorema 2.1.1 al percorso $\mathcal{S}_2 = RMM'...S...A_n$ e ad a_1 implica l'esistenza di un punto C_2 su a_1 tale che i segmenti MC_2 ed RC_2 non contengono alcun punto di \mathcal{S}_2 eccetto M ed R . Infine, possiamo scegliere un punto C_3 su a_1 tale che i segmenti MC_3 ed $M'C_3$ non contengano alcun

punto di \mathcal{S} eccetto M ed M' . Sia C , partendo da M , il primo dei tre punti C_1, C_2, C_3 . Allora, i segmenti RC ed $M'C$, a parte M' , non contengono punti di \mathcal{S} . Ponendo $\mathcal{W}' = P... \mathcal{W}...RCM'$, concludiamo che \mathcal{W}' ha approdo in M' ; dunque \mathcal{W}' è il cammino cercato. \square

Dal Teorema [2.1.4](#) segue immediatamente

Teorema 2.1.5. *Una poligonale semplice piana aperta non sconnette il piano.*

Dimostrazione. Per mostrare che due punti P e Q del piano, che non si trovano sulla poligonale aperta $\mathcal{B} = A_1A_2...A_n$, sono collegabili rispetto a \mathcal{B} , estendiamo \mathcal{B} aggiungendo un nuovo lato A_nA_{n+1} per formare un percorso \mathcal{B}_1 . Per il Teorema [2.1.1](#), A_{n+1} può essere scelto in modo tale che \mathcal{B}_1 sia anch'esso una poligonale aperta piana semplice. Fissato $T \in A_nA_{n+1}$, per il teorema precedente, esistono un cammino che collega P a \mathcal{B}_1 e un cammino che collega Q a \mathcal{B}_1 , entrambi con approdo in T . L'unione di questi determina un cammino da P a Q che ha in comune con \mathcal{B}_1 solo il punto T e, pertanto, non interseca la poligonale data \mathcal{B} . \square

2.1.2 Scomposizione del piano per mezzo di un poligono semplice

In questo paragrafo trattiamo la scomposizione del piano da parte di un poligono \mathcal{S} adattando il concetto di caratteristica di Kronecker⁵ alla geometria elementare. Ciò è possibile interpretando adeguatamente un ragionamento dovuto ad A. Winternitz. Sia $P \notin \mathcal{S}$ e siano g, h due semirette uscenti da P che formano tra loro l'angolo w . Consideriamo un punto $A \in \mathcal{S}$ tale che $A \notin w$ (quindi A appartiene a una certa regione \mathcal{W} rispetto all'angolo w , secondo il teorema [1.2.16](#)). Se percorriamo \mathcal{S} a partire da A , si verifica un cambio di regione rispetto a w ogni volta che una delle due semirette g o h viene attraversata⁶. Il numero di questi cambiamenti di regione deve essere pari, poiché attraversando \mathcal{S} torniamo al punto A e quindi alla regione \mathcal{W} di

⁵Cfr. la presentazione congiunta in E. Schmidt, 1. c., § 1, e B. von Kerékjartò, Lezioni di Topologia I, 1923, p. 83.

⁶Nota del traduttore: non è specificato che cosa si intenda per "attraversamento" di una semiretta. Presumibilmente, si parla di "attraversamento" di una semiretta g (risp. h) se g (risp. h) interseca un lato del poligono in un punto interno e i vertici di questo lato appartengono a semipiani opposti rispetto a g (risp. h), oppure g (risp. h) interseca \mathcal{S} in un vertice V_i e i vertici adiacenti V_{i-1}, V_{i+1} appartengono a semipiani opposti rispetto alla semiretta g (risp. h).

partenza. Sia $\mu(w)$ il numero di intersezioni di w con il poligono \mathcal{S} ; allora

$$\begin{aligned}\mu(w) &\text{ è un numero pari e} \\ \mu(w) &= \mu(g) + \mu(h),\end{aligned}$$

(ove $\mu(g)$ e $\mu(h)$ indicano il numero di intersezioni rispettivamente di g e h con \mathcal{S}) poiché nel vertice P non si verifica alcuna intersezione. Se k è una terza semiretta uscente da P , allora per l'angolo $w' = \angle(g, k)$:

$$\mu(w') = \mu(g) + \mu(k) \text{ è un numero pari.}$$

Dunque, per ogni semiretta uscente da P , il numero μ è pari o dispari, e ciò vale per ogni punto P del piano non appartenente al poligono \mathcal{S} . Pertanto, è ben posta la seguente definizione:

Definizione 2.1.6. *Sia \mathcal{S} un poligono semplice che giace su un piano α . Diciamo che un punto $P \in \alpha - \mathcal{S}$ ha **caratteristica (di Kronecker)** 0 o 1 rispetto al poligono \mathcal{S} se per una qualunque semiretta g uscente da P , il numero $\mu(g)$ di intersezioni di g con \mathcal{S} è rispettivamente pari o dispari.*

La caratteristica di Kronecker gode della seguente proprietà fondamentale:

Teorema 2.1.7. *Sia \mathcal{S} un poligono semplice. Allora, tutti i punti appartenenti a una stessa regione rispetto a \mathcal{S} hanno la stessa caratteristica.*

Dimostrazione. Occorre provare che due punti qualunque che sono collegabili rispetto a \mathcal{S} hanno anche la stessa caratteristica. È sufficiente, per dimostrare questo fatto, considerare il caso in cui P e Q possono essere collegati da un unico segmento (se sono collegati da una poligonale con più lati, basta applicare questo ragionamento a ogni lato). Ma se ciò accade, il risultato segue immediatamente, poiché la semiretta uscente da P e diretta verso Q ha lo stesso numero di intersezioni della semiretta della retta PQ che esce da Q e non contiene P . \square

Dimostrare il viceversa è più impegnativo:

Teorema 2.1.8. *Sia \mathcal{S} un poligono semplice e siano $P, Q \notin \mathcal{S}$. Se P e Q hanno la stessa caratteristica, allora P e Q appartengono alla stessa regione rispetto a \mathcal{S} .*

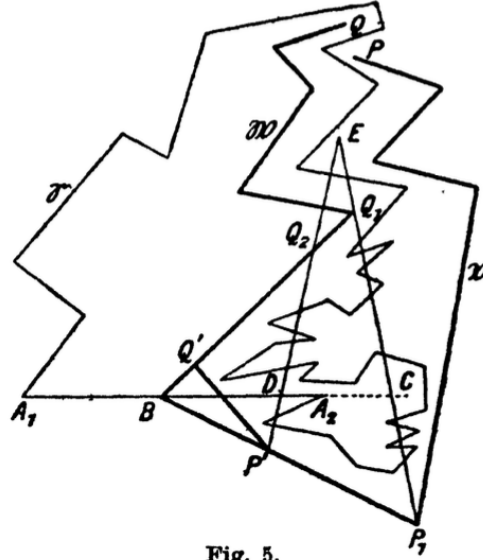


Fig. 5.

Figura 2.4

Dimostrazione. Sia B un punto interno di un lato A_1A_2 del poligono. Per il Teorema 2.1.4, esistono due cammini $\mathcal{B} = P...B$, $\mathcal{W} = Q...B$ che collegano rispettivamente P e Q a \mathcal{S} e approdano in B ; allora, i percorsi \mathcal{B} , \mathcal{W} hanno solo il punto B in comune con \mathcal{S} . Inoltre, se P_1 e Q_1 sono i primi vertici dei percorsi \mathcal{B} e \mathcal{W} a partire da B , allora P e P_1 sono collegati tramite \mathcal{B} , Q e Q_1 tramite \mathcal{W} , senza incontrare \mathcal{S} . Per proseguire abbiamo bisogno del seguente risultato preliminare:

Lemma 2.1.9. *Se P_1 e Q_1 appartengono a semipiani opposti rispetto alla retta A_1A_2 , allora P_1 e Q_1 , dunque anche P e Q , hanno caratteristiche diverse rispetto a \mathcal{S} (Fig. 2.4).*

Dimostrazione (del Lemma). La tesi segue immediatamente se P_1 , B e Q_1 sono allineati perché la semiretta uscente da Q_1 contenente P_1 interseca il poligono esattamente una volta in più rispetto alla stessa semiretta uscente da P_1 . Se questo caso speciale non si verifica, scegliamo un punto P' interno al segmento BP_1 e un punto Q' interno al segmento BQ_1 tali che sul segmento $P'Q'$ ci sia esattamente un punto interno del lato A_1A_2 del poligono e non vi sia nessun altro punto di \mathcal{S} . Allora, il segmento $P'Q'$ interseca \mathcal{S} una sola volta; dunque P' e Q' e, di conseguenza anche P_1 e Q_1 , hanno caratteristiche diverse. La dimostrazione del Lemma si riduce pertanto alla costruzione dei punti P' e Q' . Il segmento P_1Q_1 è intersecato dalla retta A_1A_2 in un punto interno C sulla semiretta BA_2 . Poiché C non necessariamente appartiene a

\mathcal{S} , introduciamo un punto D interno al segmento BA_2 e colleghiamo D con un punto E sulla retta P_1Q_1 tale che Q_1 sta tra E e P_1 . Poiché D sta tra B e C , applicando l'assioma di Pasch alla trasversale DE e ai triangoli BCP_1 e BCQ_1 , si ottiene che DE interseca il lato BP_1 in un punto interno P' e il lato BQ_1 in un punto interno Q_2 . Collegando P' con un punto interno Q' del segmento BQ_2 , si trova che i segmenti BD e $P'Q'$ hanno un punto interno in comune (cfr. [1.2.19](#)), cioè $P'Q'$ interseca \mathcal{S} in un punto interno del lato A_1A_2 . Il fatto che possiamo scegliere il punto Q' in modo che il segmento $P'Q'$ non abbia altri punti in comune con \mathcal{S} si dimostra applicando il Teorema [2.1.1](#) al percorso $\mathcal{S}' = BP'DA_2A_3\ldots\mathcal{S}\ldots A_nA_1$ e alla semiretta BQ_2 . Poiché il segmento $P'D$ può essere intersecato dal poligono \mathcal{S} , il poligono \mathcal{S}' in generale non è semplice. Possiamo però renderlo semplice (applicando il Teorema [2.1.1](#) a \mathcal{S} e alla semiretta BP_1) spostando opportunamente il punto P' del segmento BP_1 verso B . \square

Ora dimostriamo che dall'uguaglianza delle caratteristiche segue la collegabilità dei punti P e Q . È sufficiente dimostrare la collegabilità di P_1 e Q_1 , che hanno anch'essi le stesse caratteristiche e, per il Lemma, appartengono allo stesso semipiano della retta A_1A_2 . Allora, la semiretta BQ_1 è interna a uno e uno solo dei due angoli $\sphericalangle A_1BP_1$, $\sphericalangle A_2BP_1$; sia ad esempio interna all'angolo $\sphericalangle A_1BP_1$. Allora, possiamo applicare il Teorema [2.1.1](#) alla poligonale semplice aperta $\mathcal{S}'' = P_1BA_1A_n\ldots\mathcal{S}\ldots A_3A_2$ e alla semiretta BQ_1 , determinando un punto Q_3 sulla semiretta BQ_1 in modo che il segmento P_1Q_3 non contenga alcun punto di \mathcal{S}'' eccetto P_1 . Poiché i segmenti P_1Q_3 e BA_2 non possono intersecarsi, P_1 e Q_1 sono collegati dal percorso $P_1Q_3Q_1$, che non incontra il poligono \mathcal{S} . Ciò conclude la dimostrazione del Teorema [2.1.8](#). \square

Enunciamo ora il Teorema di Jordan per i poligoni:

Teorema 2.1.10. *Sia \mathcal{S} un poligono piano semplice. Allora, \mathcal{S} divide il piano α su cui giace esattamente in due regioni⁷.*

Dimostrazione. Per i teoremi [2.1.7](#) e [2.1.8](#), due punti $P, Q \in \alpha - \mathcal{S}$ appartengono alla stessa regione rispetto al poligono \mathcal{S} se e solo se hanno la stessa caratteristica. Poiché la caratteristica può assumere al massimo due valori (0 e 1), sarà sufficiente dimostrare che esistono effettivamente due punti con caratteristiche diverse. Sia B un punto interno del lato A_1A_2 del poligono; consideriamo una retta $a \neq A_1A_2$ passante per B , e siano g e h le due semirette in cui B divide la retta a . Tra i punti d'intersezione di g e h con \mathcal{S} vi è,

⁷Nota del traduttore: per " \mathcal{S} divide α in due regioni" si intende " $\alpha - \mathcal{S}$ è costituito esattamente da due regioni".

partendo da B , un primo punto C su g e un primo punto D su h . Se P è un punto che sta tra B e C e Q è un punto che sta tra B e D , allora il segmento PQ interseca \mathcal{S} esattamente in un punto. Dunque, vi sono esattamente due regioni. \square

La regione con caratteristica 1 è chiamata **interno** \mathcal{M}_1 del poligono; ogni semiretta uscente da un punto P_1 di \mathcal{M}_1 deve intersecare \mathcal{S} almeno in un punto, poiché il numero di intersezioni su ogni semiretta uscente da P_1 è dispari, quindi almeno pari a 1. La regione con caratteristica 0 è chiamata **esterno** \mathcal{M}_0 ; esistono semirette costituite interamente da punti di \mathcal{M}_0 . Infatti, considerando la semiretta h , deve esserci, tra i punti di intersezione con \mathcal{S} a partire da B , un ultimo punto L . Se R è un punto sulla stessa semiretta tale che L sta tra B ed R , e k è la semiretta della retta BR che parte da R e non contiene B , allora $k \cap \mathcal{S} = \emptyset$. R ha caratteristica 0, dunque $k \subset \mathcal{M}_0$. Possiamo formalizzare quanto appena detto sull'esterno di un poligono con il seguente teorema:

Teorema 2.1.11. *Sia \mathcal{S} un poligono piano semplice. Allora, \mathcal{S} giace interamente all'interno di un angolo ed esistono rette contenute completamente all'esterno del poligono (Fig. 2.5).*

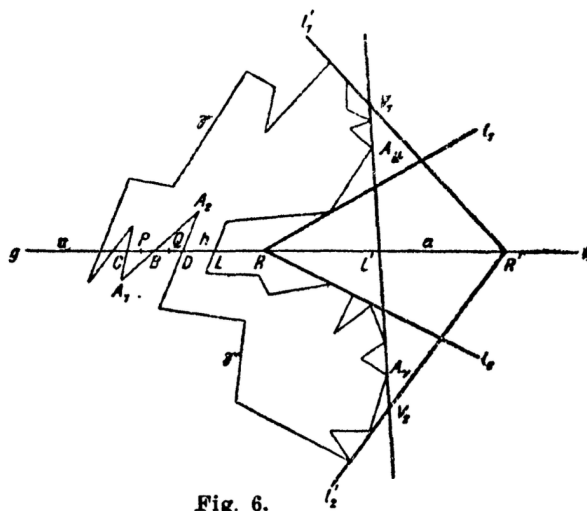


Fig. 6.

Figura 2.5

Dimostrazione. Dal fatto che il poligono è contenuto in un semipiano non potremmo dedurre che vi siano rette contenute all'esterno; infatti, non sappiamo ancora che un semipiano contiene rette. Tuttavia, abbiamo dimostrato

che l'esterno di un angolo contiene rette (cfr. [1.2.17](#)).

Mantenendo le notazioni e le costruzioni di cui alla dimostrazione del teorema precedente, colleghiamo tutti i vertici di \mathcal{S} con il punto R , ottenendo così un numero finito di semirette uscenti da R ; esistono semirette che giacciono su uno dei due semipiani della retta $a = BR$ ed esistono semirette contenute nel semipiano opposto, perché B è un punto interno di un lato del poligono. Le semirette contenute in uno dei semipiani di a possono essere disposte in modo che ve ne sia un'ultima, a partire dalla semiretta RB . Si ottengono pertanto due semirette l_1, l_2 uscenti da R e contenute in semipiani opposti rispetto ad a . L'angolo $w = \angle(l_1, l_2)$ divide il piano nelle due regioni \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 ; se l_1, l_2 sono allineate (ovvero, se sono la stessa retta), allora \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 sono semipiani. Supponiamo che \mathcal{W}_1 sia tale che $L \in \mathcal{W}_1$ (se così non è, basta rinominare le due regioni); allora, la regione \mathcal{W}_2 non contiene punti del poligono \mathcal{S} . Infatti, per definizione, \mathcal{W}_2 non contiene vertici di \mathcal{S} e, di conseguenza, nemmeno un punto interno di un qualunque lato del poligono si trova in \mathcal{W}_2 .

Ora, se la regione \mathcal{W}_1 coincide con l'interno di w , allora la dimostrazione del Teorema [2.1.11](#) è conclusa. Se invece \mathcal{W}_1 coincide con l'esterno di w , costruiamo un semipiano che non contiene punti di \mathcal{S} : colleghiamo ogni vertice di \mathcal{S} che si trova su un semipiano di a o sulla retta a stessa con ogni vertice che si trova nell'altro semipiano di a ; in questo modo otteniamo un numero finito di segmenti, ognuno dei quali interseca la retta a . Poiché su l_1 ed l_2 ci sono vertici di \mathcal{S} e poiché k è interna all'angolo $\angle(l_1, l_2)$, anche la semiretta k conterrà tali punti d'intersezione. Sia L' l'ultimo di questi punti a partire da R e sia A_μ, A_ν la coppia di vertici che genera il punto L' ; allora uno dei due semipiani \mathcal{G} determinati dalla retta $A_\mu A_\nu$ non contiene alcun punto di \mathcal{S} . Consideriamo dunque un punto $R' \in \mathcal{G} \cap k$ e ripetiamo per R' la costruzione eseguita per R , utilizzando denominazioni analoghe; in questo modo, \mathcal{S} è interamente contenuto all'interno e sui lati dell'angolo $w' = \angle(l'_1, l'_2)$. Poiché infatti le semirette l'_1 ed l'_2 intersecano la retta $A_\mu A_\nu$ in due punti V_1 e V_2 , il punto L' , in quanto punto interno del segmento $V_1 V_2$, è interno a w' . D'altra parte, il segmento LL' non può intersecare l'angolo w' ; dunque, il punto $L \in \mathcal{S}$ e, di conseguenza ogni punto di \mathcal{S} , è contenuto all'interno e sui lati di w' .

Il caso in cui \mathcal{W}_1 è un semipiano si tratta in maniera analoga, con la particolarità che, in questa situazione, i punti L' ed R coincidono. \square

2.2 Poligoni e trapezi

La dimostrazione proposta in questa sezione è tratta dalle dispense di “Computational Topology” di Jeff Erickson ([2]) ed è ispirata a un argomento adottato da Schönflies nel suo articolo *Über einen Satz aus der Analysis situs* ([9], descritto anche da H. Guggenheimer in [4]). La dimostrazione riguarda in realtà solo la prima parte dell’enunciato del Teorema, ovvero si dimostra soltanto che un poligono semplice divide i rimanenti punti del piano esattamente in due regioni, o “componenti connesse”. Inoltre, si utilizza l’assioma delle parallele, che noi però vogliamo evitare.

Sia \mathcal{P} un poligono piano (chiameremo α il piano che lo contiene) semplice, di vertici P_1, \dots, P_n . Fissata una retta r nel piano, non passante per alcuno dei vertici del poligono, tracciamo per ciascun vertice la corrispondente retta parallela a r . Queste rette dividono il piano in $n + 1$ bande illimitate, due delle quali sono in realtà dei semipiani ($n - 1$ strisce sono determinate da vertici consecutivi del poligono; le altre due sono i semipiani). Inoltre, i lati di \mathcal{P} dividono ciascuna di queste bande in un numero finito (perché i lati sono in numero finito) di trapezi, alcuni dei quali sono addirittura dei triangoli.

Per ovviare all’assioma delle parallele, abbiamo bisogno del seguente

Lemma 2.2.1. *Sia $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un insieme finito di punti su un piano. Allora, esistono $i = 1, \dots, n$, una retta r e un semipiano σ , determinato dalla retta r , tali che:*

- $P_i \in r$
- $P_j \in \sigma$, per ogni $j \neq i$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n \geq 1$. Il caso $n = 1$ è immediato da verificare: basta considerare una qualunque retta passante per P_1 , l’unico punto dell’insieme \mathcal{P} . Supponiamo dunque che la tesi sia vera per $n - 1 \geq 1$ e dimostriamola per n . Sia $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un insieme di $n \geq 2$ punti; per ipotesi induttiva, esistono $i' = 1, \dots, n - 1$ e una retta r' tali che $P_{i'} \in r'$ e $P_j \in \sigma'$ (uno dei due semipiani determinati dalla retta r') $\forall j = 1, \dots, n - 1, j \neq i'$. Allora, se anche $P_n \in \sigma'$, il lemma è dimostrato, altrimenti si distinguono due casi:

- $P_n \in r'$.



50

segmento $P_h A$ e come σ il semipiano determinato da r che contiene \overline{P} e quindi tutti i punti di \mathcal{P} diversi da P_k .

- $P_n \in \sigma''$. In tal caso, la dimostrazione è analoga, con la sola differenza che questa volta $P = P_n$.

□

Corollario 2.2.2. *Sia \mathcal{P} un poligono semplice. Allora, esiste un angolo w tale che, indicato con $I(w)$ l'interno dell'angolo, il poligono \mathcal{P} è contenuto in $\overline{I(w)} \stackrel{\text{def}}{=} I(w) \cup w$. Inoltre, esistono una retta s contenuta nell'esterno di w e un semipiano σ determinato da s , tali che $\mathcal{P} \subset \sigma$.*

Dimostrazione. Sia n il numero di vertici del poligono e siano P_1, \dots, P_n tali vertici. Per il lemma dimostrato precedentemente, esistono $i = 1, \dots, n$, una retta r e un semipiano β determinato da questa retta, tali che $P_j \in \beta$ per ogni $j \neq i$. Conseguentemente, poiché i semipiani sono connessi per poligonalità, tutto il poligono \mathcal{P} è contenuto in $\beta \cup r$. Sia ora Q un punto sulla retta r diverso da P_i ; tracciamo tutte le semirette uscenti da Q e passanti per i vertici del poligono.

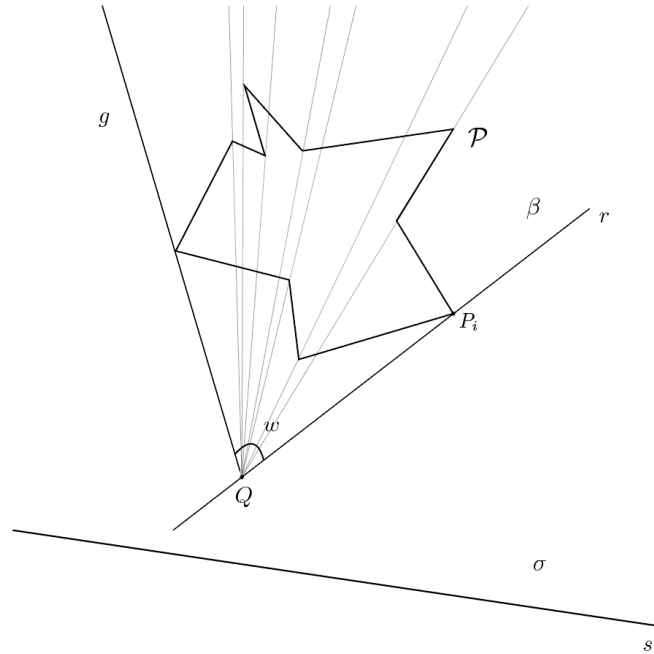


Figura 2.7

Allora, indicando con g l'ultima di queste semirette a partire da r , si ha che il poligono \mathcal{P} è tutto contenuto in $\overline{I(w)}$, dove w è l'angolo individuato da g e dalla semiretta della retta r individuata dal punto Q che contiene il vertice P_i . Poiché l'esterno di un angolo contiene rette, esiste una retta s contenuta nell'esterno di w ; allora, il poligono \mathcal{P} è contenuto in uno e uno solo dei semipiani (indicato con σ) determinati da s . Infatti, se per assurdo esistessero due punti distinti di \mathcal{P} appartenenti a semipiani distinti di s , una qualunque poligonale che li congiunge dovrebbe incontrare la retta s e quindi l'esterno di w , in contraddizione con il fatto che $\mathcal{P} \subset \overline{I(w)}$. \square

In virtù di questo lemma e del suo corollario, possiamo quindi considerare una retta g tale che \mathcal{P} è tutto contenuto in uno dei due semipiani della retta g . Sia Q un punto sul semipiano opposto e tracciamo tutte le semirette l_i uscenti da Q e passanti per i vertici del poligono, orientate da Q ai corrispondenti vertici del poligono. Senza ledere alla generalità, supponiamo che non esistano due vertici sulla stessa semiretta. Tali semirette dividono il piano in n regioni: l'esterno dell'angolo w individuato dalla prima e dall'ultima semiretta (rispetto all'ordine stabilito su g), e $n - 1$ interni di angoli (i cui lati sono due semirette consecutive). Inoltre, seguendo la stessa nomenclatura adottata da Erickson in [2], diciamo che i lati del poligono dividono ciascuno di questi interni di angoli in un numero finito di “trapezi”⁸; alcuni di questi sono illimitati⁹ e alcuni sono in realtà dei triangoli. Le intersezioni di queste semirette con la retta g consentono di ordinare i trapezi: essi saranno ordinati in base all'ordine determinato da questi punti d'intersezione sulla retta g .

⁸Non avendo i lati paralleli, non è corretto chiamare questi quadrilateri “trapezi”.

⁹Fra i trapezi includiamo anche l'esterno dell'angolo w .

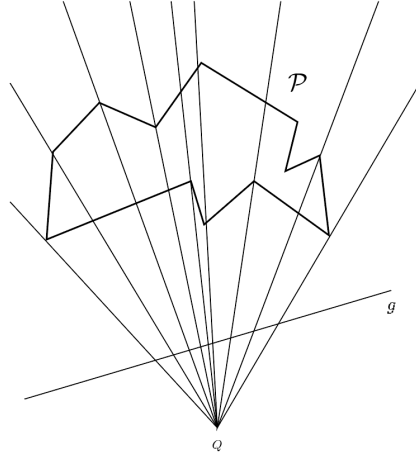


Figura 2.8

Ora, il bordo di ciascun trapezio consiste al massimo di quattro segmenti: il *pavimento*, il *soffitto* e le *pareti laterali*, che sono segmenti delle semirette l_i , eventualmente illimitati¹⁰, i cui estremi (se esistono) si trovano sui lati del poligono. Poniamo allora, per definizione, che ogni trapezio include le sue pareti laterali, ma non il pavimento né il suo soffitto, né un qualunque vertice sulle sue pareti. Ciascun trapezio così definito è connesso e due trapezi qualunque si intersecano in una parete comune, oppure non si intersecano affatto:

$$T_i \cap T_j = \emptyset \text{ o "parete comune" } \forall i \neq j$$

Inoltre,

$$\bigcup_i T_i = \alpha - \mathcal{P}$$

A partire da questa costruzione, la dimostrazione del Teorema si basa su due lemmi:

Lemma 2.2.3 (≤ 2). $\alpha - \mathcal{P}$ ha al massimo due componenti connesse.

Dimostrazione. Dato un lato $P_i P_{i+1} \subset \mathcal{P}$, orientiamo $P_i P_{i+1}$ da P_i a P_{i+1} . Dato un trapezio T_k diverso dall'esterno dell'angolo w , diciamo che T_k è “sinistro” o “destro” a seconda del lato del poligono su cui appare il trapezio. Nello specifico, diciamo che T_k è sinistro se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

- il soffitto è orientato da destra verso sinistra

¹⁰Cioè, eventualmente sono anch'essi semirette.

- il pavimento è orientato da sinistra verso destra
- la parete destra contiene un vertice P_i e il lato $P_{i-1}P_i$ sta “sotto” P_iP_{i+1}
- la parete sinistra contiene un vertice P_i e il lato $P_{i-1}P_i$ sta “sopra” P_iP_{i+1} .

Condizioni del tutto simmetriche definiscono un trapezio destro. Per quanto riguarda l'esterno dell'angolo w invece, diciamo che è un trapezio destro se la sua parete destra contiene un vertice P_i e il lato $P_{i-1}P_i$ sta sotto P_iP_{i+1} , oppure se la sua parete sinistra contiene un vertice P_i e il lato $P_{i-1}P_i$ sta sopra P_iP_{i+1} ; diciamo che è sinistro se la sua parete destra contiene un vertice P_i e il lato $P_{i-1}P_i$ sta sopra P_iP_{i+1} , oppure se la sua parete sinistra contiene un vertice P_i e il lato $P_{i-1}P_i$ sta sotto P_iP_{i+1} .

Ciascun trapezio può quindi essere destro, sinistro, oppure entrambi.

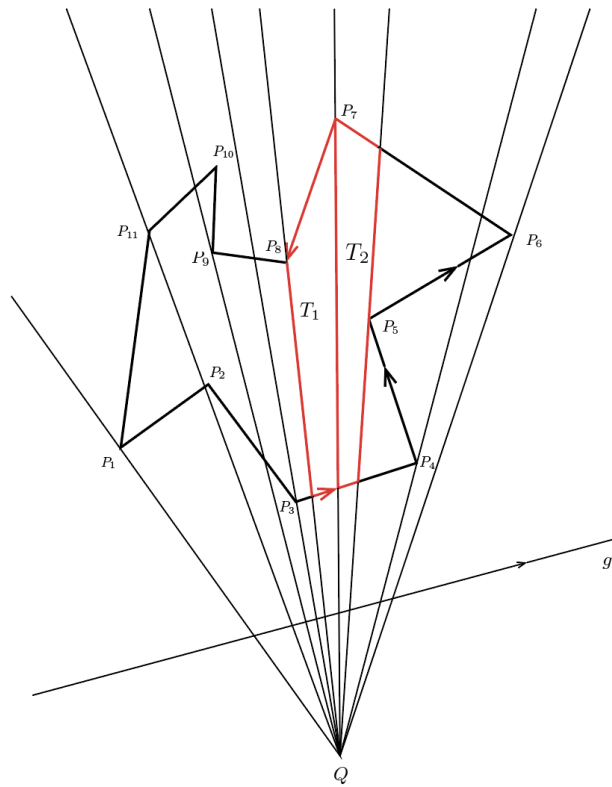


Figura 2.9

Esempio. In figura [2.9](#), T_1 e T_2 sono entrambi trapezi sinistri: T_1 lo è perché il suo pavimento è orientato da sinistra verso destra o, equivalentemente

perché il suo soffitto è orientato da destra verso sinistra; T_2 è sinistro perché la sua parete destra contiene il vertice P_5 e il lato P_4P_5 “sta sotto” il lato P_5P_6 . L'esterno dell'angolo w è invece un trapezio destro perché la sua parete sinistra contiene il vertice P_1 e il lato entrante $P_{11}P_1$ sta sopra il lato uscente P_1P_2 o, equivalentemente, perché la sua parete destra contiene il vertice P_6 e il lato entrante P_5P_6 sta sotto il lato uscente P_6P_7 .

Ora, attraversiamo il poligono a partire dal vertice P_1 e costruiamo una sequenza di trapezi sinistri in questo modo:

- Quando attraversiamo un lato P_iP_{i+1} orientato da sinistra verso destra, aggiungiamo tutti i trapezi che stanno appena sopra quel lato. Quando invece P_iP_{i+1} è orientato da destra verso sinistra, aggiungiamo tutti i trapezi che stanno appena al di sotto di quel lato.

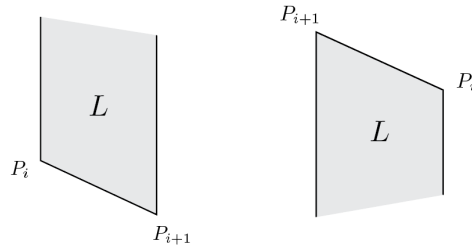


Figura 2.10

- Se incontriamo un vertice P_i t.c. P_{i-1}, P_{i+1} stanno entrambi alla destra di P_i e il lato entrante $P_{i-1}P_i$ sta sotto il lato uscente P_iP_{i+1} , allora aggiungiamo il trapezio che si trova alla sinistra di P_i .

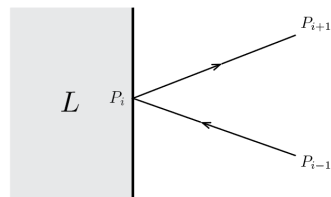


Figura 2.11

- Analogamente, se incontriamo un vertice P_i t.c. P_{i-1} e P_{i+1} stanno alla sinistra di P_i e $P_{i-1}P_i$ (il lato entrante) sta sopra P_iP_{i+1} (il lato uscente), allora aggiungiamo il trapezio alla destra di P_i .

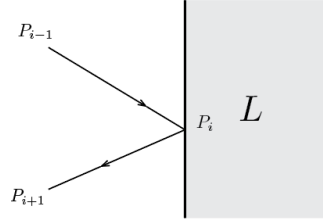


Figura 2.12

Così facendo, la sequenza costruita contiene ciascun trapezio sinistro almeno una volta e i trapezi della sequenza sono adiacenti fra loro. Poiché i trapezi sono connessi e trapezi adiacenti hanno una parete in comune, procedendo per induzione sul numero di trapezi sinistri della sequenza (quindi tutti i trapezi sinistri), si ha che l'unione dei trapezi sinistri è connessa¹¹. Con un argomento simmetrico, a partire dal vertice P_1 si costruisce la sequenza dei trapezi destri e, come sopra, si ha che anche l'unione dei trapezi destri è connessa.

In conclusione, abbiamo dimostrato che $\alpha - \mathcal{P}$ ha al massimo due componenti connesse: se esiste almeno un trapezio contemporaneamente destro e sinistro, allora $\alpha - \mathcal{P}$ è connesso perché unione di due connessi non disgiunti; altrimenti, $\alpha - \mathcal{P}$ ha esattamente due componenti connesse, date dall'unione dei trapezi destri e dall'unione dei trapezi sinistri. \square

Lemma 2.2.4 (≥ 2). $\alpha - \mathcal{P}$ ha almeno due componenti connesse.

Dimostrazione (Jordan): Definiamo un trapezio “pari” o “dispari” a seconda della parità del numero dei lati di \mathcal{P} che si trovano sopra il trapezio: se questo è pari, il trapezio si dice “pari”, altrimenti si dice “dispari”; ad esempio, in ciascun interno di un angolo i trapezi si alternano tra pari e dispari (ciascun trapezio ha sopra di sé esattamente un lato in meno rispetto ai lati che ha sopra di sé il trapezio che lo precede dal basso) e il trapezio più alto è pari perché non ha lati del poligono sopra di sé. Consideriamo due trapezi A e B con un lato in comune e A a sinistra di B (Fig. 2.13). Sia l_i la retta su cui giace questa parete comune e sia P_i il vertice corrispondente. Se P_{i-1} e P_{i+1} si trovano su semipiani opposti rispetto a l_i , allora A e B hanno la stessa parità. Se questo non accade, P_{i-1} e P_{i+1} stanno dalla stessa parte rispetto a l_i . Supponiamo che siano entrambi a sinistra di l_i : se P_i sta sotto la parete $A \cap B$, allora A e B stanno sotto lo stesso numero di lati di \mathcal{P} ; se

¹¹L'unione di connessi non disgiunti è connessa.

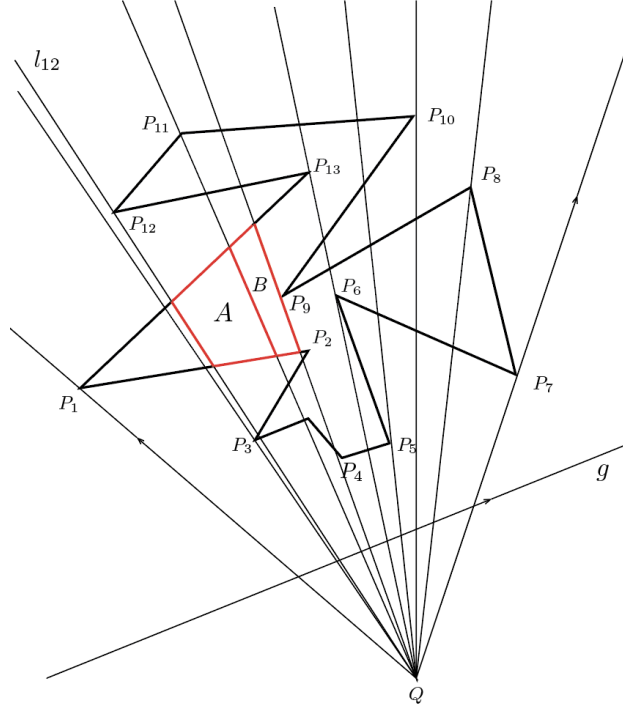


Figura 2.13

P_i sta sopra, allora l'altra parete di A interseca $P_{i-1}P_i$ e P_iP_{i+1} , quindi A ha sopra di sé due lati in più rispetto a B , ma comunque A e B hanno la stessa parità. Se P_{i-1} e P_{i+1} stanno alla destra di l_i , il ragionamento è analogo, a meno di scambiare i ruoli di A e B .

Morale: Due trapezi adiacenti hanno la stessa parità.

Se T_1, T_2 sono due trapezi nella stessa componente connessa di $\alpha - \mathcal{P}$, allora T_1 e T_2 sono adiacenti, oppure esistono dei trapezi intermedi T'_1, T'_2, \dots, T'_k , tali che $T_1, T'_1, \dots, T'_k, T_2$ sono adiacenti. In ogni caso, T_1 e T_2 hanno la stessa parità, ovvero: due trapezi che stanno nella stessa componente connessa di $\alpha - \mathcal{P}$ hanno la stessa parità o, equivalentemente, parità distinte individuano componenti connesse distinte. Poiché le possibili parità sono due e poiché esistono sia trapezi pari, sia trapezi dispari, ne deduciamo che esistono almeno due componenti connesse. \square

A questo punto, il Teorema di Jordan risulta essere una conseguenza dei due lemmi dimostrati: dato un poligono semplice $\mathcal{P} \subset \alpha$, dal secondo

lemma segue che $\alpha - \mathcal{P}$ ha almeno due componenti connesse, ma per il primo lemma, queste componenti non possono essere più di due. Dunque, $\alpha - \mathcal{P}$ ha esattamente due componenti connesse, il che equivale a dire che il poligono \mathcal{P} divide i rimanenti punti del piano α esattamente in due regioni, cioè due sottoinsiemi di $\alpha - \mathcal{P}$ disgiunti e connessi per poligonalità. \square

2.3 Una dimostrazione alternativa

La dimostrazione riportata in quest'ultima sezione, come la dimostrazione di Feigl, fa uso solamente degli assiomi di incidenza e dell'ordine della geometria piana, esposti al capitolo 1. Ci sarà utile un interessante risultato dovuto a G. H. Meisters, esposto in un articolo intitolato *Polygons have ears* ([7]), pubblicato dalla "Mathematical Association of America" nel 1975.

2.3.1 I poligoni hanno orecchie

Nella sua dimostrazione, Meisters assume il Teorema di Jordan, quindi da questo momento fino alla fine della sottosezione saranno ben definiti "interno" ed "esterno" di un poligono semplice.

Definizione 2.3.1. Una poligonale chiusa semplice (o semplicemente un poligono semplice) è detta **poligono di Jordan**. Sia $\mathcal{P} = V_1V_2\dots V_nV_1$ un poligono di Jordan: si dice che i vertici V_1 , V_2 e V_3 formano un **orecchio** (riferendosi all'interno del triangolo $V_1V_2V_3$) in V_2 se il segmento V_1V_3 giace all'interno di \mathcal{P} , estremi esclusi.

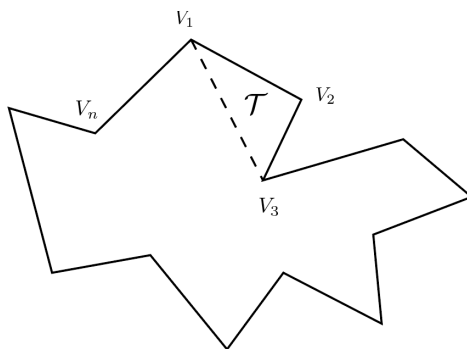


Figura 2.14

Definizione 2.3.2. Due orecchie si dicono **disgiunte** se le loro regioni interne sono disgiunte.

Teorema 2.3.3 (delle "due orecchie" - Meisters). Sia \mathcal{P} un poligono di Jordan di $n \geq 4$ vertici. Allora, \mathcal{P} ha due orecchie disgiunte.

Nella dimostrazione che segue, sarà necessario ordinare i vertici del poligono \mathcal{P} all'interno di un triangolo V_-VV_+ o sul lato V_-V_+ , selezionando quello più vicino a V . Per fare questo, Meisters si serve dell'assioma delle

parallele:

Per ciascuno dei vertici di \mathcal{P} contenuti all'interno del triangolo V_-VV_+ (che indicheremo anche con $I(V_-VV_+)$) o sul lato V_-V_+ , si traccia la corrispondente retta parallela a V_-V_+ ; si seleziona la retta che è più vicina (rispetto all'ordine determinato dalle intersezioni di tali rette con i lati V_-V e VV_+) al vertice V e si sceglie uno qualunque dei vertici di \mathcal{P} su di essa.

Per evitare l'assioma delle parallele, possiamo ragionare come segue:

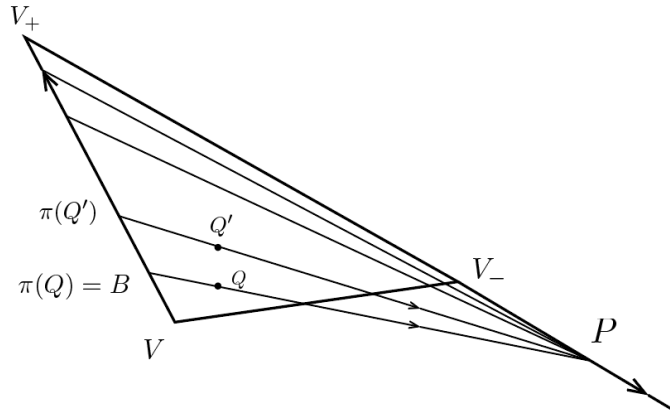


Figura 2.15

Prolunghiamo il lato V_-V_+ dalla parte di V_- e scegliamo un punto P sulla semiretta uscente da V_+ e contenente il vertice V_- , ma non sul segmento V_-V_+ . Da P tracciamo le semirette passanti per i vertici di \mathcal{P} contenuti in $I(V_-VV_+)$; esse incontrano il lato VV_+ , che orientiamo da V a V_+ . Stabiliamo la seguente notazione: se Q è un vertice di \mathcal{P} in $I(V_-VV_+)$, chiamiamo $\pi(Q)$ l'intersezione della corrispondente semiretta uscente da P (orientata da Q a P) con il lato VV_+ . Allora, per ogni Q, Q' , vertici di \mathcal{P} in $I(V_-VV_+)$, diciamo che

$$Q < Q' \stackrel{\text{def}}{\iff} \pi(Q) <_{VV_+} \pi(Q') \text{ oppure } \pi(Q) = \pi(Q') \text{ e } Q <_{\pi(Q)P} Q'$$

dove il $<_{VV_+}$ è da intendersi come “si trova prima di” rispetto all'ordine fissato sul lato VV_+ e, similmente, $<_{\pi(Q)P}$ sta a significare: “si trova prima di” rispetto all'ordine stabilito sul lato $\pi(Q)P$. La relazione $<$ definisce un

ordine totale fra i punti all'interno del triangolo V_-VV_+ o sul lato V_-V_+ .

A questo punto possiamo procedere con la dimostrazione:

Dimostrazione. Procediamo per induzione completa su $n \geq 4$. Sia V un vertice di \mathcal{P} e siano V_- e V_+ i vertici a esso adiacenti.

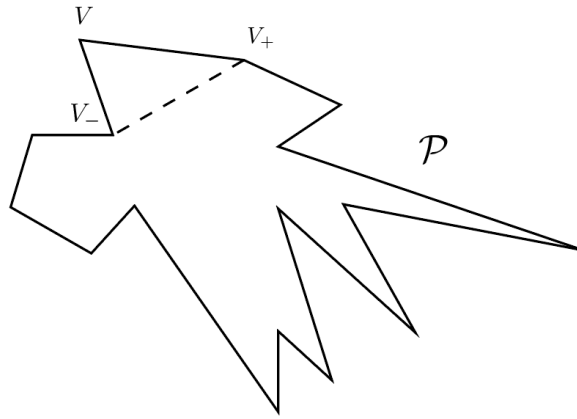


Figura 2.16

Allora vi sono due possibilità:

- 1) \mathcal{P} ha un orecchio in V . Rimuovendo quest'orecchio, rimaniamo con un triangolo se $n = 4$, oppure con un poligono di Jordan \mathcal{P}' al massimo di $n - 1$ vertici¹² se $n > 4$ (il poligono che si ottiene è semplice perché per definizione di orecchio, V_-V_+ non incontra alcun lato di \mathcal{P} in un punto interno). Nel primo caso, abbiamo trovato due orecchie disgiunte (esse condividono solo il lato V_-V_+). Nel secondo caso, se \mathcal{P}' non è un triangolo, applichiamo l'ipotesi induttiva e troviamo che esistono $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, orecchie disgiunte per \mathcal{P}' . Allora, poiché sono disgiunte, non possono essere entrambe in V_- o V_+ , dunque almeno una delle due, diciamo \mathcal{E}_1 , non deve essere in V_- né in V_+ . Pertanto, siccome le orecchie di \mathcal{P}' sono anche orecchie di \mathcal{P} , l'orecchio di partenza ed \mathcal{E}_1 sono orecchie disgiunte per \mathcal{P} (sono disgiunte perché V_-VV_+ e \mathcal{P}' hanno solamente V_-V_+ in comune).
- 2) \mathcal{P} non ha un orecchio in V . Allora, il triangolo V_-VV_+ deve contenere al suo interno o sul lato V_-V_+ un vertice di \mathcal{P} . Infatti, supponiamo

¹²Possono essere meno di $n - 1$ se V_-V_+ è allineato con uno dei lati di \mathcal{P} .

per assurdo che non sia così. \implies Poiché V_-VV_+ non è un orecchio, esiste un lato di \mathcal{P} , V_iV_{i+1} , che incontra il segmento V_-V_+ in un punto interno.

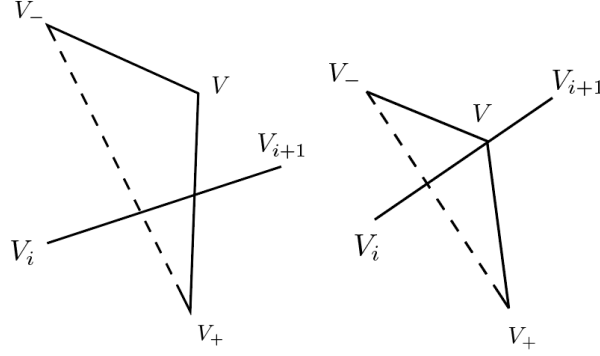


Figura 2.17

Siccome stiamo assumendo che né $I(V_-VV_+)$ (cioè l'interno del triangolo V_-VV_+) né V_-V_+ contengano alcun vertice di \mathcal{P} , $\implies V_i, V_{i+1} \notin V_-V_+$ e $V_i, V_{i+1} \notin I(V_-VV_+)$. Allora, vi sono due possibilità:

- il lato V_iV_{i+1} incontra il vertice V , oppure
- per l'assioma di Pasch, V_iV_{i+1} incontra V_-V o VV_+ in un punto interno.

Entrambi i casi però contraddicono l'ipotesi di semplicità del poligono \mathcal{P} .

Dunque, devono esistere vertici di \mathcal{P} all'interno del triangolo V_-VV_+ , o all'interno del lato V_-V_+ . Adottando la procedura descritta prima della dimostrazione, selezioniamo il vertice Z “più vicino” a V e indichiamo con A e B i punti d'intersezione della semiretta $\pi(Z)P$ rispettivamente con V_-V e VV_+ (in particolare, $B = \pi(Z)$); allora, per costruzione, $I(VAB)$ non contiene punti di \mathcal{P} - in particolare, il segmento VZ non incontra il poligono in alcun punto diverso da V e Z . Allora, VZ divide il poligono \mathcal{P} in due “sottopoligoni” di Jordan, $\mathcal{P}_1 = ZVV_-...Z$ e $\mathcal{P}_2 = ZVV_+...Z$, con un numero di vertici minore di n .

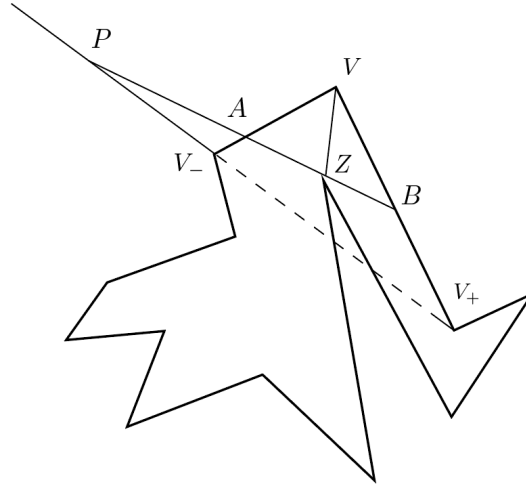


Figura 2.18

Distinguiamo ora due casi:

- Se $n = 4$, \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 sono triangoli, quindi sono le orecchie cercate.
- Se $n > 4$, allora almeno uno dei due sottopoligoni, diciamo \mathcal{P}_1 , non è un triangolo; dunque, applicando l'ipotesi induttiva a \mathcal{P}_1 si trovano due orecchie disgiunte, \mathcal{E}_1^- ed \mathcal{E}_1^+ . Fra queste, sia \mathcal{E}_1 quella che non è in V né in Z . A questo punto, se \mathcal{P}_2 è un triangolo, allora \mathcal{E}_1 e \mathcal{P}_2 sono due orecchie disgiunte per \mathcal{P} , altrimenti applichiamo l'ipotesi induttiva anche a \mathcal{P}_2 , trovando due orecchie disgiunte \mathcal{E}_2^- e \mathcal{E}_2^+ ; fra queste, sia \mathcal{E}_2 quella che non è in V né in Z . Allora, \mathcal{E}_1 ed \mathcal{E}_2 sono due orecchie disgiunte per \mathcal{P} e ciò conclude la dimostrazione.

□

2.3.2 Il Teorema di Jordan

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema di Jordan vero e proprio. Osserviamo preliminarmente che interno ed esterno sono certamente ben definiti per un triangolo. Infatti,

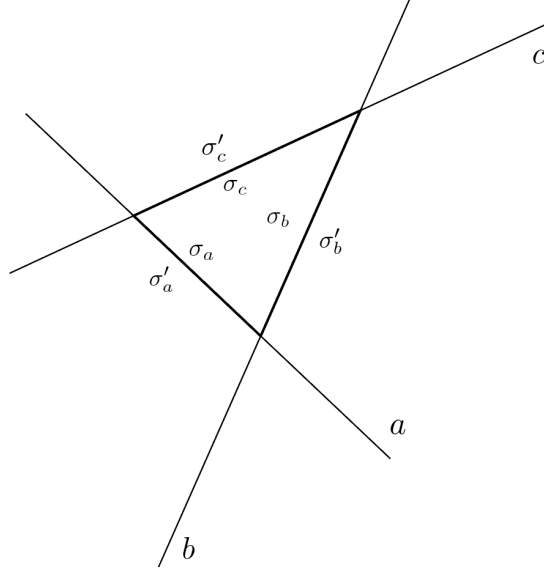


Figura 2.19

siano a , b , c le tre rette che contengono i lati del triangolo; ciascuna di esse divide i rimanenti punti del piano in due semipiani, che chiamiamo rispettivamente σ_a e σ'_a , σ_b e σ'_b , σ_c e σ'_c . Allora, il triangolo divide i rimanenti punti del piano α nelle due regioni

$$I(\mathcal{P}) = \sigma_a \cap \sigma_b \cap \sigma_c$$

e

$$E(\mathcal{P}) = \sigma'_a \cup \sigma'_b \cup \sigma'_c$$

$I(\mathcal{P})$ ed $E(\mathcal{P})$ sono chiaramente disgiunti e la loro unione è tutto $\alpha - \mathcal{P}$.

Pertanto, è ben posta la seguente

Definizione 2.3.4. Sia $\mathcal{P} = V_1 \dots V_n$ un poligono semplice e sia V_i un suo vertice. Si dice che \mathcal{P} ha un **triangolo buono** in V_i se i vertici adiacenti V_{i-1} e V_{i+1} sono tali che il segmento $V_{i-1}V_{i+1}$ non incontra il poligono in alcun punto, a eccezione di V_{i-1} e V_{i+1} stessi e l'interno del triangolo $V_{i-1}V_iV_{i+1}$ non contiene alcun punto del poligono.

L'idea della dimostrazione è quella di ragionare per induzione completa sul numero di vertici del poligono e dimostrare, per il passo induttivo, che

ogni poligono semplice di almeno quattro vertici ha un triangolo buono, assumendo il Teorema di Jordan per poligoni con un numero di vertici minore del poligono dato.

Lemma 2.3.5. *Sia \mathcal{P} un poligono semplice di $n \geq 4$ vertici. Allora esiste un triangolo buono per \mathcal{P} .*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che \mathcal{P} non abbia triangoli buoni. Allora, per ogni $i = 1 \dots n$, \mathcal{P} non ha un triangolo buono nel vertice V^i . Detti V_-^i e V_+^i i vertici a esso adiacenti, come nella dimostrazione del Teorema delle due orecchie (2.3.3), osserviamo che il triangolo $V_-^i V^i V_+^i$ deve contenere al suo interno o sul lato $V_-^i V_+^i$ almeno un vertice di \mathcal{P} . Fra i vertici di \mathcal{P} contenuti all'interno del triangolo $V_-^i V^i V_+^i$ o sul lato $V_-^i V_+^i$, ordinati secondo l'ordine totale definito nella sezione precedente, selezioniamo quello più vicino a V^i (cioè consideriamo il minimo rispetto a quest'ordine) e chiamiamolo $\varphi(V^i)$. Allora, il segmento $V^i \varphi(V^i)$ non contiene punti di \mathcal{P} a eccezione di V^i e $\varphi(V^i)$ stessi.

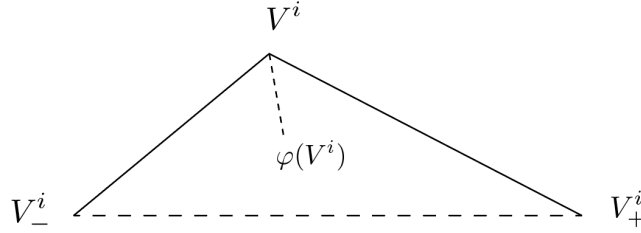


Figura 2.20

Facendo questo per ogni vertice del poligono, definiamo una funzione

$$\varphi : \{V^1, \dots, V^n\} \rightarrow \{V^1, \dots, V^n\}$$

che è iniettiva. Infatti, supponiamo per assurdo che esistano $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ tali che $\varphi(V^i) = \varphi(V^j) = W$. Allora, essendo \mathcal{P} un poligono semplice, i lati $V^i V_-^i$, $V^i V_+^i$, $V^j V_-^j$ e $V^j V_+^j$ non possono intersecarsi, quindi il triangolo $V_-^j V^j V_+^j$ deve essere contenuto all'interno del triangolo $V_-^i V^i V_+^i$ o, al massimo, può intersecare il lato $V_-^i V_+^i$ (o viceversa, scambiando i ruoli di i e j). Allora, a seconda di come sono ordinati i vertici V^j , V_-^j , V_+^j e W all'interno del triangolo $V_-^i V^i V_+^i$, assumendo sempre $V_-^j < V_+^j$, sono possibili tre situazioni:

1. $V_-^j < W < V^j < V_+^j$

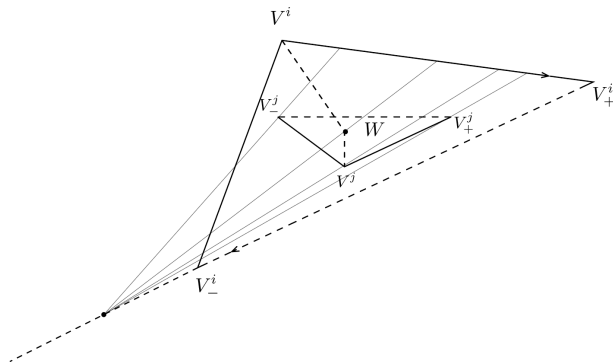


Figura 2.21

2. $V_-^j < W < V_+^j < V^j$

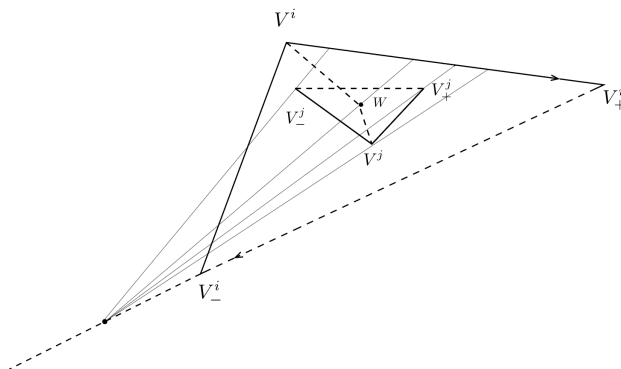


Figura 2.22

3. $V^j < W < V_-^j < V_+^j$

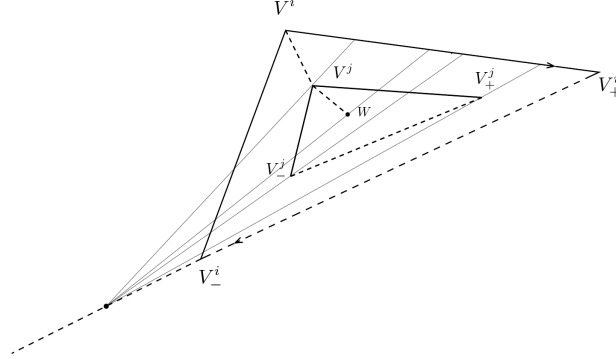


Figura 2.23

In ogni caso, si trova che uno tra V^j , V_-^j e V_+^j precede W nell'ordine all'interno del triangolo $V_-^i V^i V_+^i$, contraddicendo la minimalità di $\varphi(V^i) = W$.

Dunque, φ è iniettiva e, per il principio della piccionaia, è anche suriettiva, cioè: φ è una permutazione degli n vertici del poligono \mathcal{P} . Allora, φ si decompone in modo unico come prodotto di cicli a due a due disgiunti e tale decomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori¹³. Pertanto, vi sono due possibilità:

- φ è essa stessa un ciclo. \implies I vertici del poligono¹⁴

$$\mathcal{P}' = V^1 \varphi(V^1) \dots \varphi^{n-1}(V^1)$$

sono tutti e soli i vertici del poligono \mathcal{P} e \mathcal{P}' è un poligono semplice. Infatti, se per assurdo esistessero $i \neq j$ tali che

$$\varphi^i(V^1) \varphi^{i+1}(V^1) \cap \varphi^j(V^1) \varphi^{j+1}(V^1) \neq \emptyset$$

allora vi sarebbero due possibilità: il segmento $\varphi^j(V^1) \varphi^{j+1}(V^1)$ incontra uno tra $\varphi^i(V^1) \varphi^i(V^1)_-$ e $\varphi^i(V^1) \varphi^i(V^1)_+$, oppure è tutto contenuto all'interno del triangolo

$$\varphi^i(V^1)_- \varphi^i(V^1) \varphi^i(V^1)_+$$

Entrambe le situazioni condurrebbero però a una contraddizione: nel primo caso, $\varphi^j(V^1) \varphi^{j+1}(V^1)_+$ intersecherebbe il poligono \mathcal{P} in un punto

¹³Ricordiamo infatti che cicli disgiunti commutano.

¹⁴Con φ^k intendiamo la composizione di φ con se stessa k volte.

diverso da $\varphi^j(V^1)$ e $\varphi^{j+1}(V^1)$, nel secondo caso, il vertice $\varphi^{i+1}(V^1)$ non sarebbe il più vicino a $\varphi^i(V^1)$ all'interno del triangolo

$$\varphi^i(V^1)_- \varphi^i(V^1) \varphi^i(V^1)_+$$

(infatti, uno tra $\varphi^j(V^1)$ e $\varphi^{j+1}(V^1)$ sarebbe più vicino a $\varphi^i(V^1)$ rispetto a $\varphi^{i+1}(V^1)$).

Allora, per costruzione, ogni vertice del poligono \mathcal{P} è contenuto all'interno di un triangolo avente due lati del poligono \mathcal{P} . Ma questo contraddice l'esistenza, per il lemma [2.2.1](#), di un vertice V^{i_0} e di una retta r tali che $V^{i_0} \in r$ e tutti gli altri vertici (dunque tutto il poligono eccetto V^{i_0}) si trovano in uno solo dei due semipiani determinati dalla retta r (V^{i_0} non potrebbe essere tutto contenuto in un triangolo).

- φ non è un ciclo. \implies Consideriamo, nella decomposizione di φ , un ciclo di lunghezza $k < n$. Allora, non può essere $k = 2$. Infatti, supponiamo per assurdo che esistano $i \neq j$ tali che $\varphi(V^i) = V^j$ e $\varphi(V^j) = V^i$.

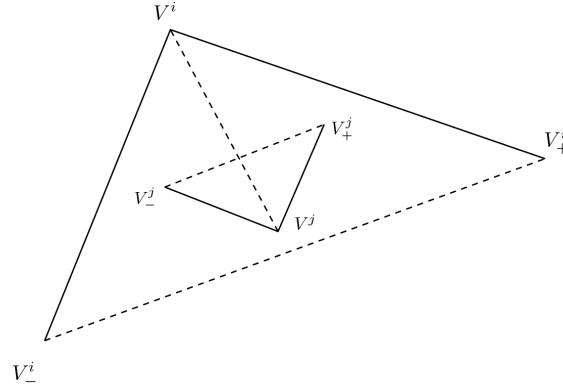


Figura 2.24

Allora, di nuovo V^j non è il vertice più vicino a V^i all'interno del triangolo $V_-^i V^i V_+^i$, o viceversa, a meno di scambiare i ruoli di i e j . Dunque, $k \geq 3$ e il poligono corrispondente

$$\mathcal{P}_k = V^{k_1} \varphi(V^{k_1}) \dots \varphi^{k-1}(V^{k_1})$$

è semplice, i suoi vertici sono anche vertici di \mathcal{P} ma i suoi lati intersecano \mathcal{P} unicamente nei vertici. Pertanto, siano $V_- = \varphi^j(V^{k_1})$ e $V_+ = \varphi^{j+1}(V^{k_1})$ due vertici consecutivi in \mathcal{P}_k ; poiché questi sono anche

vertici di \mathcal{P} , esiste una poligonale semplice $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ che congiunge V_- e V_+ .

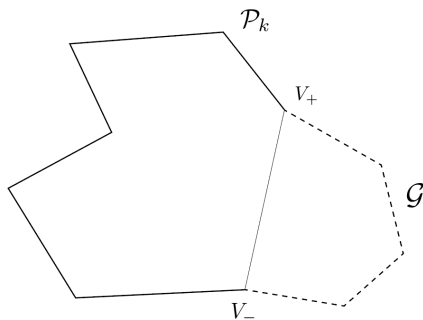


Figura 2.25

Essendo \mathcal{P}_k un poligono di Jordan di $3 \leq k < n$ vertici, per ipotesi induttiva sono ben definiti il suo interno $I(\mathcal{P}_k)$ e il suo esterno $E(\mathcal{P}_k)$ e quindi la poligonale \mathcal{G} è tutta contenuta in una e una sola di queste due regioni. Per fissare le idee, sia $\mathcal{G} \subset E(\mathcal{P}_k)$. Definiamo

$$\mathcal{C} = \mathcal{G} \cup V_- V_+.$$

\mathcal{C} è un poligono di Jordan di almeno tre vertici, ma meno di n , perché $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{P}$ e $V_- V_+$ interseca \mathcal{P} solo in V_- e V_+ . Dunque, per ipotesi induttiva, è ben definito l'interno di \mathcal{C} , $I(\mathcal{C})$. Ora, non è escluso che $I(\mathcal{C})$ contenga punti di \mathcal{P} ; tuttavia, se $I(\mathcal{C})$ contiene un punto di \mathcal{P} , allora contiene un intero lato di \mathcal{P} , diverso da quelli della poligonale \mathcal{G} . Più in generale, esiste una poligonale semplice $\mathcal{G}' \subset \mathcal{P}$ contenuta in $I(\mathcal{C})$; siccome il poligono \mathcal{P} è semplice, questa poligonale non può avere estremi in alcun punto interno dei lati di \mathcal{G} , né in dei vertici di \mathcal{G} diversi da V_- e V_+ . Pertanto, la poligonale \mathcal{G}' ha estremi esattamente in V_- e in V_+ . Allora

$$\mathcal{C}' = \mathcal{G}' \cup V_- V_+$$

è anch'esso un poligono di Jordan con un numero di vertici minore di n , ma questa volta $I(\mathcal{C}')$ non può contenere punti di \mathcal{P} perché, di nuovo, se contenesse qualche punto di \mathcal{P} dovrebbe esistere una poligonale semplice $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{P}$ contenuta in $I(\mathcal{C}')$, congiungente i vertici V_- e V_+ .

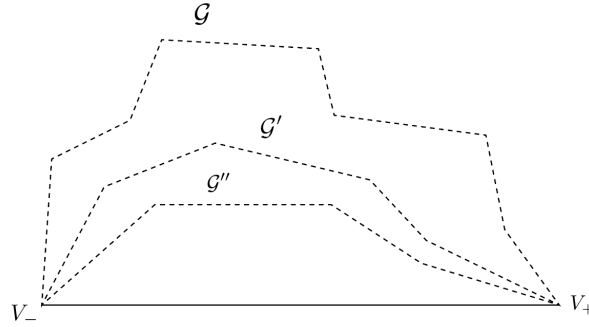


Figura 2.26

Ma allora il poligono \mathcal{P} non sarebbe semplice perché esisterebbero tre lati distinti aventi un vertice in comune (V_- o V_+).

A meno di passare eventualmente al poligono \mathcal{C}' , possiamo quindi supporre in partenza che $I(\mathcal{C})$ non contenga punti di \mathcal{P} . A questo punto,

- se \mathcal{C} è un triangolo, allora è un triangolo buono per \mathcal{P} perché $I(\mathcal{C})$ non contiene punti di \mathcal{P} e, per definizione di φ , il lato V_-V_+ non incontra \mathcal{P} in alcun punto eccetto che in V_- e V_+ ;
- se \mathcal{C} ha più di tre vertici, per il Teorema [2.3.3](#) \mathcal{C} ha due orecchie disgiunte, \mathcal{E}_1 ed \mathcal{E}_2 . Essendo disgiunte, non possono essere entrambe in V_- o in V_+ , dunque ne esiste una, diciamo \mathcal{E}_1 , che non è né in V_- né in V_+ . Siccome $I(\mathcal{C})$ non contiene punti di \mathcal{P} , \mathcal{E}_1 è anche un triangolo buono per \mathcal{P} .

In ciascuno dei due casi si riesce quindi a trovare un triangolo buono per \mathcal{P} , in contraddizione con l'assunzione iniziale che \mathcal{P} non avesse triangoli buoni.

□

Osservazione: Poiché φ è suriettiva e non ha punti fissi, per definizione di φ ogni vertice di \mathcal{P} è contenuto all'interno di un triangolo avente due lati di \mathcal{P} , ma ciò contraddice il lemma [2.2.1](#). Questa argomentazione si può adottare indipendentemente dal fatto che φ sia un ciclo o meno. Abbiamo comunque scelto di distinguere i casi “ φ è un ciclo” e “ φ non è un ciclo” per mostrare il significato geometrico - non solamente logico e algebrico - della funzione φ : se φ è un ciclo, iterando la mappa φ a partire dal vertice V^1 è possibile costruire un nuovo poligono semplice i cui vertici sono tutti e soli i vertici di

\mathcal{P} ma i cui lati non incontrano i lati di \mathcal{P} in alcun punto interno; se invece φ non è un ciclo, a ogni ciclo contenuto nella decomposizione di φ corrisponde un poligono semplice i cui vertici sono anche vertici di \mathcal{P} , ma i cui lati non incontrano i lati di \mathcal{P} in alcun punto interno. In questo caso, per concludere la dimostrazione possiamo usare anche un argomento induttivo (usare l'induzione, d'altra parte, è l'idea alla base della dimostrazione alternativa proposta in questa sezione), raggiungendo una contraddizione non con la definizione di φ , bensì con l'assunzione iniziale che il poligono \mathcal{P} non avesse triangoli buoni.

Con l'aiuto di questo Lemma possiamo dimostrare il Teorema di Jordan:

Dimostrazione (del Teorema di Jordan). Sia \mathcal{P} un poligono semplice contenuto in un piano α . Senza ledere alla generalità, supponiamo che non esistano tre vertici allineati. Procediamo per induzione completa sul numero $n \geq 3$ dei vertici del poligono:

- $n = 3 \implies \mathcal{P}$ è un triangolo e abbiamo visto sopra che interno ed esterno sono ben definiti. Rimane da dimostrare che l'esterno di un triangolo contiene delle rette, mentre l'interno non contiene alcuna retta. Sia $\mathcal{T} = ABC$ un triangolo e siano a, b, c le rette su cui giacciono i lati del triangolo.

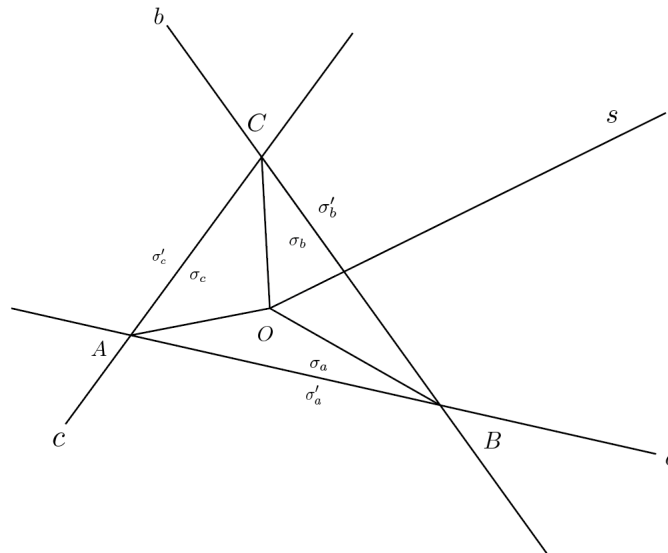


Figura 2.27

Allora,

$$I(\mathcal{T}) = \sigma_a \cap \sigma_b \cap \sigma_c$$

$$E(\mathcal{T}) = \sigma'_a \cup \sigma'_b \cup \sigma'_c$$

$I(\mathcal{T})$ non contiene rette perché non può contenere nemmeno una semiretta. Infatti, per assurdo sia s una semiretta uscente da un punto $O \in I(\mathcal{T})$, tutta contenuta in $I(\mathcal{T})$. Allora, la semiretta s , non potendo coincidere con nessuna tra OA , OB e OC , è contenuta in una e una sola delle seguenti tre regioni a due a due disgiunte: $I(\angle AOB)$, $I(\angle BOC)$, $I(\angle AOC)$. Ma allora, per il Corollario 1.2.19, s incontra uno tra AB , BC e AC in un punto interno, ma questo è assurdo perché avevamo assunto $s \subset I(\mathcal{T})$.

Per dimostrare che l'esterno contiene rette invece, si ragiona come nel caso generale, riportato di seguito.

- Sia la tesi vera per poligoni semplici di $3 \leq k < n$ vertici e sia \mathcal{P} un poligono semplice di $n \geq 4$ vertici. Allora, per il Lemma 2.3.5, esiste $\mathcal{T} = V_-VV_+$ triangolo buono per \mathcal{P} ¹⁵.

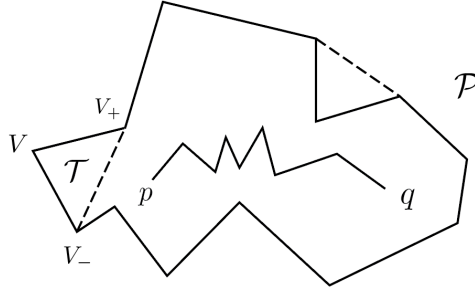


Figura 2.28

Dunque, sostituendo la coppia di lati (V_-V, VV_+) con il singolo lato V_-V_+ (che non incontra \mathcal{P} in alcun punto eccetto che negli estremi, per definizione di triangolo buono), otteniamo un poligono di Jordan \mathcal{P}' al massimo di $n - 1$ vertici. Per ipotesi induttiva, sono ben definiti $I(\mathcal{P}')$ ed $E(\mathcal{P}')$; dunque vi sono due possibilità: i lati rimossi V_-V e VV_+

¹⁵Si osservi che l'applicazione di questo lemma è lecita, poiché quest'ultimo è stato dimostrato assumendo il Teorema di Jordan per poligoni con un minor numero di vertici.

(eccetto V_- e V_+) sono in $E(\mathcal{P}')$ (cioè sono “esterni” a \mathcal{P}'), oppure sono contenuti in $I(\mathcal{P}')$ (cioè sono “interni” a \mathcal{P}'). Nel primo caso, diciamo che il triangolo \mathcal{T} è un **orecchio** per \mathcal{P} ; nel secondo caso, una **bocca**.

Supponiamo che \mathcal{T} sia un orecchio per \mathcal{P} e poniamo:

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}) &\stackrel{\text{def}}{=} I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}') \\ E(\mathcal{P}) &\stackrel{\text{def}}{=} E(\mathcal{T}) \cap E(\mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Dimostriamo che $I(\mathcal{P})$ ed $E(\mathcal{P})$, così definiti, sono proprio le due componenti connesse di $\alpha - \mathcal{P}$:

1. $I(\mathcal{P})$ ed $E(\mathcal{P})$ sono disgiunti.

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}) \cap E(\mathcal{P}) &= (I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}')) \cap (E(\mathcal{T}) \cap E(\mathcal{P}')) \\ &= (I(\mathcal{T}) \cap E(\mathcal{T}) \cap E(\mathcal{P}')) \cup (I(\mathcal{P}') \cap E(\mathcal{T}) \cap E(\mathcal{P}')) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

per il caso $n = 3$ e l'ipotesi induttiva.

2. $I(\mathcal{P}) \cup E(\mathcal{P}) = \alpha - \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}) \cup E(\mathcal{P}) &= I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}') \cup (E(\mathcal{T}) \cap E(\mathcal{P}')) \\ &= I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}') \cup ((\alpha - \mathcal{T} - I(\mathcal{T})) \cap (\alpha - \mathcal{P}' - I(\mathcal{P}')))) \\ &= I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}') \cup (\alpha - (\mathcal{T} \cup \mathcal{P}' \cup I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}')))) \\ &= I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}') \cup ((\alpha - \mathcal{P}) - (I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}')))) \\ &= \alpha - \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Da ciò segue, in particolare, che $I(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = E(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

3. $I(\mathcal{P})$ è connesso per poligonali:

osserviamo anzitutto che, siccome $I(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = (I(\mathcal{T}) \cap \mathcal{P}) \cup (I(\mathcal{P}') \cap \mathcal{P}) = \emptyset$, allora

$$I(\mathcal{T}) \cap \mathcal{P} = I(\mathcal{P}') \cap \mathcal{P} = \emptyset. \quad (2.1)$$

Dunque, se $p, q \in I(\mathcal{T})$, per il caso $n = 3$, esiste una poligonale $\mathcal{C} \subset I(\mathcal{T})$ che collega p e q e tale poligonale non incontra \mathcal{P} per la [2.1](#). Analogamente, se $p, q \in I(\mathcal{P}')$, per ipotesi induttiva, esiste una poligonale $\mathcal{C}' \subset I(\mathcal{P}')$ che collega p e q e non incontra \mathcal{P} per la [2.1](#). Infine, se $p \in I(\mathcal{T})$ e $q \in I(\mathcal{P}')$, scegliamo un punto p' interno al lato $V_- V_+$.

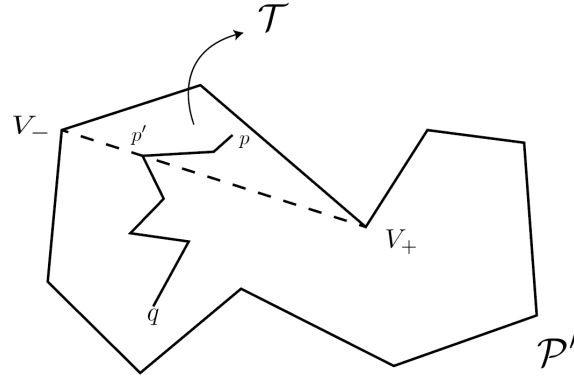


Figura 2.29

Allora, esiste una poligonale $\mathcal{C}' \subset I(\mathcal{T})$ che collega p e p' ed esiste una poligonale $\mathcal{C}'' \subset I(\mathcal{P}')$ che collega p' e q . Pertanto, $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'' \subset I(\mathcal{P})$ è una poligonale che collega p e q e non incontra \mathcal{P} .

4. $E(\mathcal{P})$ è connesso per poligonalità:

siano $p, q \in E(\mathcal{P})$; allora $p, q \in E(\mathcal{T})$ e $p, q \in E(\mathcal{P}')$, dunque esiste una poligonale $\mathcal{C}' \subset E(\mathcal{P}')$ che congiunge p e q (Fig. 2.30). Occorre provare che esiste una poligonale $\mathcal{C} \subset E(\mathcal{P})$ che congiunge p e q .

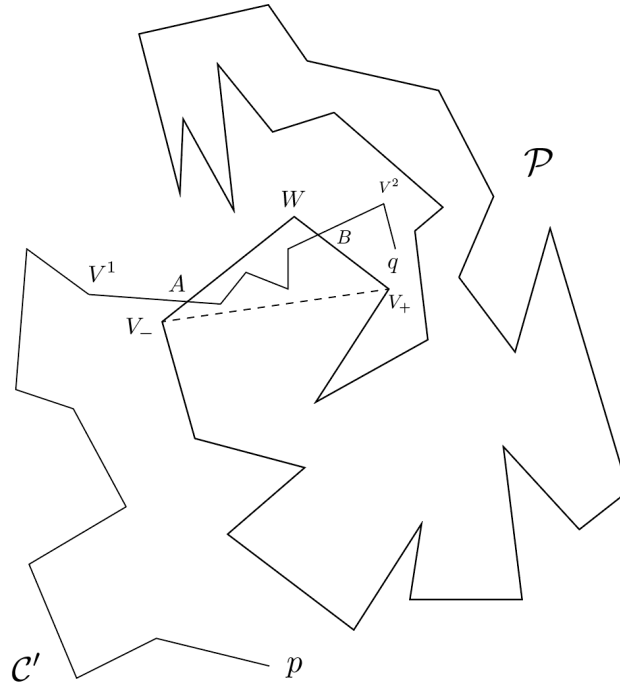


Figura 2.30

Consideriamo la poligonale \mathcal{C}' : se non interseca il triangolo $\mathcal{T} = V_-WV_+$, allora \mathcal{C}' è la poligonale cercata; altrimenti, \mathcal{C}' interseca il triangolo \mathcal{T} in un numero finito di punti (salvo il caso evitabile in cui un lato di \mathcal{C}' giace su un lato di \mathcal{T}). Fra questi, siano A e B rispettivamente il primo e l'ultimo punto. Supponiamo dapprima che A e B appartengano a lati distinti del triangolo V_-WV_+ , ovvero che $A \in V_-W$ e $B \in WV_+$. Siano V^1 il vertice di \mathcal{C}' che precede A e V^2 il vertice di \mathcal{C}' che segue B .

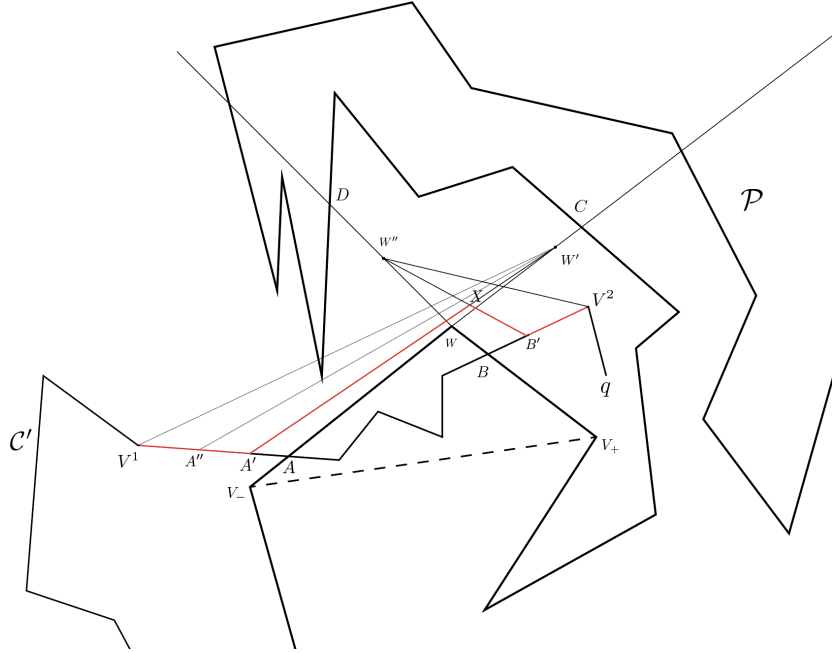


Figura 2.31

Consideriamo la semiretta V_-W : se questa incontra il poligono \mathcal{P} , chiamiamo C il primo punto d'intersezione e scegliamo un qualunque punto W' tra W e C ; se invece la semiretta V_-W non incontra il poligono \mathcal{P} in alcun punto, scegliamo come W' un qualunque punto che segue W sulla semiretta V_-W . Consideriamo ora il triangolo V^1AW' : il suo interno e il lato V^1W' contengono un numero finito di vertici di \mathcal{P} , quindi tracciamo tutte le semirette uscenti dal vertice W' e passanti per questi punti¹⁶. Siccome il lato AW' non incontra il poligono \mathcal{P} in alcun punto diverso da quelli del lato AW , tra le suddette semirette è possibile individuarne una prima, a partire dal lato AW' . Sia A'' il punto d'intersezione di questa semiretta con il lato V^1A e sia A' un punto interno del lato $A''A$; allora, il segmento $W'A'$ non contiene punti di \mathcal{P} ¹⁷. Ragioniamo in modo analogo con la semiretta BW e con il lato BV^2 , determinando un punto B' interno al lato BV^2 e un punto W'' sul prolungamento di BW dalla parte di W , tali che il segmento WW'' non contiene punti di \mathcal{P} , eccetto W . A questo punto, se

¹⁶Osserviamo che se l'interno di V^1AW' contiene un lato di \mathcal{P} , o parte di esso, allora deve contenere almeno uno dei suoi estremi.

¹⁷Se invece il triangolo V^1AW' non contiene punti di \mathcal{P} , basta considerare come A' un qualunque punto interno del lato V^1A .

i segmenti $A'W'$ e $B'W''$ si incontrano in un punto X , allora la poligonale $\mathcal{C} = p \dots V^1 A' X B' V^2 \dots q$ congiunge p e q ed è interamente contenuta nell'esterno di \mathcal{P} ; altrimenti, siano X il punto d'intersezione del segmento $B'W''$ con la semiretta V_-W , e Y il punto d'intersezione del segmento $A'W'$ con la semiretta V_+W . Allora sono possibili due situazioni:

- X sta tra W' e C , il primo punto d'intersezione della semiretta V_-W con il poligono \mathcal{P} ;

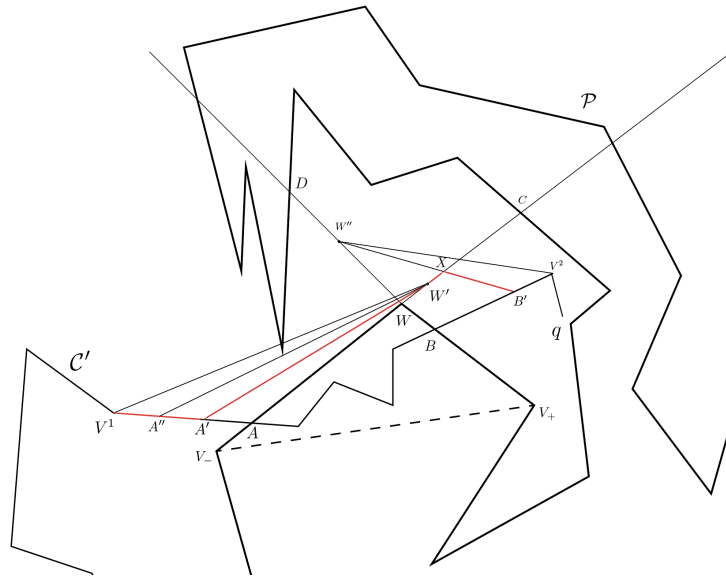


Figura 2.32

- Y sta tra W'' e D , il primo punto d'intersezione della semiretta V_+W con il poligono \mathcal{P} .

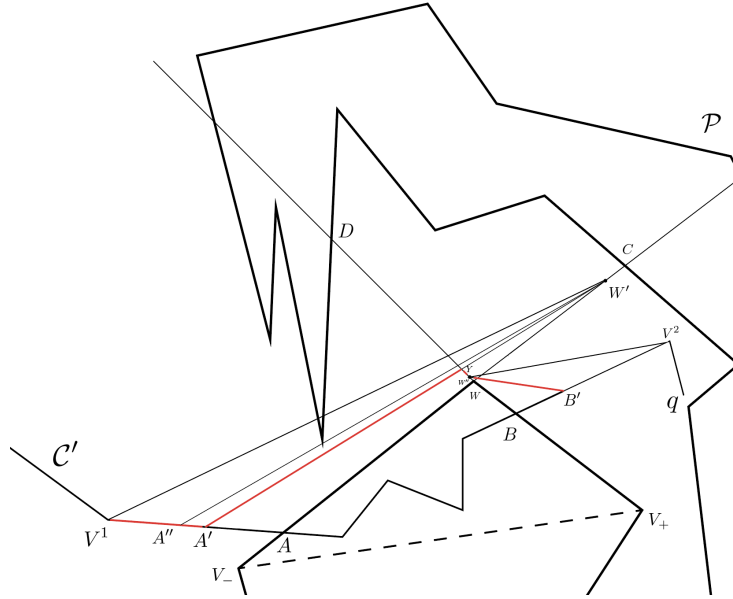


Figura 2.33

Nel primo caso, la poligonale cercata è

$$\mathcal{C} = p \dots V^1 A' W' X B' V^2 \dots q$$

mentre nel secondo caso è

$$\mathcal{C} = p \dots V^1 A' Y W'' B' V^2 \dots q$$

Non sono invece possibili i casi in cui C sta tra W' e X , oppure D sta tra W'' e Y , poiché altrimenti la semiretta $W''C$ precederebbe la semiretta $W''B'$ nell'ordine all'interno del triangolo BV^2W'' o, rispettivamente, la semiretta $W'D$ precederebbe la semiretta $W'A'$ nell'ordine all'interno del triangolo V^1AW' .

Il caso in cui A e B appartengono allo stesso lato del triangolo V_-WV_+ è più semplice da trattare (Fig. 2.34). Infatti, supponiamo che $A, B \in V_-W$; se la semiretta V_-W incontra il poligono \mathcal{P} , indichiamo con C il primo punto d'intersezione e scegliamo un punto W' tra W e C (se invece la semiretta V_-W non incontra il poligono in alcun punto, scegliamo come W' un qualunque punto che segue W lungo la stessa semiretta, orientata da V_- a W).

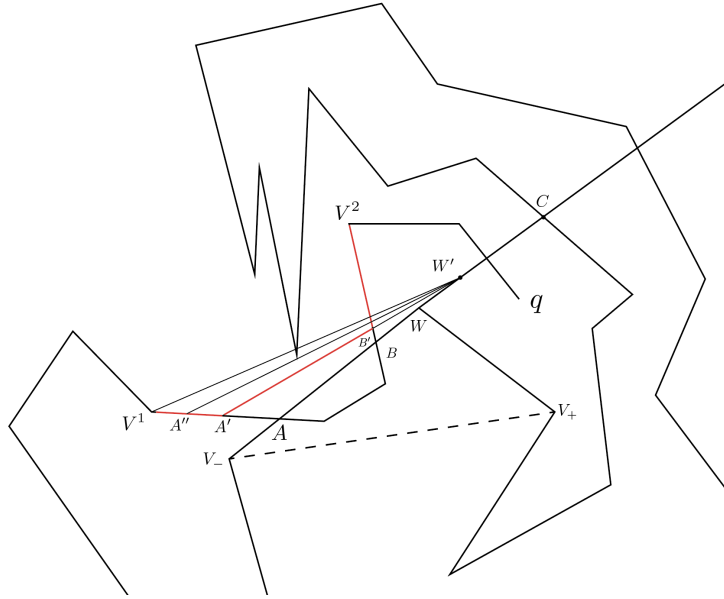


Figura 2.34

Consideriamo il triangolo V^1AW' : se il suo interno contiene vertici di \mathcal{P} , tracciamo tutte le semirette uscenti dal vertice W' e passanti per questi punti. Poiché il lato AW' non incontra il poligono in alcun punto, eccezion fatta per i punti del lato AW , fra queste semirette è possibile individuarne una più vicina al lato AW' . Sia A'' il punto d'intersezione di questa semiretta con il lato V^1A ; se il segmento $A''W'$ incontra il lato BV^2 , allora scegliendo un qualunque A' tra A'' e A , si ha che anche $A'W'$ interseca BV^2 . Sia B' tale punto d'intersezione; allora, la poligonale

$$\mathcal{C} = p \dots V^1A'B'V^2 \dots q$$

congiunge p e q ed è contenuta in $E(\mathcal{P})$. Se invece $A''W'$ non incontra il lato BV^2 , poiché BV^2 è esterno al poligono \mathcal{P} (eccezion fatta per il punto B), allora BV^2 (eccetto il punto B) è tutto contenuto nell'interno del triangolo $A''AW'$. Sia quindi A' il punto d'intersezione tra la semiretta $W'V^2$ e il lato $A''A$; allora, la poligonale

$$\mathcal{C} = p \dots V^1A'V^2 \dots q$$

è tutta contenuta nell'esterno di \mathcal{P} e congiunge i punti p e q , come desiderato.

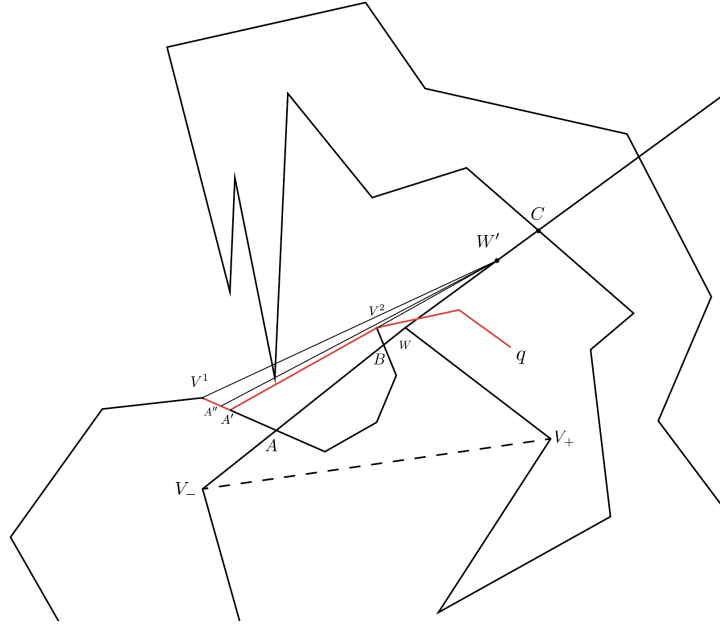


Figura 2.35

Pertanto, $I(\mathcal{P})$ ed $E(\mathcal{P})$ sono le due componenti connesse di $\alpha - \mathcal{P}$ cercate. Inoltre, avendo dimostrato che l'interno di un triangolo non solo non può contenere delle rette, ma addirittura non può contenere semirette, ragionando per induzione possiamo dimostrare che neanche l'interno di \mathcal{P} può contenere delle semirette. Infatti, per definizione $I(\mathcal{P}) = I(\mathcal{T}) \cup I(\mathcal{P}')$; se per assurdo esistesse una semiretta s interamente contenuta in $I(\mathcal{P})$, per il caso $n = 3$ e per ipotesi induttiva, questa non potrebbe essere tutta contenuta in $I(\mathcal{T})$, né in $I(\mathcal{P}')$, dunque s è in parte contenuta in $I(\mathcal{T})$ e in parte contenuta in $I(\mathcal{P}')$. Sia O l'origine della semiretta s :

- Se $O \in I(\mathcal{T})$, allora l'intersezione di s con $I(\mathcal{T}) \cup \mathcal{T}$ è un segmento OO' .

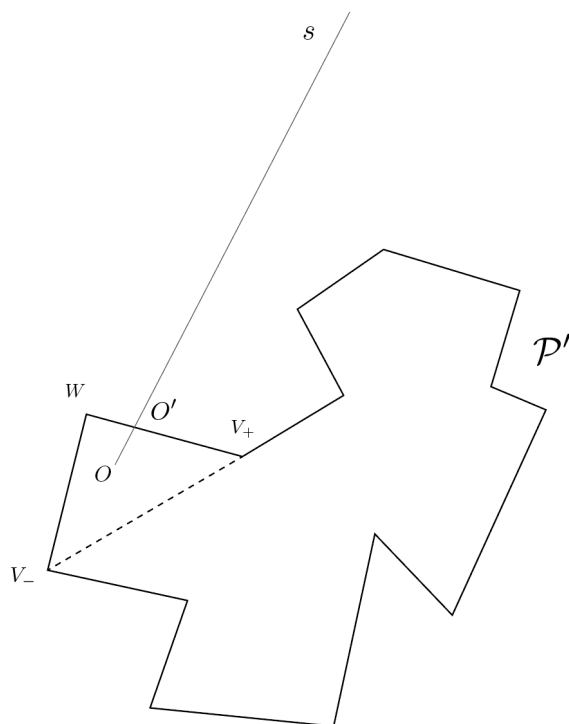


Figura 2.36

La stessa semiretta, a partire da O' , dovendo essere tutta contenuta in $I(\mathcal{P}')$, ma non in $I(\mathcal{T})$, deve essere tutta contenuta in $I(\mathcal{P}')$, ma questo non può accadere perché per ipotesi induttiva $I(\mathcal{P}')$ non può contenere semirette;

- Se $O \in I(\mathcal{P}')$ oppure O' è un punto interno del lato V_-V_+ , non potendo essere la semiretta s tutta contenuta in $I(\mathcal{P}')$, s deve incontrare il lato V_-V_+ in un punto interno A . Per l'assioma di Pasch, la semiretta s interseca il triangolo anche nel vertice W , oppure incontra il lato V_-W o il lato V_+W in un punto interno B .

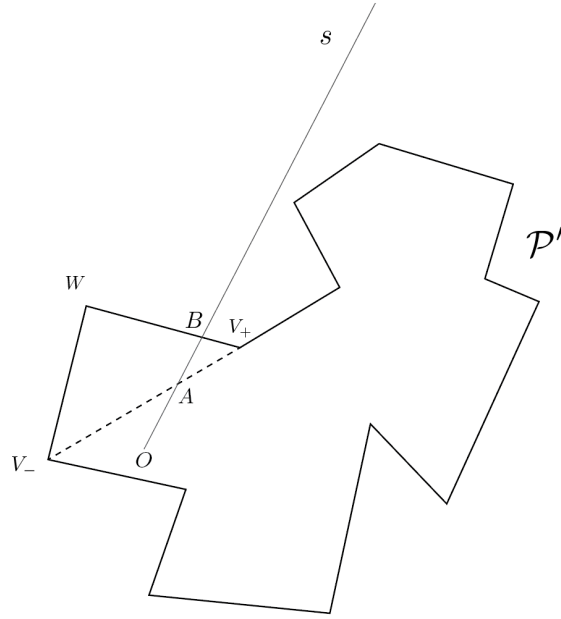


Figura 2.37

Allora, come nel caso precedente, la stessa semiretta, a partire da B , deve essere tutta contenuta in $I(\mathcal{P}')$, ma questo non può accadere.

Pertanto, l'interno di \mathcal{P} non può contenere semirette.

Il ragionamento è simile se \mathcal{T} è una bocca. In tal caso, si pone

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}) &\stackrel{\text{def}}{=} E(\mathcal{T}) \cap I(\mathcal{P}') \\ E(\mathcal{P}) &\stackrel{\text{def}}{=} I(\mathcal{T}) \cup E(\mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Come prima, dimostriamo che $I(\mathcal{P})$ ed $E(\mathcal{P})$, così definiti, sono proprio le componenti connesse di $\alpha - \mathcal{P}$:

1. $I(\mathcal{P})$ ed $E(\mathcal{P})$ sono disgiunti.

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}) \cap E(\mathcal{P}) &= (E(\mathcal{T}) \cap I(\mathcal{P}')) \cap (I(\mathcal{T}) \cup E(\mathcal{P}')) \\ &= (E(\mathcal{T}) \cap I(\mathcal{P}') \cap I(\mathcal{T})) \cup (E(\mathcal{T}) \cap I(\mathcal{P}') \cap E(\mathcal{P}')) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. $I(\mathcal{P}) \cup E(\mathcal{P}) = \alpha - \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
I(\mathcal{P}) \cup E(\mathcal{P}) &= (E(\mathcal{T}) \cap I(\mathcal{P}')) \cup (I(\mathcal{T}) \cup E(\mathcal{P}')) \\
&= ((\alpha - \mathcal{T} - I(\mathcal{T})) \cap (\alpha - \mathcal{P}' - E(\mathcal{P}'))) \cup (I(\mathcal{T}) \cup E(\mathcal{P}')) \\
&= \alpha - (\mathcal{T} \cup I(\mathcal{T}) \cup \mathcal{P}' \cup E(\mathcal{P}')) \cup I(\mathcal{T}) \cup E(\mathcal{P}') \\
&= (\alpha - \mathcal{P}) - (I(\mathcal{T}) \cup E(\mathcal{P}')) \cup (I(\mathcal{T}) \cup E(\mathcal{P}')) \\
&= \alpha - \mathcal{P}
\end{aligned}$$

3. $E(\mathcal{P})$ è connesso per poligonali:

poiché $E(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = (I(\mathcal{T}) \cap \mathcal{P}) \cup (E(\mathcal{P}') \cap \mathcal{P}) = \emptyset$, allora

$$I(\mathcal{T}) \cap \mathcal{P} = E(\mathcal{P}') \cap \mathcal{P} = \emptyset$$

Dunque, se $p, q \in I(\mathcal{T})$, allora esiste una poligonale $\mathcal{C} \subset I(\mathcal{T})$ che connette p e q e tale che $\mathcal{C} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, cioè \mathcal{C} non incontra \mathcal{P} . Similmente, se $p, q \in E(\mathcal{P}')$, esiste una poligonale $\mathcal{C}' \subset E(\mathcal{P}')$ che connette p e q e non incontra \mathcal{P} . Infine, se $p \in I(\mathcal{T})$ e $q \in E(\mathcal{P}')$, scegliamo un punto p' interno al lato V_-V_+ .

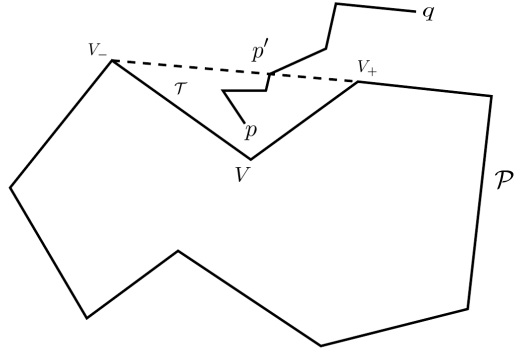


Figura 2.38

Allora, esiste una poligonale $\mathcal{C}' \subset I(\mathcal{T})$ che collega p e p' e tale che $\mathcal{C}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$; esiste inoltre una poligonale $\mathcal{C}'' \subset E(\mathcal{P}')$ che collega p' e q , tale che $\mathcal{C}'' \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Allora, $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ è la poligonale cercata.

4. $I(\mathcal{P})$ è connesso per poligonali:

siano $p, q \in I(\mathcal{P}) = E(\mathcal{T}) \cap I(\mathcal{P}')$. Allora, esiste una poligonale $\mathcal{C}' \subset I(\mathcal{P}')$ che collega p e q .

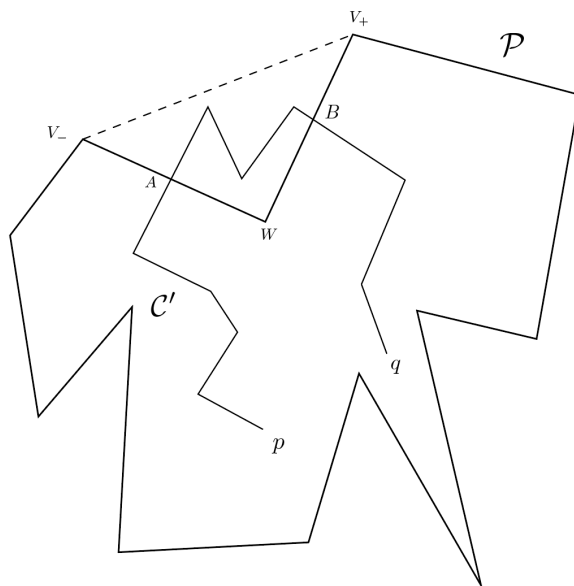


Figura 2.39

\mathcal{C}' è contenuta in $I(\mathcal{P}')$ ma potrebbe incontrare il triangolo \mathcal{T} in qualche punto interno dei lati V_-W e WV_+ . Se non incontra questi lati in alcun punto, allora \mathcal{C}' è la poligonale cercata; altrimenti, con un ragionamento analogo a quello visto nel caso in cui \mathcal{T} è un orecchio per l'esterno di \mathcal{P} , riusciamo a determinare una poligonale $\mathcal{C} \subset I(\mathcal{P})$ che congiunge i punti p e q .

Pertanto, $I(\mathcal{P})$ ed $E(\mathcal{P})$ sono le componenti connesse cercate. Inoltre, siccome $I(\mathcal{P}) = E(\mathcal{T}) \cap I(\mathcal{P}')$ e per ipotesi induttiva non esistono semirette completamente contenute in $I(\mathcal{P}')$, a maggior ragione non possono esistere semirette completamente contenute in $I(\mathcal{P})$.

Infine, per il corollario [2.2.2](#), per ogni poligono semplice \mathcal{P} esiste un angolo w tale che $\mathcal{P} \subset \overline{I(w)} = I(w) \cup w$, dove $I(w)$ indica l'interno dell'angolo w .

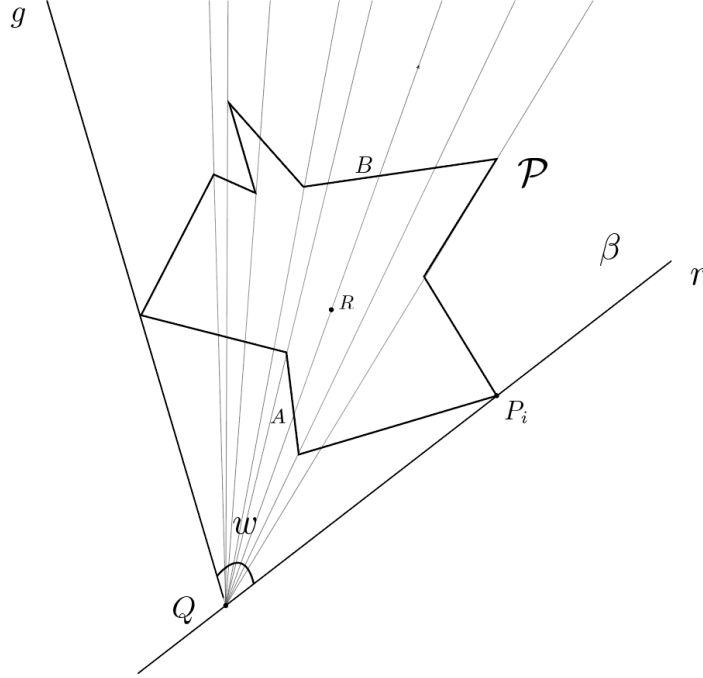


Figura 2.40

Allora,

$$I(\mathcal{P}) \subset I(w)$$

Infatti, con riferimento alla costruzione illustrata in figura [2.7](#), consideriamo un punto R interno al poligono e tracciamo la semiretta uscente da Q e passante per R . Poiché Q è esterno al poligono, tale semiretta incontra \mathcal{P} in un punto A che sta tra Q ed R ; inoltre, siccome $I(\mathcal{P})$ non può contenere semirette, la stessa semiretta a partire da R incontra il poligono almeno in un altro punto B ; dunque, il punto R è un punto interno del segmento AB . Poiché $\mathcal{P} \subset \overline{I(w)}$, allora $A, B \in \overline{I(w)}$, dunque $R \in I(w)$ per il Teorema [1.2.16](#) e, dall'arbitrarietà di R , si ha che $I(\mathcal{P}) \subset I(w)$. Allora, valgono le seguenti inclusioni:

- $\mathcal{P} \subset \overline{I(w)}$
- $I(\mathcal{P}) \subset I(w)$

Conseguentemente,

$$\overline{I(\mathcal{P})} \stackrel{\text{def}}{=} I(\mathcal{P}) \cup \mathcal{P} \subset \overline{I(w)}$$

Ma allora, passando ai complementari,

$$\alpha - \overline{I(w)} \subset \alpha - \overline{I(\mathcal{P})}$$

ovvero

$$E(w) \subset E(\mathcal{P})$$

dove $E(w)$ indica l'esterno dell'angolo w . Poiché l'esterno di un angolo contiene rette (1.2.17), a maggior ragione $E(\mathcal{P})$ contiene rette.

Ciò conclude la dimostrazione del Teorema di Jordan per i poligoni. \square

Appendice A

Assiomi di Hilbert

A.1 Fondamenti della Geometria (prima edizione)

i) Assiomi di incidenza:

- 1) *Due punti distinti A e B determinano univocamente una retta a . Scriviamo $AB = a$, o $BA = a$.*
- 2) *Due qualunque punti distinti di una retta determinano univocamente quella retta, ovvero: se $AB = a$ e $AC = a$, dove $B \neq C$, allora anche $BC = a$.*
- 3) *Tre punti A , B , C non allineati determinano univocamente un piano α . Scriviamo $ABC = \alpha$.*
- 4) *Tre punti non allineati di un piano α determinano univocamente quel piano.*
- 5) *Se due punti A , B di una retta a giacciono su un piano α , allora ogni punto di a appartiene al piano α . In questo caso diciamo che “la retta a giace sul piano α ”.*
- 6) *Se due piani α e β hanno un punto A in comune, allora hanno almeno un altro punto B in comune.*
- 7) *Su ogni retta esistono almeno due punti, su ogni piano esistono almeno tre punti non allineati e nello spazio esistono almeno quattro punti non complanari.*

ii) Assiomi di ordinamento:

- 1) *Se A , B , C sono punti di una retta tali che B sta tra A e C , allora B sta anche tra C e A .*

- 2) Se A e C sono punti di una retta, allora esistono almeno un punto B e almeno un punto D tali che B sta tra A e C e C sta tra A e D .
- 3) Dati tre punti qualunque su una retta, ne esiste uno e uno solo che sta tra gli altri due.
- 4) Quattro punti A, B, C, D su una retta possono sempre essere rinominati in modo tale che B stia tra A e C e tra A e D e C stia tra A e D e tra B e D .
- 5) Siano A, B, C tre punti non allineati e sia a una retta sul piano ABC non passante per alcuno dei punti A, B e C . Allora, se la retta a passa per un punto interno del segmento AB , passerà anche per un punto interno del segmento BC , o del segmento AC .

iii) **Assioma delle parallele:** In un piano α si può tracciare per un punto A non appartenente a una retta a una e una sola retta che non interseca la retta a . Questa retta è detta "la parallela ad a passante per il punto A ".

iv) **Assiomi di congruenza:**

- 1) Se A e B sono due punti su una retta a e A' è un punto sulla stessa o su un'altra retta a' , allora su una delle due semirette determinate da A' esiste uno e un solo punto B' tale che il segmento AB (o BA) è congruente al segmento $A'B'$. Indichiamo questa relazione scrivendo:

$$AB \equiv A'B'.$$

Ogni segmento è congruente a se stesso, cioè vale sempre

$$AB \equiv AB.$$

- 2) Se un segmento AB è congruente contemporaneamente a due segmenti $A'B'$ e $A''B''$, allora il segmento $A'B'$ è congruente al segmento $A''B''$, ovvero: se $AB \equiv A'B'$ e $AB \equiv A''B''$, allora $A'B' \equiv A''B''$.
- 3) Siano AB e BC due segmenti di una retta a che non hanno alcun punto in comune eccetto il punto B , e siano $A'B'$ e $B'C'$ due segmenti sulla stessa o su un'altra retta a' non aventi anch'essi alcun punto in comune eccetto il punto B' . Allora, se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, si ha anche $AC \equiv A'C'$.

- 4) Sia $\sphericalangle(h, k)$ un angolo su un piano α e sia a' una retta che giace su un piano α' . Sia inoltre fissato, nel piano α' , uno dei semipiani determinati dalla retta a' e si denoti con h' una delle semirette sulla retta a' uscenti da un punto O' di tale retta. Allora, nel piano α' esiste una e una sola semiretta k' tale che l'angolo $\sphericalangle(h, k)$, o $\sphericalangle(k, h)$, è congruente all'angolo $\sphericalangle(h', k')$ e, allo stesso tempo, i punti interni dell'angolo $\sphericalangle(h', k')$ giacciono nel semipiano di a' assegnato. Esprimiamo questa relazione scrivendo

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$$

Ogni angolo è congruente a se stesso, ovvero,

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k)$$

o

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h)$$

- 5) Se un angolo $\sphericalangle(h, k)$ è congruente contemporaneamente a due angoli $\sphericalangle(h', k')$ e $\sphericalangle(h'', k'')$, allora l'angolo $\sphericalangle(h', k')$ è congruente all'angolo $\sphericalangle(h'', k'')$; ovvero, se $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ e $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$, allora $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$.
- 6) Dati due triangoli ABC e $A'B'C'$, se

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

allora,

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \text{ e } \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

- v) **Assioma di continuità (Assioma di Archimede):** Sia A_1 un punto su una retta scelto arbitrariamente tra due punti fissati A e B sulla stessa retta. Siano A_2, A_3, A_4, \dots , tali che A_1 sta tra A e A_2 , A_2 tra A_1 e A_3 , A_3 tra A_2 e A_4 , ecc. Inoltre, siano i segmenti

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

tutti congruenti tra loro. Allora, in questa successione di punti, ne esiste almeno uno, A_n , tale che B sta tra A e A_n .

A questi cinque gruppi di assiomi si può infine aggiungere il seguente:

ASSIOMA DI COMPLETEZZA (Vollständigkeit): A un sistema di punti, rette e piani, non è possibile aggiungere altri elementi in modo tale che il sistema così costruito risulti in una nuova geometria che soddisfa tutti gli assiomi dei cinque gruppi esposti sopra. In altre parole, gli elementi della Geometria Euclidea formano un sistema che non è suscettibile di estensione, se consideriamo validi i cinque gruppi di assiomi.

A.2 Fondamenti della Geometria (decima edizione)

i) Assiomi di incidenza:

- 1) *Dati due punti qualunque A, B , esiste una retta a che li contiene.*
- 2) *Dati due punti qualunque A, B , esiste al più una retta che li contiene.*
- 3) *Esistono almeno due punti su una retta. Esistono almeno tre punti non allineati.*
- 4) *Dati tre punti non allineati A, B, C , esiste un piano α che contiene A, B, C . Ogni piano contiene almeno un punto.*
- 5) *Dati tre punti non allineati A, B, C , esiste al più un piano che contiene A, B e C .*
- 6) *Se due punti A, B di una retta a giacciono su un piano α , allora tutti i punti di a giacciono su α .*
- 7) *Se due piani α e β hanno un punto A in comune, allora hanno almeno un altro punto B in comune.*
- 8) *Esistono almeno quattro punti non complanari.*

ii) Assiomi di ordinamento:

- 1) *Se B sta tra A e C , allora A, B, C sono tre punti distinti di una retta e B sta anche tra C ed A .*
- 2) *Dati due punti A e C , esiste almeno un punto B sulla retta AC tale che C sta tra A e B .*
- 3) *Dati tre punti su una retta, ne esiste al più uno che sta tra gli altri due.*
- 4) *Siano A, B, C tre punti non allineati e sia a una retta nel piano ABC che non incontra nessuno dei punti A, B e C . Se la retta a incontra il segmento AB in un punto interno, allora incontra anche il segmento AC , oppure il segmento BC in un punto interno.*

iii) Assiomi di congruenza:

- 1 *Se A e B sono punti appartenenti ad una retta a e A' è un punto sulla stessa o su un'altra retta a' , allora è possibile determinare un*

punto B' su una delle due semirette di a' determinate da A' tale che il segmento AB è congruente, o uguale al segmento $A'B'$ (in simboli: $AB \equiv A'B'$).

- 2 Se un segmento $A'B'$ e un segmento $A''B''$ sono congruenti ad un terzo segmento AB , allora il segmento $A'B'$ è congruente al segmento $A''B''$.
- 3 Siano AB e BC due segmenti su una retta a che hanno solo il punto B in comune e siano, sulla stessa o su un'altra retta a' , $A'B'$ e $B'C'$ due segmenti che non hanno punti in comune al di fuori di B' . Allora, se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, allora $AC \equiv A'C'$.
- 4 Sia $\sphericalangle(h, k)$ un angolo su un piano α e a' una retta su un piano α' . Sia inoltre fissato uno dei due semipiani di a' e sia h' una semiretta della retta a' uscente da un punto O' . Allora esiste nel piano α' una ed una sola semiretta k' tale che l'angolo $\sphericalangle(h, k)$ è congruente, o uguale all'angolo $\sphericalangle(h', k')$ e, al tempo stesso, tutti i punti interni dell'angolo $\sphericalangle(h', k')$ appartengono al semipiano di a' fissato.
- 5 Dati due triangoli ABC e $A'B'C'$, se $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, allora $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$.

Osserviamo che gli assiomi 1-3 riguardano la congruenza di segmenti, mentre gli assiomi 4 e 5 concernono la congruenza di angoli, perciò chiameremo i primi assiomi *lineari* di congruenza, mentre chiameremo i secondi assiomi *piani* di congruenza.

iv) **Assioma delle parallele:** Sia a una retta e sia A un punto non appartenente a essa. Allora esiste al più una retta nel piano determinato da a e A , passante per il punto A e parallela alla retta a .

v) **Assiomi di continuità:**

- 1 (Assioma di Archimede). Siano AB e CD due segmenti. Allora, esiste un numero intero $n > 0$ tale che n segmenti CD costruiti contigualmente a partire dal punto A , lungo la semiretta uscente da A verso B , superano il punto B .
- 2 (Assioma di completezza lineare). Non è possibile un'estensione dell'insieme dei punti su una retta che preservi le relazioni esistenti fra gli elementi originali, nonché le proprietà fondamentali dell'ordine e della congruenza lineari, che seguono dagli assiomi dei gruppi (i) e (iii) e dall'Assioma di Archimede.

Bibliografia

- [1] Maureen T. Carroll and Elyn Rykken, *Geometry: The line and the circle*, American Mathematical Society, United States of America, 2018.
- [2] Jeff Erickson, *Simple Polygons*, Course notes for cs 598: Computational topology, University of Illinois at Urbana-Champaign, January 2013, Last modified January 27, 2013.
- [3] G. Feigl, *Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie.*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **33** (1924), 2–24 (German).
- [4] Heinrich Guggenheimer, *The Jordan curve theorem and an unpublished manuscript by Max Dehn*, Archive for History of Exact Sciences **17** (1977), no. 3, 193–200.
- [5] David Hilbert, *The Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1902.
- [6] ———, *Foundations of Geometry*, second english edition, from the tenth german edition ed., The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971.
- [7] G. H. Meisters, *Polygons have ears*, The American Mathematical Monthly **82** (1975), no. 6, 648–651.
- [8] Eliakim Hastings Moore, *On the projective axioms of geometry*, Trans. Am. Math. Soc. **3** (1902), no. 1, 142–158.
- [9] Arthur Schönflies, *Über einen satz aus der Analysis situs*, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1896), 79–89.
- [10] Oswald Veblen, *A system of axioms for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society **5** (1904), no. 3, 343–384.

Ringraziamenti

Questo elaborato rappresenta la fine del mio percorso di laurea triennale a Camerino. Se ho raggiunto questo piccolo traguardo e se ho intenzione di continuare a studiare Matematica è soprattutto grazie a coloro che in questi anni mi sono stati vicini e mi hanno sostenuto nel percorso di studi.

Ringrazio prima di tutti il mio relatore, il professor Piergallini, per il Suo prezioso aiuto nella realizzazione di questa tesi, per la Sua pazienza e per la Sua disponibilità nell'attività di tirocinio, ma soprattutto per avermi trasmesso, in questi anni, l'interesse e la passione per i contenuti trattati nelle Sue lezioni.

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia, in particolare a mia madre e mia sorella: non smetterò mai di ringraziare mia mamma per essere sempre presente nella mia vita e per aver sempre sostenuto i miei interessi e le mie decisioni; ringrazio mia sorella per i pomeriggi a casa passati insieme a studiare e per aver sempre creduto in me quando io stesso ero il primo a non crederci. A proposito di famiglia, vorrei ringraziare anche i miei amici cani: Bambù, Karibe, Akela e Aslan, per avermi fatto sempre compagnia e aver allietato le giornate di studio con i loro sorrisi e il loro affetto.

Un grazie va poi ai miei compagni di corso, vicini e lontani, con i quali in questi anni ho scambiato opinioni che spesso mi hanno aiutato nella risoluzione di problemi, o semplicemente sono state motivo di riflessione e spero, anche io, di aver dato il mio contributo in questo senso.

Infine, ringrazio me stesso perché nonostante il mio atteggiamento pessimistico e un po' malinconico nei confronti della vita, non mi sono fatto spaventare dalle difficoltà e non ho mai perso di vista i miei obiettivi. Ho ancora un oceano di Matematica da imparare e non vedo l'ora di farlo, pur sapendo che questo percorso non è privo di difficoltà e ostacoli.

Grazie, grazie, grazie!