

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

*Corso di Laurea in Matematica e Applicazioni*

*Classe L-35*



## Il teorema di White

Tesi di Laurea in Geometria - MAT/03

**Relatore:**

Prof. Riccardo Piergallini

**Laureanda:**

Ilaria Giancamilli

---

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria dei nodi</b>	<b>5</b>
Cenni storici . . . . .	5
1.1 Definizioni principali . . . . .	7
1.1.1 Equivalenze tra nodi . . . . .	8
1.1.2 Rappresentazione tramite diagrammi . . . . .	10
1.2 Invarianti di nodi . . . . .	12
1.2.1 Il numero medio di incroci e il numero di arricciamento . . .	13
1.2.2 Numero di allacciamento . . . . .	15
1.2.3 Commenti . . . . .	17
<b>2 Risultati preliminari</b>	<b>18</b>
2.1 Richiami sugli integrali curvilinei e di superficie . . . . .	18
2.2 Formula di Gauss per il numero di allacciamento . . . . .	19
2.3 Espressione integrale del numero di arricciamento . . . . .	21
2.4 I nastri . . . . .	22
2.5 Il numero di avvitamento . . . . .	24
<b>3 Il teorema di White</b>	<b>27</b>
3.1 Commenti . . . . .	27
3.2 Dimostrazione . . . . .	29
<b>4 Il DNA</b>	<b>35</b>
4.1 Introduzione . . . . .	35

4.2 Il problema . . . . .	37
<b>Bibliografia</b>	<b>41</b>

# Introduzione

In questo lavoro forniremo un'esposizione completa e dettagliata di uno dei risultati più importanti della teoria geometrica dei nodi: il teorema di White. Quest'ultimo afferma che, dato un nastro senza auto-intersezioni i cui bordi sono rappresentati da due nodi, il numero di allacciamento (o link number), un invariante topologico intero associato al nastro, risulta essere la somma di due invarianti geometrici reali (generalmente non interi): il numero di avvitamento (o twist number) e il numero di arricciamento (o writhe number).

Per comprendere fino in fondo il significato di questo teorema, è necessario fornire al lettore gli elementi necessari per maneggiare gli strumenti matematici che servono per la dimostrazione.

In matematica, si definisce nodo una qualunque curva chiusa semplice, pensata come sottospazio topologico di  $\mathbb{R}^3$ , per cui esista una funzione continua, biettiva e con inversa continua che porti la curva in una circonferenza e viceversa. L'unione disgiunta di  $n$  nodi viene definita link o  $n$ -nodo. Nel presente trattato, parleremo quasi sempre di nodi docili, ovvero nodi intesi come curve differenziabili. Possiamo quindi, data una curva chiusa  $A$ , introdurre una sua parametrizzazione  $a : I \in \mathbb{R} \rightarrow A$ .

Un buon metodo per rappresentazione dei nodi è sicuramente l'utilizzo dei diagrammi; scelta una direzione nello spazio, si considera, su un piano perpendicolare ad essa, la proiezione ortogonale del nodo, la curva proiezione è detta diagramma, a condizione che presenti, come uniche singolarità, un numero finito di punti trasversali, in ciascuno dei quali è indicato quale arco passi sopra e quale sotto. Come vedremo nel corso della trattazione, per un nodo sufficientemente regolare, tale condizione è soddisfatta per tutte le direzioni eccetto un insieme di misura

nulla nella sfera. Quindi, per ogni nodo, esistono infiniti diagrammi. Come fare allora per capire se due diagrammi distinti rappresentano lo stesso nodo? Una risposta a questo problema venne fornita da Reidemeister che definì tre operazioni (comunemente chiamate mmovimenti di Reidemeister) che permettono di collegare, con un numero finito di passi, due diagrammi qualunque dello stesso nodo. Sfortunatamente, dati due diagrammi distinti, non è possibile conoscere a priori il numero di mosse e la sequenza con la quale debbano essere applicate su uno di loro per ottenere l'altro.

Verranno poi introdotti alcuni invarianti topologici, ossia numeri associabili a una particolare caratteristica del nodo, che non variano se si applica alla curva deformazione continua (isotopia), come ad esempio il numero di componenti e il numero minimo di incroci.

Un altro invariante topologico importante ai fini del nostro lavoro è il numero di allacciamento (o linking number), che è definito solo se abbiamo a che fare con un nodo a due componenti. A partire da un diagramma qualunque di un 2-nodo, il numero di allacciamento è definito come la semisomma degli incroci tra componenti diverse, ciascuno con un segno opportuno.

Introdurremo, inoltre, degli invarianti geometrici, cioè numeri che non cambiano se al nodo si applica una trasformazione isometrica positiva (traslazione, rotazione). Tra essi daremo maggior risalto al numero di arricciamento, ossia al writhe del quale forniremo, in una prima fase, una definizione in termini di media sferica; esso viene infatti definito come la media fatta rispetto a tutte le direzioni della sfera della somma degli incroci con segno calcolati su ogni singolo diagramma. Nel secondo capitolo ridefiniremo il numero di arricciamento e il numero di allacciamento in termini di integrali, sfruttando, al posto delle direzioni sferiche, corde normalizzate che collegano due punti della curva nel caso del writhe o due punti su curve distinte nel caso del linking number. Al fine di enunciare il teorema di White, consideriamo poi i nastri, cioè superfici chiuse i cui bordi sono dati da due nodi "paralleli"  $A$  e  $B$  che ammettono parametrizzazioni correlate all'equazione  $b(s) = a(s) + \varepsilon \mathbf{u}(s)$ , dove  $\mathbf{u}(s)$  rappresenta un versore normale ad  $A$  in  $a(s)$  e  $\varepsilon > 0$  è sufficientemente piccolo.

L'ultimo elemento necessario per poter enunciare il teorema di White è il numero di avvitamento (o twist) su un nastro, che corrisponde intuitivamente al numero

(non necessariamente intero) di giri che il vettore  $\mathbf{u}(s)$  compie al variare di  $a(s)$  lungo il nodo  $A$ . Come si può intuire, il numero di avvitamento è un invariante geometrico.

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per poter enunciare il nostro teorema: l'invariante topologico *numero di allacciamento* (o *linking number*) di un nastro può essere esprimibile tramite la formula seguente:

$$Lk(R) = Tw(R) + Wr(R)$$

detta *formula di White*.

La dimostrazione del teorema, riportata nel terzo capitolo, si sviluppa secondo il seguente schema. Come prima cosa, si osserva che la corda normalizzata da  $a(s)$  ad  $a(s')$ , utilizzata per calcolare il numero di allacciamento, fissato il parametro  $s$ , al variare di  $s'$  descrive sulla sfera una curva aperta  $\mathbf{C}_s$ ; facendo poi variare anche  $s$  si genera una superficie topologicamente equivalente a un anello, i cui bordi sono dati dalle curve individuate, al variare di  $s$  dalle direzioni tangenti alla curva  $\pm \mathbf{t}(s)$ , dette curve indicatrici. Analogamente, nel calcolo del numero di avvitamento, si considera una superficie topologicamente equivalente a un anello i cui bordi sono dati dalle curve indicatrici; l'unica differenza si riscontra nella curva che si genera sulla sfera fissando  $s$ , al variare di un parametro angolare  $\theta \in [0, \pi]$ , che rappresenta l'inclinazione del vettore direzionale  $\mathbf{w}(s)$  rispetto a  $\mathbf{t}(s)$ ; in questo caso abbiamo a che fare con una semicirconferenza  $\mathbf{S}_s$ .

D'altra parte la corda normalizzata da  $a(s)$  a  $b(s')$ , utilizzata per calcolare il numero di allacciamento, fissato  $s$ , descrive sulla sfera una linea chiusa  $\mathcal{D}_s$ , che, al variare di  $s$ , genera una superficie topologicamente equivalente a un toro. L'idea che sta alla base di questo approccio consiste nel dimostrare che, facendo tendere lo spessore del nastro a 0, la curva  $\mathcal{D}_s$  tende alla curva  $\mathcal{L}_s$ , data dall'unione di  $\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{S}_s$ .

In termini di integrali questo consiste nel dimostrare che al limite, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la formula integrale del numero di allacciamento

$$Lk(R) = \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB}$$

corrisponde alla somma delle espressioni integrali del numero di arricciamento e avvolgimento. Proprio in questo punto risiedono i passaggi più delicati di tutta la dimostrazione.

Nel quarto e ultimo capitolo viene spiegato il funzionamento degli enzimi Topoisomerasi I e Topoisomerasi II che operano sul DNA per evitare fenomeni di superavvitamento dovuti alla formazione di arricciamenti a seguito dello svolgimento dei filamenti di DNA nei fenomeni di trascrizione e riproduzione. Una giustificazione alla formazione di questi arricciamenti viene appunto fornita dal teorema di White. Infatti, nelle operazioni sopra descritte, il numero di avvitamento della doppia elica di DNA viene modificato, quindi la formazione di arricciamenti è necessaria per mantenere il numero di allacciamento costante.

# Capitolo 1

## Teoria dei nodi

### Cenni storici

La teoria dei nodi è una branca della geometria, e in particolare della topologia, che ha come scopo principale quello di studiare le proprietà di cui gode una curva chiusa nello spazio euclideo a seconda della sua conformazione, cioè di come sia *annodata*, e l'equivalenza di tali curve, a meno di deformazioni continue. Questo settore della matematica è stato definitivamente formalizzato all'inizio del XX secolo, tuttavia i primi ad approcciarsi a questa disciplina, pur in modo non del tutto consapevole, furono A. T. Vandermonde e C. F. Gauss intorno alla seconda metà del XVIII secolo. Si deve però a Lord Kelvin, intorno al 1867, un'applicazione più rigorosa dello studio dei nodi al mondo della fisica con la proposta del così detto *atomo vortice*, ovvero un modello in cui si ipotizzava l'atomo costituito da etere che si muoveva vorticosamente lungo linee chiuse, più o meno intrecciate. Proprio questa teoria, che in seguito si rivelò fisicamente non corretta, fornì un punto di partenza per la ricerca sui nodi. Si percepì fin dall'inizio l'esigenza di classificare i nodi attraverso una loro rappresentazione nel piano; proprio per questo venne introdotta la rappresentazione tramite diagramma (scelta una direzione e un piano a essa associato, su tale piano viene tracciata la proiezione ortogonale del nodo). Come scopriremo nel corso di questo scritto, però, per ogni nodo non esiste un



---

unico diagramma; per questo, verso la fine dell'Ottocento, erano due le domande principali a cui si sentiva il bisogno di rispondere: come classificare i nodi e quando due diagrammi distinti rappresentassero lo stesso nodo.

Il primo a porsi la prima questione posta fu il reverendo T. Kirkman negli anni Ottanta dell'Ottocento. Le sue idee furono poi adottate e sviluppate dallo scozzese P. G. Tait, che classificò tutti i nodi alternanti (ovvero nodi in cui lungo curva del diagramma si alternano sopra-passaggi a sotto-passaggi) fino a quelli con 10 incroci. Fu poi C. Little che si occupò della classificazione dei nodi non alternanti pubblicando una tabella di 43 nodi nel 1899 (nel 1947 però si scoprì che in tale tabulazione vi erano due nodi equivalenti). Nel 1917 M. Haseman pubblicò nella sua tesi di dottorato una lista di tutti i nodi achirali (ciò equivalenti alla propria riflessione) con 12 incroci. Un approccio più formale alla questione, fu adottato dai matematici J. W. Alexander e G. B. Briggs. Questi intorno al 1927 studiarono il problema della classificazione dei nodi sfruttando l'introduzione di invarianti (numeri o polinomi che non variano con l'applicazione di trasformazioni geometriche o/e topologiche) e in particolare utilizzando il polinomio di Alexander per provare che i nodi fino a 9 incroci, precedentemente tabulati, fossero effettivamente distinti.

In quegli stessi anni, K. Reidemeister fornì invece un teorema che aveva lo scopo di rispondere alla seconda domanda posta in precedenza: determinare se due diagrammi distinti rappresentassero lo stesso nodo. Egli introdusse tre operazioni, chiamate movimenti, che, applicate a un diagramma, ne creano uno diverso ma equivalente. Dimostrò inoltre che tali operazioni sono sufficienti a rappresentare ogni possibile deformazione di un nodo. Questo risultato si dimostrò concettualmente valido, e fornì un ulteriore supporto alla classificazione dei nodi, ma sfortunatamente non garantiva, come vedremo in seguito, un algoritmo vero e proprio per determinare un'effettiva equivalenza tra nodi.

Dagli anni Settanta del Novecento in poi furono introdotte nuove notazioni per identificare classi di nodi, come quella di J. H. Conway (1969), di H. Dowker (1978) alla quale si ispirò M. Thistlethwaite per creare un algoritmo che generasse nodi. Il problema della tabulazione è ancora attuale: molti matematici infatti sono alla ricerca di nuovi nodi da poter classificare.

## 1.1 Definizioni principali

**Definizione 1.1.** Chiamiamo *nodo*  $K$  una qualunque curva chiusa semplice nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , cioè un qualunque sottospazio topologico di  $\mathbb{R}^3$ , topologicamente equivalente a una circonferenza. L'unione disgiunta di  $n$  nodi viene detta *nodo con  $n$  componenti* ( *$n$ -nodo*) o *link*.

La circonferenza, quindi, è anch'essa un nodo e viene definita *nodo banale*.

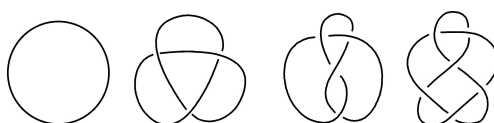


Figura 1.1: Alcuni esempi di nodi

Ricordiamo che due spazi topologici si dicono *topologicamente equivalente* se esiste un omeomorfismo, cioè una funzione biunivoca, continua e con inversa continua, che manda l'uno nell'altro.

Per poter confrontare tra loro nodi differenti, e quindi introdurre l'equivalenza tra nodi, occorre prima definire qualche nozione ausiliaria:

**Definizione 1.2.** Due applicazioni continue  $f, g : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici sono *omotope* se esiste una famiglia di applicazioni continue  $h_t : X \rightarrow Y$  che dipendono in modo continuo dal parametro  $t \in [0, 1]$ , tale che  $h_0 = f$  e  $h_1 = g$ . Si richiede quindi che sia continua l'applicazione  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  definita  $H(x, t) = h_t(x)$  per ogni  $(x, t) \in X \times [0, 1]$ .  $H$  è detta *omotopia* tra  $f$  e  $g$ .

**Definizione 1.3.** Due trasformazioni topologiche  $f$  e  $g : S \rightarrow S$  di uno spazio topologico  $S$  sono *isotope* se esiste un'omotopia  $H$  tra  $f$  e  $g$  tale che  $h_t : S \rightarrow S$  è una trasformazione topologica per ogni  $t \in [0, 1]$ .

### 1.1.1 Equivalenze tra nodi

Pensando ai nodi, non come spazi topologici astratti, ma come sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  si possono dare due definizioni di equivalenza:

**Definizione 1.4.** Due nodi  $K_1$  e  $K_2$  sono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo di  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che porta il primo nodo nell'altro.

**Definizione 1.5.** Due nodi  $K_1$  e  $K_2$  sono *isotopicamente equivalenti* se esiste un omeomorfismo di  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  isotopo all'identità che porta il primo nodo nell'altro e si scrive  $K_1 \equiv K_2$ .

La principale differenza tra la definizione 1.4 e la 1.5 risiede nel fatto che l'equivalenza per isotopia conserva l'orientazione dello spazio. Questo ci permette di compiere un'ulteriore distinzione tra nodi. Ad esempio, attenendoci alla prima definizione di equivalenza, un nodo a trifoglio destrorso sarebbe equivalente ad uno sinistrorso, ma ciò non si verifica se consideriamo un'equivalenza per isotopia.

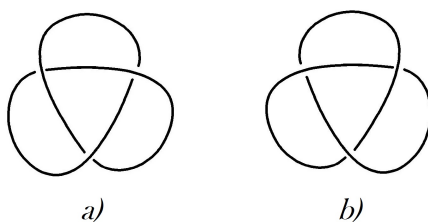


Figura 1.2: a) mostra un nodo a trifoglio destrorso, mentre b) uno sinistrorso

Nodi che sono equivalenti alla loro riflessione vengono definiti *achirali*:

**Definizione 1.6.** Un nodo  $K$  si dice *achirale* (o *simmetrico*) se  $K \equiv \sigma(K)$  dove  $\sigma$  è una riflessione.

La seconda definizione, che adotteremo nel seguito della trattazione, risulta quindi più stringente della precedente, ma permette di poter giustificare meglio le affer-

mazioni che seguiranno.

Da qui in avanti, inoltre, tratteremo solo di nodi docili, nel senso della seguente definizione.

**Definizione 1.7.** Si definisce *nodo docile* un nodo che risulta isotopicamente equivalente ad una poligonale chiusa o a una curva chiusa semplice liscia (cioè differenziabile).

Le due condizioni di equivalenza a una curva poligonale o a una curva liscia sono tra loro equivalenti. Infatti una curva liscia è equivalente a qualunque poligonale iscritta i cui spigoli siano sufficientemente corti. Viceversa, considerando una poligonale chiusa, in prossimità di ciascun vertice si possono raccordare gli spigoli con una curva liscia con estremi prossimi al vertice; in questo modo si può ottenere una curva differenziabile ovunque e quindi liscia isotopicamente equivalente alla poligonale di partenza. (Per una dimostrazione più dettagliata consultare [7]).

Da qui in avanti considereremo solo nodi docili intesi come curve differenziabili. Tali curve possono essere parametrizzate nel modo seguente: data la curva  $A$ ; ad essa possiamo associare una parametrizzazione  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Poiché  $A$  è liscia e chiusa, possiamo assumere che  $a$  sia differenziabile e periodica di periodo  $p$  che, nel caso di una parametrizzazione a velocità unitaria, corrisponde proprio alla lunghezza della curva. Ciò permette di dire che, fissato su  $\mathbb{R}$  un intervallo  $I$  di lunghezza  $p$ ,  $a(\mathbb{R}) = a(I) = A$ .

**Definizione 1.8.** Un nodo si dice *orientato* se è fissato su di esso un verso di percorrenza, definito *orientazione*.

Nel caso di nodi orientati, tutte le parametrizzazioni saranno assunte rispettare l'orientazione fissata.

## 1.1.2 Rappresentazione tramite diagrammi

**Definizione 1.9.** Dato un nodo  $K$  inteso come curva chiusa semplice differenziabile, scegliamo una direzione  $\mathbf{v}$  nello spazio e un piano perpendicolare ad essa sul quale tracciamo una proiezione ortogonale del nodo. Se la proiezione soddisfa le seguenti caratteristiche:

1. è regolare, cioè ammette una parametrizzazione differenziabile regolare, anche se non iniettiva;
2. non più di due punti possono avere la stessa proiezione nel piano, ovvero non possono esserci punti per i quali passano più di due linee;
3. le proiezioni dei due archi in ciascun punto doppio non devono essere tangenti

allora tale proiezione viene definita *diagramma* del nodo e si indica con  $D_{\mathbf{v}}$ .

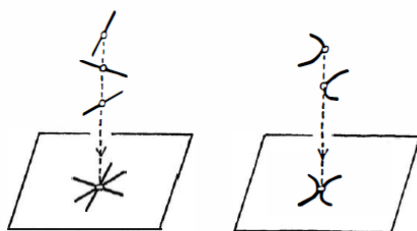


Figura 1.3: Situazioni che non sono accettabili nella rappresentazione tramite diagramma di un nodo

Osserviamo che i punti doppi di un diagramma sono sempre un numero finito.

Possiamo intuire che non tutte le direzioni sulla sfera garantiscono, proiettando ortogonalmente sul piano ad esse associato, un diagramma del nodo accettabile. Comunque, l'insieme delle direzioni per le quali la proiezione non dà un diagramma ha misura nulla. Sfortunatamente dimostrare questo risultato per nodi differenziabili non risulta affatto semplice.

*Osservazione 1.* La questione diventa più agevole se consideriamo nodi poligonali. Le direzioni da escludere, in questo caso, sono quelle degli spigoli (numero finito),

le direzioni che collegano tra loro due vertici non consecutivi (sempre un numero finito) e quelle che intercettano tre punti della poligonale (in questo caso sono infinite direzioni, ma parametrizzabili con i punti dello spigolo intercettato dalla congiungete. Di conseguenza l'insieme delle direzioni da evitare ha dimensione 1 e quindi misura nulla).

In un diagramma, inoltre, essendo su un piano, non possiamo stabilire quale arco di curva passa sopra all'altro in un incrocio. Quindi si rappresentano gli incroci in modo che il tratto di nodo che passa sotto all'altro venga interrotto in prossimità di questi punti.



Figura 1.4: Schematizzazione di una proiezione e un nodo a trifoglio e il rispettivo diagramma

Sorge ora spontaneo chiedersi quando due diagrammi distinti rappresentano lo stesso nodo. Per rispondere a questa domanda, affrontata da Reidemeister agli inizi del Novecento, occorre enunciare il seguente teorema:

**Teorema 1.1.1.** (REIDEMEISTER) *Due diagrammi in  $\mathbb{R}^2$  rappresentano nodi isotopicamente equivalenti in  $\mathbb{R}^3$  se e solo se sono collegati da isotopie piane e dai movimenti I, II e III riportati in Figura 1.5.*

Per la dimostrazione si veda [6].

Notiamo però che questo teorema non fornisce un algoritmo che permetta di stabilire l'equivalenza tra due nodi, in quanto non possiamo conoscere a priori nè numero di mosse necessarie per portare un nodo nell'altro, né la sequenza con la quale queste mosse debbano essere eseguite.

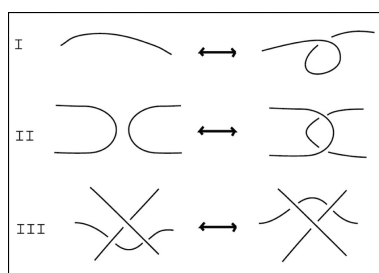


Figura 1.5

## 1.2 Invarianti di nodi

Chiamiamo *invarianti topologici* di nodi gli oggetti algebrici, come per esempio numeri o polinomi, associabili a nodi con una o più componenti, che non variano quando si applica una deformazione isotopica. Tali invarianti forniscono informazioni importanti sul nodo al punto da permetterci di impostare una classificazione e stabilire se due nodi sono equivalenti a partire dai loro diagrammi.

Parliamo invece di *invarianti geometrici* nel caso di oggetti algebrici che non variano se viene applicata al nodo una trasformazione isometrica positiva (traslazione, rotazione).

### Numero di componenti

Il più semplice invariante di nodi è il *numero di componenti*.

**Definizione 1.10.** Dato un link  $L$  si definisce  $\mu(L)$  il *numero di componenti* di  $L$ .

Esso non fornisce molte informazioni sulla curva, ma permette di distinguere un nodo da un link a più di componenti.

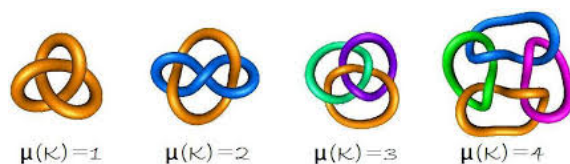


Figura 1.6: Diversi nodi con i rispettivi numeri di componenti

## Il numero minimo di incroci

Quest'invariante, oltre al polinomio citato nel paragrafo 1, si trova alla base della principale tabulazione dei nodi dovuta a Alexander e a Briggs:

**Definizione 1.11.** Dato un link  $L$  si definisce *crossing number* (o numero minimo di incroci) di  $L$ , e si indica con  $c(L)$  il numero minimo di incroci che compaiono in un diagramma di un qualche nodo isotopicamente equivalente a  $L$ .

Ovviamente essendo il minimo esteso a diagrammi di nodi equivalenti a  $L$ ,  $c(L)$  è un invariante topologico.

Tra tutti in nodi, l'unico ad avere  $c(K) = 0$  è il nodo banale, ovvero la circonferenza, tutti gli altri assumono valori di  $c$  maggiori o uguali a 3 (in particolare il nodo trifoglio è l'unico che assume valore 3).

### 1.2.1 Il numero medio di incroci e il numero di arricciamento

Dato un nodo, possiamo definire due oggetti riferiti al suo diagramma  $D_{\mathbf{v}}$  nella direzione  $\mathbf{v}$ : il *numero di incroci del diagramma* e il *writhe del diagramma*:

**Definizione 1.12.** Dato il diagramma  $D_{\mathbf{o}}$  di un nodo  $K$  indichiamo con  $m(D_{\mathbf{v}})$  il numero di incroci presenti nel diagramma.

**Definizione 1.13.** Dato un nodo orientato  $K$ , in numero di incroci con segno (attribuito come illustrato nella figura 1.7), presenti nel diagramma  $D_{\mathbf{v}}$  viene indicato con  $wr(D_{\mathbf{v}})$  e chiamato *writhe del diagramma*.



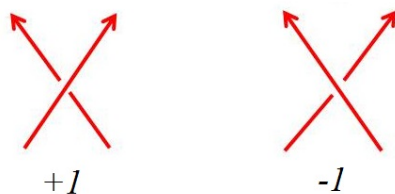


Figura 1.7: Schematizzazione del criterio per l'assegnazione del segno agli incroci di un nodo ad una componente

Questi due numeri non sono invarianti del nodo, perchè dipendenti dal diagramma del nodo associato a una specifica direzione  $\mathbf{v}$ . Infatti se si applica al diagramma  $D_{\mathbf{v}}$  il I o il II movimento di Reidemeister, il  $m(D_{\mathbf{v}})$  viene modificato poiché o si formano o vengono eliminati degli incroci. Per quanto riguarda  $wr(D_{\mathbf{v}})$ , pur conservandosi con l'applicazione del II movimento, viene modificato dal movimento I.

Sono però invarianti geometrici le medie sferiche di tali oggetti, che definiamo rispettivamente come *numero medio di incroci* e *numero di arricciamento*. Questa quantità simili tra loro, a meno di considerare gli incroci con il segno, per questo motivo il ragionamento che ora adotteremo per il numero di arricciamento può tranquillamente essere applicato anche al numero medio di incroci.

Integrando i numeri di arricciamento  $wr(D_{\mathbf{v}})$  al variare della direzione  $\mathbf{v}$  sulla sfera unitaria e dividendo per  $4\pi$  (area della superficie sferica), si ottiene il *numero di arricciamento* (o *writhe*) del nodo  $K$ , che viene indicato con  $Wr(K)$ .

Più precisamente, consideriamo la funzione  $E(D_{\mathbf{v}}) : S^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  che, ad ogni direzione  $\mathbf{v}$ , associa il numero di incroci con segno del diagramma  $D_{\mathbf{v}}$ . Per individuare ora le direzioni di proiezione occorre creare un sistema di corde. Supponiamo di parametrizzare la nostra curva chiusa differenziabile  $A$  con un parametro  $s$ ; quindi ogni punto della curva verrà individuato come  $a(s)$ . Definiamo quindi la corda (normalizzata) tra i punti  $a(s)$  e  $a(s')$  come:

$$\mathbf{c}_A(s, s') = \frac{a(s) - a(s')}{|a(s) - a(s')|} \quad (1.1)$$

Quest'ultima è una funzione così definita:  $\mathbf{c}_A : H \rightarrow S^2$  dove  $H = \{(s, s') | s' \in$

$I_s, s \in I\}$  con  $I_s = [s, s+p]$ . Possiamo estendere in modo continuo questa funzione osservando che al tendere di  $s'$  a  $s$ , la funzione  $\mathbf{c}_A$  tende alla tangente  $\mathbf{t}(s)$ , mentre al tendere di  $s'$  a  $s+p$ ,  $\mathbf{c}_A$  tende a  $-\mathbf{t}(s)$ .

In effetti tale funzione risulta definita quasi ovunque sulla sfera, cioè al di fuori dell'insieme di misura nulla delle direzioni che non danno luogo a un diagramma. Inoltre, dove definita essa risulta localmente costante.

Possiamo dare la seguente definizione:

**Definizione 1.14.** Dato un nodo orientato  $K$ , chiamiamo *numero di arricciamento* (o *writhe*) del nodo  $K$  l'invariante geometrico rappresentato dal numero reale

$$Wr(K) = \int_{S^2} E(D_{\mathbf{v}}) dS$$

dove

$$\int_{S^2} E(D_{\mathbf{v}}) dS \tag{1.2}$$

dove  $dS$  è l'elemento di area sferica.

*Osservazione 2.* Supponiamo di prendere un nodo orientato e deformato fino a renderlo molto prossimo al piano per l'origine ortogonale alla direzione  $\mathbf{v}$ , come se considerassimo il rispettivo diagramma  $D_{\mathbf{v}}$  e alzassimo di un  $\varepsilon$  tutti gli incroci. In questo caso i numeri di arricciamento di tutti i diagrammi, eccetto quelli in direzioni quasi parallele al piano, coincidono, e perciò  $Wr(K)$  risulta prossimo a  $wr(D_{\mathbf{v}})$ . Quindi il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  di  $Wr(K)$  coincide proprio con  $wr(D_{\mathbf{v}})$ .

## 1.2.2 Numero di allacciamento

Quest'invariante topologico è stato introdotto da Gauss intorno al 1833 per studiare le coppie di circuiti percorsi da corrente e i fenomeni di reciproca induzione. La definizione che ne diamo qui si basa sui diagrammi, mentre la formula integrale di Gauss verrà richiamata nel capitolo successivo.

**Definizione 1.15.** Dato un diagramma  $D$  di un link orientato  $L$  avente esattamente due componenti, si assegni ad ogni incrocio  $c$  il valore  $\sigma(c) = +1, -1, 0$

secondo la figura 1.8; allora si definisce *numero di allacciamento* e si indica con  $Lk(L)$  la semisomma dei valori degli incroci di  $L$

$$Lk(L) = \frac{1}{2} \sum_c \sigma(c) \tag{1.3}$$

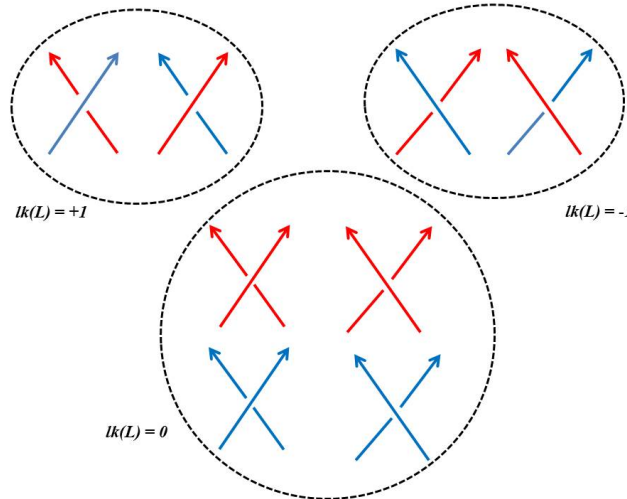


Figura 1.8: Una schematizzazione del sistema adottato per definire il segno degli incroci

In questo caso riferirci al diagramma o al nodo stesso non fa differenza in quanto parliamo di un invariante topologico, quindi indipendente dal diagramma considerato. Basta pensare che applicando i movimenti di Reidemeister al link  $L$ , il numero di allacciamento non cambia. Infatti, se si applica il primo movimento ad un nodo, il suo contributo è nullo in quanto vengono ad incrociarsi solo parti della stessa componente. Se applichiamo il secondo movimento in un punto qualunque del link, in modo che una curva passi sopra l'altra, si vengono a formare due incroci: uno positivo e uno negativo i quali, annullandosi a vicenda, non danno alcun contributo nel calcolo di  $Lk(L)$ .

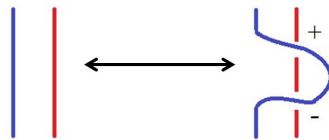


Figura 1.9: Nel dettaglio l'applicazione del secondo movimento ad una parte del nastro

Applicando invece il terzo movimento non si creano nuovi incroci, ma, o ne vengono semplicemente spostati uno o due, o non ne viene alterato nessuno, come si può osservare in Figura 1.10.

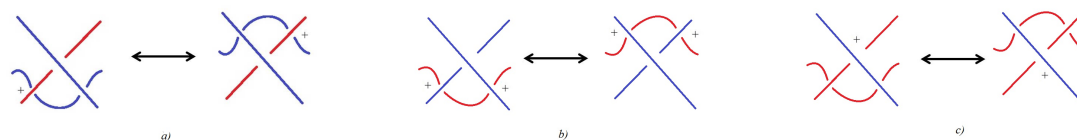


Figura 1.10: Le varie casistiche che si possono verificare applicando il terzo movimento di Reidemeister

### 1.2.3 Commenti

Finora abbiamo parlato di invarianti per nodi, cioè per curve chiuse. Possiamo però osservare che gli invarianti geometrici possono essere estese anche alle curve aperte. La stessa condizione non vale nel caso degli invarianti topologici, essendo le curve aperte tutte isotopicamente equivalenti tra loro.

Se invece abbiamo a che fare con una curva molto complicata, congiungendo gli estremi, il numero di incroci che andranno ad aggiungersi a quelli già esistenti sarà trascurabile.

# Capitolo 2

## Risultati preliminari

### 2.1 Richiami sugli integrali curvilinei e di superficie

Prima di procedere con la trattazione, occorre fare chiarezza sul passaggio tra un integrale definito su una curva  $A$  e l'integrale definito sull'intervallo di parametrizzazione della curva. In generale consideriamo una funzione  $f(s) : A \rightarrow \mathbb{R}$  e definiamo l'integrale curvilineo

$$\int_A f(s) ds$$

dove con  $ds$  indichiamo l'elemento di lunghezza unitaria della curva  $A$ . Supponiamo ora che la nostra curva  $A$  sia parametrizzata in modo orientato da una funzione  $\varphi : I \rightarrow A$  con  $I \subset \mathbb{R}$ . Si può dunque riscrivere l'integrale riferendoci all'intervallo nel modo seguente:

$$\int_I f(\varphi(t)) |\dot{\varphi}(t)| dt.$$

Quest'ultima espressione non dipende dalla scelta del parametro perché, se consideriamo un'altra parametrizzazione  $\psi : J \rightarrow A$  con  $J \subset \mathbb{R}$  e consideriamo l'integrale

$\int_J f(\psi(u))|\dot{\psi}(u)|du$ , allora posto  $\psi(u) = \varphi(t(s))$  e sostituendo, si ottiene

$$\int_I f(\varphi(t(u)))|\dot{\varphi}(t)\dot{t}(u)|\dot{u}(t)dt$$

che coincide con l'integrale precedente, essendo  $\dot{u}(t) = \frac{1}{\dot{t}(u)} = \frac{1}{|\dot{t}(u)|}$ .

Un ragionamento analogo lo possiamo applicare anche agli integrali di superficie. Consideriamo una funzione  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e l'integrale

$$\int_{S^2} g(p)dS$$

dove  $dS$  è l'elemento di superficie su  $S^2$ . Sia ora  $\nu : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  una parametrizzazione orientata della superficie. Possiamo dunque riscrivere l'integrale come:

$$\int_D g(\nu(t_1, t_2)) \left\| \frac{\partial \nu}{\partial t_1} \times \frac{\partial \nu}{\partial t_2} \right\| dt_1 dt_2.$$

*Osservazione 3.* Per comprendere meglio il cambio di variabili operato, consideriamo due parametrizzazioni della sfera:  $\omega : (s_1, s_2) \rightarrow \mathbf{v}_{s_1, s_2} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  e  $\varpi : (\bar{s}_1, \bar{s}_2) \rightarrow \bar{\mathbf{v}}_{\bar{s}_1, \bar{s}_2} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Componendo opportunamente queste due parametrizzazioni si può scrivere  $\bar{s}_i$  in funzione di  $s_i$  e viceversa. Sostituendo si ottiene:

$$\int_{S^2} dS = \pm \int_I \int_I ds_1 ds_2 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \bar{s}_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \bar{s}_2}{\partial s_2} \end{bmatrix}$$

## 2.2 Formula di Gauss per il numero di allacciamento

Come nel caso del numero di arricciamento, presentato nel capitolo precedente, possiamo parametrizzare due curve chiuse lisce disgiunte  $A$  e  $B$  e andare poi a descrivere il numero di allacciamento. Consideriamo le corde normalizzate dalla

curva  $A$  alla curva  $B$ :

$$\mathbf{c}_{AB}(s, s') = \frac{a(s) - b(s')}{|a(s) - b(s')|}. \quad (2.2)$$

dove  $a : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $b : I_s \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono due parametrizzazioni di  $A$  e  $B$  rispettivamente.

Poiché il numero di allacciamento è un invariante topologico, per ogni direzione fissata  $\mathbf{v}$  individuata da una corda  $\mathbf{c}_{AB}$ , la funzione  $E'(D_{\mathbf{v}}) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , che a ogni direzione associa il numero di allacciamento determinato con la formula 1.3 basata sugli incroci del diagramma  $D_{\mathbf{v}}$ , risulta costante. Quindi, invece di integrare sulla sfera, possiamo operare un cambio di variabili e ottenere così:

$$\begin{aligned} Lk(R) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} E' dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' \frac{(\dot{a}(s) \times \dot{b}(s')) \cdot (a(s) - b(s))}{|a(s) - b(s')|^3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \quad (2.4)$$

dove l'espressione 2.3 viene definita *formula di Gauss*.

*Osservazione 4.* L'uguaglianza tra la formula 2.3 e 2.4 viene ora dimostrata nei seguenti passaggi: indichiamo con  $\bar{\mathbf{c}}_{AB}$  la corda non normalizzata.

$$\partial_s \bar{\mathbf{c}}_{AB} = \dot{a}(s) \qquad \partial_{s'} \bar{\mathbf{c}}_{AB} = \dot{b}(s')$$

da cui

$$(\partial_s \bar{\mathbf{c}}_{AB} \times \partial_{s'} \bar{\mathbf{c}}_{AB}) \cdot \bar{\mathbf{c}}_{AB} = (\dot{a}(s) \times \dot{b}(s')) \cdot (a(s) - b(s)).$$

Normalizzando poi il tutto, si ottiene la funzione integranda della formula 2.3.

## 2.3 Espressione integrale del numero di arricciamento

Proprio come abbiamo appena fatto per il numero di allacciamento, possiamo definire anche il numero di arricciamento in termini di integrale su intervalli piuttosto che sulla sfera, sfruttando la nozione di corda.

Data una curva chiusa semplice e liscia  $A$ , vogliamo calcolare  $Wr(A)$ . Prendiamo un punto fisso sulla curva,  $a(s)$  e consideriamo le corde normalizzate del tipo  $\mathbf{c}_A(s, s')$  al variare di  $s'$ . Come già sappiamo, al tendere di  $s'$  ad  $s$  da sinistra e da destra, esse tendono a coincidere con i versori tangenti  $\mathbf{t}(s)$  e  $-\mathbf{t}(s)$ . Quindi, la variazione della corda va a tracciare sulla sfera delle direzioni una curva aperta che va da  $\mathbf{t}(s)$  a  $-\mathbf{t}(s)$  (che sulla sfera sono punti antipodali). Facendo ora variare  $s$  otteniamo, sulla sfera, una superficie costituita da archi differenziabili, parametrizzati da due curve chiuse, date dai versori  $\pm\mathbf{t}(s)$ , dette *curve indicatrici*. Osserviamo che la superficie descritta dalle corde risulta quindi parametrizzata da un anello e viene definita *writhe mesh*. Definiamo, inoltre, per ogni  $s$ , il *ventaglio delle corde*:

$$\mathbf{C}_s = \mathbf{c}_A(s, s') \quad (2.5)$$

che rappresenta tutte le corde normalizzate uscenti da  $s$ , che vanno da  $\mathbf{t}(s)$  a  $-\mathbf{t}(s)$ .

Possiamo ora definire il numero di arricciamento in termini di superficie sferica:

**Definizione 2.1.** Chiamiamo *numero di arricciamento* (o *writhe*)  $Wr(A)$  l'area totale sulla superficie (con bordo) nella sfera delle direzioni ricoperta versore  $\mathbf{c}_A(s, s')$  al variare di  $s$  e  $s'$ , cioè:

$$Wr(R) = \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' \frac{(\dot{a}(s) \times \dot{a}(s')) \cdot (a(s) - a(s'))}{|a(s) - a(s')|^3} \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' (\partial_s \mathbf{c}_A \times \partial_{s'} \mathbf{c}_A) \cdot \mathbf{c}_A \quad (2.7)$$



Tale superficie non è immersa nella superficie della sfera, in quanto immagine di una funzione non iniettiva che associa ad ogni corda normalizzata il punto corrispondente sulla superficie della sfera. Infatti la funzione  $\mathbf{c}_A(s, s')$  non risulta iniettiva poiché ogni punto della superficie viene associato al vettore direzione tante volte quanti sono gli incroci che la proiezione del nodo forma in tale direzione.

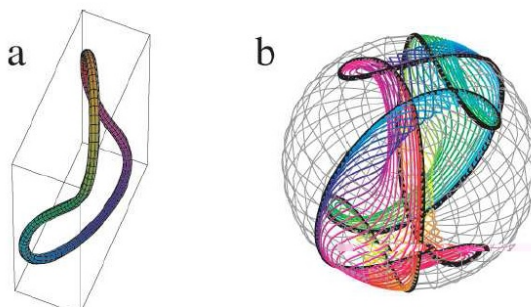


Figura 2.1: La figura illustra la costruzione della mesh. (a) mostra la curva sul toro  $(-0.3 \cos(2s), \cos(s)(1 + 0.3 \sin(2s)), \sin(s)(1 + 0.3 \sin(2s)))$ ; i punti della curva sono rappresentati con colori differenti a seconda della torsione. (b) mostra la mesh corrispondente alla figura (a). Le linee nere sono le tangenti  $\pm \mathbf{t}(s)$ , mentre quelle colorate sono date dalle corde  $\mathbf{c}_A$  dove, fissando  $s$  facciamo variare  $s'$ , i cui colore corrisponde a quello del punto  $s$  della figura accanto.

Ricordiamo, però che a differenza del numero di allacciamento, il numero di arriacciamento è un invariante geometrico ma non topologico.

## 2.4 I nastri

Pur essendo il numero di allacciamento riferito a due curve qualsiasi, il teorema di White tratta di *nastri*.

**Definizione 2.2.** Definiamo *nastro* una superficie in  $\mathbb{R}^3$  topologicamente equivalente al prodotto  $S^1 \times [0, 1]$  delimitata da due curve chiuse semplici lisce (disgiunte)  $A$  e  $B$ , corrispondenti rispettivamente a  $S^1 \times \{0\}$  e  $S^1 \times \{1\}$ , in modo tale che i punti della curva  $B$  sono individuati a partire da quelli della curva  $A$  tramite la

seguinte relazione:

$$b(s) = a(s) + \varepsilon \mathbf{u}(s) \quad (2.8)$$

dove, detto  $\mathbf{t}(s)$  il vettore tangente alla curva  $A$  nel punto  $a(s)$  (in altre parole  $\dot{a}(s)$ ),  $\mathbf{u}(s)$  è un vettore unitario perpendicolare a  $\mathbf{t}(s)$  ( $\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0$ ) e  $\varepsilon$  è un coefficiente arbitrariamente piccolo.

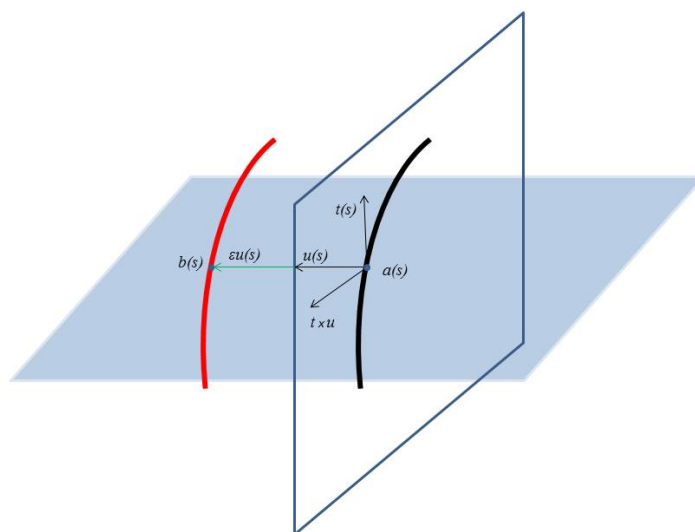


Figura 2.2: Quest'immagine mostra come dai punti  $a(s)$  della curva  $A$  si possono ricavare i punti  $b(s)$  della curva  $B$

Si ottiene così un nastro chiuso senza auto-intersezioni con due facce e due bordi formati da linee chiuse che non si intersecano tra loro, ma che possono avvitarsi l'una intorno all'altra. Al suo interno possiamo immaginare un'ulteriore curva, parallela alle curve date, che chiamiamo *asse*.

Pensando ai bordi del nastro come a due nodi, possiamo dunque ricollegarci a quanto detto finora e quindi definire nastri equivalenti e diagrammi vedendo il bordo del nastro come un 2-nodo.

## 2.5 Il numero di avvitemento

Il *numero di avvitemento* (o *twist*) descrive quante volte il nastro ruota attorno al proprio asse.

**Definizione 2.3.** Dato un nastro  $R$ , le cui curve dei bordi sono in relazione come nella formula 2.8, definiamo il *numero di avvitemento* (o *twist*)  $Tw(R)$  come l'integrale lungo la curva  $A$  della velocità di rotazione di  $\mathbf{u}$  rispetto a  $\mathbf{t}$

$$Tw(R) = \frac{1}{2\pi} \int_A (\mathbf{t} \times \mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}} ds \quad (2.9)$$

Per ogni direzione di proiezione viene contato il numero di incroci tra l'asse del nastro e la curva del bordo scelta in modo arbitrario come riferimento. Il numero di avvitemento risulta, quindi, essere la metà della media di tali incroci rispetto alle direzioni di proiezione.

Per descrivere questo fenomeno in modo più rigoroso: fissiamo una direzione sulla sfera, che identifichiamo con il vettore unitario  $\mathbf{v}$  linearmente dipendente da  $\mathbf{t}$  e da  $\mathbf{u}$  definito come segue:

$$\mathbf{v} = \mathbf{t} \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta \quad (2.10)$$

e consideriamo un vettore sul nostro nastro dipendente da  $s$  e da un angolo  $\theta$  compreso tra  $0$  e  $\pi$ :

$$\mathbf{w}(s, \theta) = \mathbf{t}(s) \cos \theta + \mathbf{u}(s) \sin \theta \quad (2.11)$$

Al variare di  $s$  e di  $\theta$ , il twist è definito come il doppio della media fatta su tutte le proiezioni  $\mathbf{v}$  delle volte in cui il vettore  $\mathbf{w}$  coincide o con  $\mathbf{v}$  o con  $-\mathbf{v}$ ; ciò può accadere solo un numero finito di volte in quanto possiamo trovare solo un numero finito di valori di  $s$  per cui il piano contenente i vettori  $\mathbf{t}$  ed  $\mathbf{u}$ , che da qui in avanti indicheremo con  $\alpha_{\mathbf{t}, \mathbf{u}}$ , risulta parallelo al vettore  $\mathbf{v}$ . In verità, questo si verifica per quasi tutte le direzioni  $\mathbf{v}$  eccetto un insieme di misura nulla, quindi facendo l'integrale, non vado incontro ad alcun tipo di complicazioni.

*Osservazione 5.* Fissato un punto  $a(s_i)$  su  $A$ , consideriamo la proiezione del nastro sul piano  $\alpha_{\mathbf{t}, \mathbf{u}}$  associato al vettore direzione parallelo a  $\mathbf{w}(s_i, \theta_i)$ . Per determinare con esattezza il punto di intersezione delle due curve sul piano, che coincide con la proiezione di  $a(s_i)$  solo nel caso in cui  $\mathbf{w}(s_i, \theta_i)$  coincida con  $\mathbf{u}$ , ragioniamo nel modo seguente: fissato il vettore  $\mathbf{w}(s_i, \theta_i)$ , lo si muova lungo la curva  $A$  parallelamente a se stesso in un intorno di  $a(s_i)$  in modo da generare un cilindro. Per un certo valore  $s'_i$ , la curva  $B$  interseca tale cilindro. Il punto di intersezione delle due curve su  $\alpha_{\mathbf{t}, \mathbf{u}}$ , corrisponderà quindi alla proiezione di  $a(s'_i)$ .

Per ognuno dei valori  $s_i$  che verificano la condizione sopracitata, esiste ed è unico  $\theta_i$  tale per cui il vettore  $\mathbf{w}(s_i, \theta_i)$  risulta parallelo ad  $\mathbf{v}$ .

A ogni coppia  $(s_i, \theta_i)$  viene poi assegnato un segno secondo la seguente formula:  $-(\partial_\theta \mathbf{w} \times \partial_s \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$ . Andiamo ad analizzare nei dettagli questo processo;  $\partial_\theta \mathbf{w}(s, \theta)$ , è un vettore perpendicolare a  $\mathbf{w}(s, \theta)$ , così come  $\partial_s \mathbf{w}(s, \theta)$ . Il loro prodotto vettoriale definisce un vettore perpendicolare al piano su cui essi giacciono che risulterà quindi parallelo o antiparallelo a  $\mathbf{w}(s, \theta)$ . Andando quindi a fare il prodotto scalare tra  $\partial_\theta \mathbf{w} \times \partial_s \mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}$  otterremo un numero positivo se i vettori hanno la stessa orientazione, negativo se hanno orientazione opposta. Il segno  $-$  è dovuto al fatto che  $\theta$  cresce nella direzione opposta all'orientazione della curva.

Possiamo ora dare una nuova definizione del numero di avvolgimento:

$$Tw(R) = \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_0^\pi d\theta (\partial_\theta \mathbf{v} \times \partial_s \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.12)$$

Notiamo che l'integrale viene fatto su tutto l'intervallo  $I$  e rispetto a tutti gli angoli  $\theta$ , poiché, visto che le coppie diverse da  $(s_i, \theta_i)$  che non rispettano le caratteristiche sopra citate, non vanno a contribuire a tale media, l'operazione risulta equivalente ma praticamente più semplice da eseguire.

Queste due espressioni (2.9 e 2.12) sono equivalenti, infatti, integrando rispetto a

$\theta$  l'equazione 2.12 otteniamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta (\partial_\theta \mathbf{v} \times \partial_s \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\
= & \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta ((\mathbf{t} \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta) \times (-\mathbf{t} \sin \theta + \mathbf{u} \cos \theta)) \cdot (\dot{\mathbf{t}} \cos \theta + \dot{\mathbf{u}} \sin \theta) \\
= & \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\mathbf{t} \times \mathbf{u}) \cdot (\dot{\mathbf{t}} \cos \theta + \dot{\mathbf{u}} \sin \theta) \\
= & \frac{1}{2\pi} (\mathbf{t} \times \mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}
\end{aligned}$$

che risulta essere la funzione integranda dell'equazione 2.9.

Il numero di avvitemento risulta essere un invariante geometrico ma non topologico; deformando il nastro infatti, tale valore può cambiare.

Analogamente al numero di arricciamento, anche il numero di avvitemento descrive sulla sfera delle direzioni una superficie chiamata *twist mesh*; infatti il vettore  $\mathbf{v}(s, \theta)$  identifica su di essa una superficie detta *twist mesh*. Fissato  $s$  definiamo

$$\mathbf{S}_s = \mathbf{v}(s, \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (2.13)$$

che va a descrivere una semicirconferenza da  $\mathbf{t}(s)$  a  $-\mathbf{t}(s)$ . Facendo poi variare anche  $s$ , otteniamo, come nel caso precedente, una superficie topologicamente equivalente a un anello. L'area totale di tale superficie rappresenta il valore del twist.

# Capitolo 3

## Il teorema di White

Il risultato espresso dalla formula 3.1 fu raggiunto più o meno negli stessi anni, ma in modo indipendente, da J. White dell'università della California e da G. Călugăreanu, matematico rumeno.

**Teorema 3.0.1.** (DI WHITE-CĂLUGĂREANU) *Il numero di allacciamento di un nastro può essere espresso tramite la formula seguente:*

$$Lk(R) = Tw(R) + Wr(R) \tag{3.1}$$

*detta formula di White.*

La rilevanza di questo risultato sta nel fatto che un invariante topologico intero coincide con la somma di due invarianti geometrici non necessariamente interi.

Osserviamo, inoltre che il numero di allacciamento è anche simmetrico, cioè non dipende dalla scelta della curva presa come riferimento.

### 3.1 Commenti

Osserviamo ora, tramite un esempio pratico, la validità del teorema; consideriamo la Figura 3.1. Notiamo subito che il nastro ha  $Tw(R) = 1$  e  $Wr(R) = 1$ ,

quindi

$$Lk(R) = Tw(R) + Wr(R) = 1 + 1 = 2$$

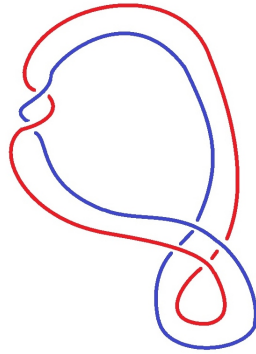


Figura 3.1: Diagramma di un nastro

Applichiamo ora il primo movimento di Reidemeister alla curva blu nella zona dell'arricciamento in basso, in modo da ottenere solo un ricciolo dato dalla curva rossa; successivamente applichiamo il primo movimento anche a quest'ultima, come nella Figura 3.2. Abbiamo così trasformato un arricciamento in un avvitamento. Ovviamente possiamo applicare tutte le trasformazioni inverse per tornare alla situazione di partenza.

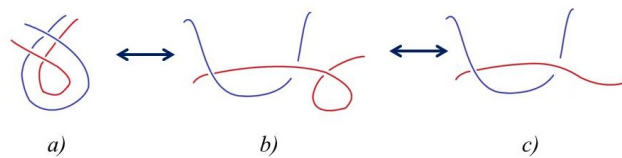


Figura 3.2: La figura mostra in modo dettagliato i passaggi sopra riportati

Dopo aver applicato queste operazioni possiamo osservare che  $Tw(R) = 2$  mentre  $Wr(R) = 0$ . Tuttavia il numero di allacciamento rimane sempre  $Lk(R) = 2$ .

## 3.2 Dimostrazione

*Dimostrazione.* Consideriamo due curve disgiunte  $A$  e  $B$  (non necessariamente parallele) e calcoliamo il numero di allacciamento. Su  $A$  fissiamo un punto  $a(s)$  e consideriamo la corda  $\mathbf{c}_{A,B}(s, s')$  al variare di  $s'$  nell'intervallo  $I_s$ . Tale variazione viene associata a una curva chiusa sulla sfera delle direzioni che indichiamo con  $\mathcal{D}_s$ . Facendo poi variare anche  $s$ , si ottiene una superficie sulla sfera formata da tutte le curve chiuse sopra descritte, che può essere parametrizzata con un'applicazione  $\varphi : A \times B \rightarrow S^2$ . Notiamo che prodotto di queste due curve  $A \times B$  risulta topologicamente equivalente a un toro, in quanto le curve chiuse  $A$  e  $B$  sono topologicamente equivalenti a circonferenze.

Fissando ora  $s$ , unendo  $\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{S}_s$  (definite rispettivamente come 2.5 e 2.13), otteniamo, sulla sfera, una curva chiusa che denotiamo con  $\mathcal{L}_s$ . Al variare di  $s$ , unione delle curve  $\mathcal{L}_s$  genera una superficie topologicamente equivalente a un toro, proprio come nel caso del numero di allacciamento.

La superficie che si ottiene è dunque data dall'unione della mesh del twist e del writhe ed ha area pari a  $Tw + Wr$ . Occorre provare che la superficie generata dalle curve del tipo  $\mathcal{L}_s$  è uguale alla superficie generata dalle curve  $\mathcal{D}_s$ .

Osserviamo che la curva  $\mathcal{L}_s$  viene orientata andando da  $\mathbf{t}(s)$  a  $-\mathbf{t}(s)$  lungo  $\mathbf{C}_s$  e da  $-\mathbf{t}(s)$  a  $\mathbf{t}(s)$  lungo  $\mathbf{S}_s$  (questo fornirà un'ulteriore spiegazione alla scelta di segno applicata al numero di avvitamento nella sezione 2.5).

Veniamo ora al cuore della dimostrazione; consideriamo due curve  $A$  e  $B$ , bordi di un nastro  $R$ . I punti della curva  $B$  sono quindi del tipo:

$$b(s) = a(s) + \varepsilon \mathbf{u}(s).$$

L'idea è quella di scomporre la formula di Gauss in modo da ottenere, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le definizioni integrali del numero di avvitamento e di quello di arricciamento. Risulta pertanto conveniente pensare l'intervallo  $I_s$  che parametrizza la curva  $B$  come l'unione di  $E_\delta(s) = \{s' \in I_s : |s - s'| < \delta\}$  e  $F_\delta(s) = \{s' \in I_s : |s - s'| > \delta\}$



dove  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ . Quindi:

$$\begin{aligned} Lk &= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{E_{\delta\varepsilon}(s)} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{F_{\delta\varepsilon}(s)} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \quad (3.3)$$

Passiamo ora al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} Lk &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Lk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' \partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB} \cdot \mathbf{c}_{AB} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_s} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E_{\delta\varepsilon}(s)} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_I ds \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_{\delta\varepsilon}(s)} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \quad (3.5)$$

Possiamo riscrivere gli intervalli come:  $E_{\delta\varepsilon}(s) = [s + \delta; s + p - \delta]$  e  $F_{\delta\varepsilon}(s) = [s - \delta; s + \delta]$ . Dunque:

$$Lk = \frac{1}{4\pi} \int_I ds \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{s+\delta}^{s-\delta} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} + \int_{s-\delta}^{s+\delta} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \right)$$

Occorre mostrare ora che, fissato  $s$ ,  $(\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB}$ , come funzione di  $s'$  e  $\varepsilon$ , è globalmente limitata. Questo ci permetterà poi di portare l'operazione di limite all'interno dell'integrale.

Poniamo ora la nostra attenzione su:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s+\delta}^{s+p-\delta} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB}. \quad (3.6)$$

La funzione integranda risulta limitata nell'intervallo di integrazione, ed in particolare, inferiormente limitata. Poiché  $s'$  varia lontano da  $s$ , posso sempre trovare

una corda di lunghezza minima diversa da 0.

Per quanto riguarda:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s-\delta}^{s+\delta} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \quad (3.7)$$

per dimostrare che la funzione integranda è limitata, occorre operare un cambiamento di variabili andando a sostituire la corda  $\mathbf{c}_{AB}$  con il vettore  $\mathbf{v}(s, \theta)$ .

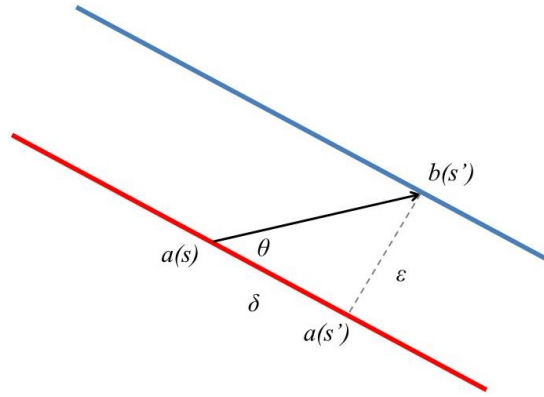


Figura 3.3: La figura mostra l'approssimazione delle due curve nell'intorno del punto  $s$  di ampiezza  $\delta$

Come possiamo vedere dalla Figura 3.3, la corda non normalizzata  $\bar{\mathbf{c}}_{AB}$  può essere definita in termini di  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{u}(s)$  (operando in un intorno di  $s$  con oggetti che godono di uniforme continuità, posso considerare  $\mathbf{u}(s') = \mathbf{u}(s)$ ). Possiamo quindi considerare la componente tangente come il prodotto tra il vettore unitario  $\mathbf{t}(s)$  per il modulo della distanza tra tali punti, ossia  $\delta$ , supponendo la parametrizzazione a velocità unitaria. Analogamente la componente perpendicolare viene vista come prodotto di  $\mathbf{u}(s)$  per  $\varepsilon$ . Di conseguenza avremo che

$$\bar{\mathbf{c}}_{AB}(s, s') = a(s) - b(s') = \mathbf{t}(s)\delta + \mathbf{u}(s)\varepsilon.$$

Normalizzando otteniamo quindi:

$$\mathbf{t}(s) \frac{\delta}{|a(s) - b(s')|} + \mathbf{u}(s) \frac{\varepsilon}{|a(s) - b(s')|} = \mathbf{t}(s) \cos \theta + \mathbf{u}(s) \sin \theta = \mathbf{w}(s, \theta).$$

Andiamo quindi a sostituire gli estremi di integrazione con due funzioni  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h' : I \rightarrow \mathbb{R}$  in modo tale che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = 0$  e  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h'(\varepsilon) = \pi$ .

Quindi:

$$(\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \quad \longrightarrow \quad (\partial_s \mathbf{w} \times \partial_\theta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}. \quad (3.8)$$

Derivando  $\mathbf{w}(s, \theta)$ , rispetto a  $s$  otteniamo  $\dot{\mathbf{t}}(s) \cos \theta + \dot{\mathbf{u}}(s) \sin \theta$ , mentre derivando rispetto a  $\theta$  abbiamo  $-\mathbf{t}(s) \sin \theta + \mathbf{u}(s) \cos \theta$ ; entrambi sono prodotti di quantità finite per quantità limitate, dunque il loro prodotto vettoriale è limitato. Di conseguenza sarà limitata anche la funzione limite 3.8.

*Osservazione 6.* Per delle generiche funzioni  $\alpha : [0, 1] \times I \rightarrow S^2$ ,  $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $m' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue con  $\alpha$  limitata e, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $m(\varepsilon)$  e  $m'(\varepsilon)$  tendono rispettivamente a  $m(0)$  e  $m'(0)$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{m(\varepsilon)}^{m'(\varepsilon)} \alpha(\varepsilon, t) dt = \int_{m(0)}^{m'(0)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon, t) dt.$$

Possiamo vedere infatti

$$\int_{m(\varepsilon)}^{m'(\varepsilon)} \alpha(\varepsilon, t) dt = \int_{m(\varepsilon)}^{m(0)} \alpha(\varepsilon, t) dt + \int_{m(0)}^{m'(0)} \alpha(\varepsilon, t) dt + \int_{m'(0)}^{m'(\varepsilon)} \alpha(\varepsilon, t) dt.$$

Osserviamo che, poiché  $m$  e  $m'$  sono continue, al limite, il primo e il terzo integrale, sono definiti in un intervallo di ampiezza tendente a 0. L'unico elemento che fornisce un contributo significativo è il secondo integrale, definito, questa volta, in un intervallo che non dipende da  $\varepsilon$ ; ciò permette di poter svolgere l'operazione di limite all'interno dell'integrale.

Applichiamo ora quest'osservazione al nostro caso. Scomponiamo l'integrale 3.6 come segue:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s+\delta}^{s+p-\delta} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \\ &= \int_{s+\delta}^s ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} + \int_s^{s+p} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} + \int_{s+p}^{s+p-\delta} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB}. \end{aligned}$$

Come nell'osservazione, anche qui l'unico integrale che vale la pena considerare è il secondo. Possiamo quindi spostare il limite dentro il simbolo di integrale. Ora

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\dot{a}(s) \times \dot{b}(s')) \cdot (a(s) - b(s'))}{|a(s) - b(s')|^3} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\dot{a}(s) \times (\dot{a}(s') + \varepsilon \dot{\mathbf{u}}(s'))) \cdot (a(s) - a(s') - \varepsilon \mathbf{u}(s'))}{|a(s) - a(s') - \varepsilon \mathbf{u}(s')|^3} \\
 &= \frac{(\dot{a}(s) \times \dot{a}(s')) \cdot (a(s) - a(s'))}{|a(s) - a(s')|^3} = (\partial_s \mathbf{c}_A \times \partial_{s'} \mathbf{c}_A) \cdot \mathbf{c}_A.
 \end{aligned}$$

Analogamente per l'integrale 3.7 diremo che:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s-\delta}^{s+\delta} ds' \partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB} \cdot \mathbf{c}_{AB} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{h'(\varepsilon)}^{h(\varepsilon)} d\theta (\partial_s \mathbf{v} \times \partial_\theta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{h'(\varepsilon)}^{\pi} d\theta (\partial_s \mathbf{v} \times \partial_\theta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\pi}^0 d\theta (\partial_s \mathbf{v} \times \partial_\theta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \int_0^{h(\varepsilon)} d\theta (\partial_s \mathbf{v} \times \partial_\theta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right).
 \end{aligned}$$

*Osservazione 7.* Il motivo per cui gli estremi di integrazione vanno da  $h'(\varepsilon)$  ad  $h(\varepsilon)$  risiede nell'unione delle curve  $\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{S}_s$  dove quest'ultima, viene percorsa nel senso opposto alla sua naturale orientazione.

Come prima, l'unico integrale che vale la pena considerare è l'integrale centrale, il quale non presenta più alcuna dipendenza da  $\varepsilon$ .

Possiamo quindi concludere che:

$$\begin{aligned}
 Lk &= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E_{\delta\varepsilon}(s)} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_I ds \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_{\delta\varepsilon}(s)} ds' (\partial_s \mathbf{c}_{AB} \times \partial_{s'} \mathbf{c}_{AB}) \cdot \mathbf{c}_{AB}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_{I_s} ds' (\partial_s \mathbf{c}_A \times \partial_{s'} \mathbf{c}_A) \cdot \mathbf{c}_A + \frac{1}{4\pi} \int_I ds \int_0^\pi d\theta (\partial_\theta \mathbf{v} \times \partial_s \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = Wr + Tw$$

Quindi, il teorema di White può essere visto come la naturale decomposizione dell'integrale di Gauss (Formula 2.3) in termini di writhe e twist mesh. Questo approccio risulta molto vicino a quello proposto dallo stesso White nel 1969.

□

# Capitolo 4

## II DNA

In questo capitolo osserveremo come la teoria dei nodi, e in particolare il teorema di White, venga utilizzata in biologia per spiegare il funzionamento di alcuni enzimi che operano sul DNA, e la conformazione del DNA stesso.

### 4.1 Introduzione

Il *DNA* o *acido desossiribonucleico* è una molecola formata da due lunghi filamenti molecolari vincolati tra loro da dei "pioli", avvolti l'uno attorno all'altro a formare la così detta doppia elica. I filamenti sono formati da zuccheri e fosfati; ogni zucchero è associato a una delle quattro basi: A = Adenina, T = Timina, C = Citosina e G = Guanina. I pioli sono costituiti dai legami a idrogeno che si instaurano tra due basi, dove A è sempre collegata con T e C con G. È proprio la sequenza di queste basi che racchiude il nostro codice genetico.

Il modello a doppia elica del DNA è comunemente visto come un esempio di eleganza ed efficienza per la lettura e la riproduzione del nostro patrimonio genetico. A livello strutturale, però, fin dall'inizio sono stati individuati dagli stessi scienziati J. D. Wiston e F. Crick, che proposero tale modello, dei problemi su come la doppia elica debba svitarsi e riavvitarsi nei processi di trascrizione e duplicazione. Si intuisce subito che si tratta di un problema geometrico.

Come trattare dunque la questione? L'idea è quella di comprendere come il DNA si può modellizzare nelle sue varie configurazioni; infatti, la struttura a doppia elica più comunemente nota non è propriamente visibile all'interno della cellula. Il filamento, della lunghezza di circa  $2m$  e ampiezza  $2nm$  è compattato all'interno del nucleo, le cui dimensioni sono dell'ordine del  $\mu m$ . Per fare questo la struttura si infittisce e si avvolge su se stessa fino ad arrivare a un cordone di circa  $30nm$  che si trova posizionato nel nucleo.

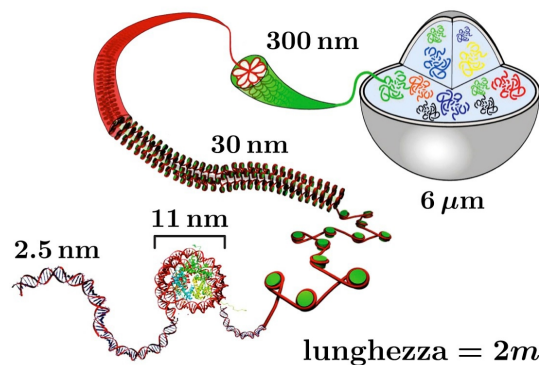


Figura 4.1: Uno schema del processo di compattificazione del DNA

Possiamo quindi considerare il DNA o come due filamenti (che formano la doppia elica) o come un unico filamento; in quest'ultimo caso non risulta particolarmente rilevante lo spessore di tale oggetto.

Un altro elemento importante da valutare è l'inclinazione tra i due filamenti che vanno a comporre la doppia elica. La configurazione scelta dalla natura durante questo processo di compattamento, è quella che consente di occupare il massimo volume del cilindro sotteso dalla doppia elica e al tempo stesso minimizza la lunghezza di un giro dell'elica. L'inclinazione non deve quindi essere né troppo bassa, in modo da non creare vuoti, né troppo alta per evitare che si formino scanalature. Quella ottimale è di circa 31 gradi.

È quindi possibile modellare questi filamenti con dei nodi matematici. Pur essendo il DNA di fatto rappresentabile con una linea aperta (fatta eccezione per alcuni casi specifici), essa è molto aggrovigliata e soggetta a vari vincoli, può essere pen-

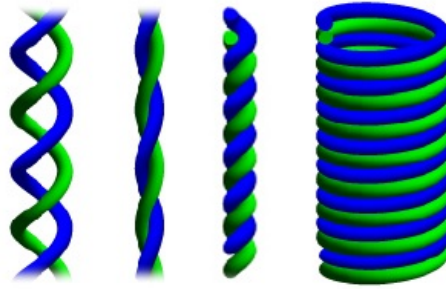


Figura 4.2: A sinistra vediamo la rappresentazione a doppia elica, mentre le altre figure rappresentano le varie configurazioni che si possono ipotizzare nel processo di compattificazione; ovviamente la figura centrale rappresenta la situazione di inclinazione ottimale descritta qui sopra.

sata anche come una curva chiusa, anche considerando il ragionamento fatto nella sezione 1.2.3.

## 4.2 Il problema

Se consideriamo una molecola di DNA chiusa, il numero di giri che una delle due eliche formerebbe intorno all'altra, in condizione rilassata è legato al numero delle basi (ogni 10, 11 basi circa, si compie un giro). Quando però si osservano queste molecole in soluzione, il numero di giri diminuisce circa del 6%, distribuiti in parte come torsione e in parte come arricciamento. Ad esempio, supponiamo di avere una molecola di DNA ciclica chiusa che ha il proprio asse sul piano; in questo caso il numero di arricciamento  $Wr(R) = 0$ . Ma supponiamo ora che sia il numero di avvitamento  $Tw(R)$ , sia il numero di allacciamento  $Lk(R)$  vengano duplicati, non andando a modificare però il numero delle basi che si trovano sui filamenti. A questo punto abbiamo un avvitamento ogni 5,25 basi circa. Per ristabilire una situazione di equilibrio, occorre quindi modificare il numero degli avvolgimenti e degli arricciamenti secondo il teorema 3.0.1; questo fenomeno viene chiamato *super-avvitamento*. Inoltre la molecola di DNA può avvolgersi sia su se stessa ma anche attorno a delle proteine chiamate *istoni*.



Quando si prova a separare i capi di una qualunque corda, formata da fili arrotolati tra loro, si formano degli arricciamenti; lo stesso avviene anche alle eliche del DNA durante i processi di trascrizione e duplicazione. Questo fenomeno è dovuto alla pressione che si esercita per svolgere la struttura a doppia elica. Per andare a modificare questa situazione, la natura può solo operare applicando dei tagli alla struttura. Nelle nostre cellule infatti vi sono proprio degli enzimi che si occupano di ristabilire questo equilibrio. Uno di questi è la *Topoisomerasi I*, che opera tagliando uno dei due filamenti del DNA, facendolo poi passare attraverso l'altro e infine lo riallaccia andando così a modificare il numero di avvitiamenti. Questa risulta essere un'operazione molto delicata in quanto, con l'applicazione del taglio, l'enzima deve riuscire a tenere fermi gli estremi liberi del filamento per non perdere informazioni.

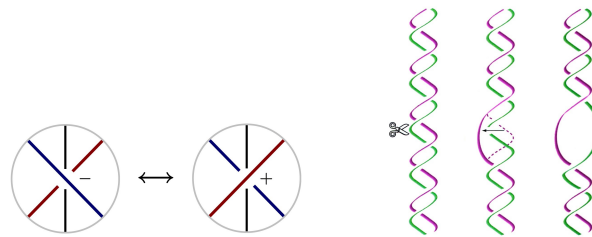


Figura 4.3: Due schematizzazioni di come opera l'enzima Topoisomerasi I

Un altro enzima che consente di alleggerire la compressione dovuta allo svolgimento della doppia elica è la *Topoisomerasi II*. Esso opera in modo simile alla Topoisomerasi I ma, invece di tagliare un singolo filamento che compone la struttura del DNA, li taglia entrambi. In questo caso viene modificato il numero di arricciamenti.

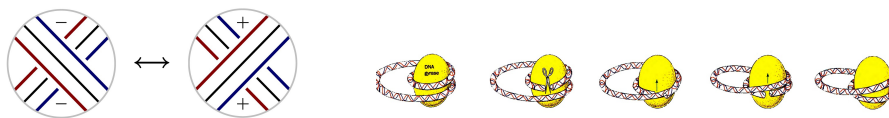


Figura 4.4: Due schematizzazioni di come opera l'enzima Topoisomerasi II

# Ringraziamenti

*Dobbiamo essere grati alle persone che ci rendono felici, sono gli affascinanti giardinieri che rendono la nostra anima un fiore*

*M. Proust*

Pensando a questi ultimi anni trascorsi, sono molti i ringraziamenti da fare. Il primo va al professor Riccardo Piergallini che mi ha aiutato e sopportato durante la stesura di questo lavoro, e a tutti i docenti UNICAM per quanto mi hanno insegnato in questi anni, con competenza e disponibilità. In secondo luogo devo dire grazie a due insegnanti speciali: la professoressa Flavia Giacchini, scomparsa qualche anno fa, che prima di tutti ha intuito e spronato la mia passione per la matematica, e il professor Paolo Luzietti che per me non è solo un semplice maestro, ma un esempio di professionalità e umanità, un mentore che spero di poter chiamare un giorno collega.

In questo percorso non posso certo dimenticare gli amici, quelli vecchi e quelli nuovi. Grazie quindi a chi in questi anni ha studiato con me; agli amici di fisica per le nottate passate a risolvere gli esercizi di Geometria I, a Giulia per la sua semplicità e spontaneità, a Stefano che, nonostante i battibecchi e le pessime battute, si è spesso dimostrato un buon amico, a Elena per il suo sostegno e supporto ma soprattutto per le risate, le chiacchierate le canzoni ascoltate insieme, a Mauro per la simpatia e la gratità con cui non mi ha mai negato un aiuto e un sorriso, ad Alessandra con la quale ho avuto il piacere di collaborare a svariati progetti, per la determinazione, la competenza e la passione che mette in tutto quello che fa. Ma, e spero che nessuno si offenda, tra tutti sento che il grazie più grande lo devo

dedicare a Laura, compagna di risate, pianti, settimane di reclusione pre-esame e successi universitari, non che amica preziosa e fidata senza la quale questi anni non sarebbero stati gli stessi.

Anche chi non ha studiato al mio fianco ha avuto un ruolo fondamentale in questi anni. Grazie dunque agli amici della parrocchia e della diocesi, all'equipe ACR che mi ha accolto quasi un anno fa e con la quale ho il piacere di condividere un servizio così importante nella mia vita, a Martina che ogni volta mi dimostra come non bisogna mai smettere di avere fede, a Francesca e alla cura che mette nelle relazioni, con sincerità e dolcezza, e ad Alessandra per tutte le esperienze condivise insieme, nel bene e nel male, per la nostra amicizia così preziosa.

Senza dubbio non posso non ringraziare la mia famiglia, i miei nonni, i miei zii ma soprattutto i miei genitori che, nonostante i loro difetti, mi hanno sempre spronato a seguire le mie passioni dandomi la possibilità di impegnarmi al meglio in tutte le attività che ho scelto di intraprendere. Grazie a loro perchè, malgrado le difficoltà e i momenti di crisi, mi sento fortunata a fare parte di questa famiglia.

Per ultimo desidero ringraziare con tutto il cuore il Signore, che in questi anni non mi ha mai abbandonato e mi ha insegnato a guardare con affetto alla mia storia e alla mia vita. Grazie a Lui mi sono state messe accanto queste persone straordinarie che mi hanno reso la donna che sono oggi.

Grazie quindi ad ognuno di voi dal profondo del cuore per tutto ciò che mi avete donato.

# Bibliografica

- [1] M.R. Dannis and J.H. Hannay, *Geometry of Călugăreanu's theorem*, Proceedings of the Royal Society 461 (2005)
  
- [2] C.C. Adams, *The knot book*, American Mathematical Society (1994)
  
- [3] P.K. Agarwal, H. Edelsbrunner, Y. Wang, *Computing the Writhing Number of a Polygonal Knot*, Proceedings of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (2002)
  
- [4] D.Buck, E. Flapan, *Applications of Knot Theory*, American Mathematical Society (2008)
  
- [5] A.D.Bates, A. Maxwell, *DNA Topology*, Oxford University Press (1993)
  
- [6] C. Livingston, *Knot Theory*, The Mathematical Association of America (1993)
  
- [7] R.H. Crowell, R.H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag (1963)