

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica

**ALGORITMO PER IL
RICONOSCIMENTO DI S^3**

Tesi Sperimentale di Laurea
in Geometria

Relatore:

Prof. R. Piergallini

Correlatore:

Prof. A. Spiro

Laureando:

Jhonatan Gigli

Anno Accademico 1998 – 99

Indice

Introduzione	iii
1 3-varietà	1
1.1 Preliminari	1
1.1.1 Richiami di topologia generale	1
1.1.2 Poliedri e complessi	3
1.1.3 Il gruppo fondamentale	5
1.1.4 Rivestimenti	6
1.1.5 Varietà	7
1.1.6 Intorni regolari	9
1.1.7 Posizione generale e trasversalità	9
1.1.8 Somme connesse	12
1.1.9 Superfici immerse in 3-varietà	13
1.2 Sfere e bocce	15
1.3 Decomposizioni a manici	17
1.3.1 Spezzamenti e diagrammi di Heegaard	18
1.4 Superfici normali	19
1.4.1 Sistemi di equazioni lineari diofantee	22
1.4.2 L'algoritmo di Haken	24
1.5 Rivestimenti ramificati di S^3	28
1.5.1 L'insieme di ramificazione universale	28
1.5.2 Rivestimenti e permutazioni	33
1.5.3 Rivestimenti e diagrammi di Heegaard	34
1.5.4 Diagrammi di Heegaard e permutazioni	36
2 Riconoscimento di S^3	39
2.1 Riduzione delle decomposizioni a manici	39
2.2 Divisione lungo una sfera 2-normale	46
2.3 L'algoritmo	48
2.4 Il teorema di Rubinstein-Thompson	49
2.5 Non banalità del link duale	49

2.6	Dischi di compressione e superfici impermeabili	52
2.7	Cilindri invertiti	56
2.8	<i>Thin position</i> per i link	58
3	Rivestimenti ramificati	67
3.1	Decomposizioni a manici ridotte	67
3.2	Riconoscimento di S^3	74
3.2.1	Riduzione delle decomposizioni a manici	75
3.2.2	Divisione lungo una sfera 2-normale	80
	Bibliografia	89

Introduzione

Uno dei più importanti problemi nella topologia delle varietà è il *problema della classificazione*. È noto, per esempio, che le 2-varietà chiuse sono omeomorfe a somme connesse di tori oppure di proiettivi a seconda che siano orientabili o meno. Per quanto riguarda le 3-varietà, invece, la questione non è ancora completamente risolta, sebbene molti risultati parziali siano stati già conseguiti; ciò che emerge comunque dagli studi sinora condotti è che difficilmente si riuscirà a produrre una classificazione delle 3-varietà (chiuse ed orientabili, se si vuole) potente e sintetica come nel caso delle 2-varietà.

Decenni di studi e ricerche hanno posto innanzitutto l'attenzione sulla corretta definizione del problema: cosa si intende per classificazione?

In generale, per classificazione di un insieme S si intende una corrispondenza uno-a-uno tra S ed un insieme T ben noto; la classificazione è utile se la struttura di T consente di tradurre in termini semplici e maneggevoli le proprietà complesse degli elementi di S . Un esempio è proprio la classificazione delle 2-varietà orientabili (o non orientabili) in cui queste sono poste in corrispondenza biunivoca con l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali per via del genere.

Nella topologia delle 3-varietà è ormai pressoché generalmente accettato il fatto di considerare una soluzione al problema della classificazione la formulazione di un algoritmo in grado di stabilire se due 3-varietà sono omeomorfe o meno; tale *algoritmo* è detto *di riconoscimento*.

Si osservi per inciso che il problema del riconoscimento non è risolvibile mediante gli usuali invarianti geometrici o algebrici come la caratteristica di Eulero da una parte o i gruppi di omologia e omotopia dall'altra; questi consentono di stabilire quando due 3-varietà *non* sono omeomorfe, ma non forniscono alcun criterio sufficiente.

La riduzione del problema della classificazione a quello del riconoscimento è giustificato dal fatto che l'esistenza di un algoritmo di riconoscimento consentirebbe in combinazione con un *algoritmo di enumerazione* di procedere in questo modo: mentre si elencano mediante l'algoritmo di enumerazione le 3-varietà, si confronta di volta in volta ciascuna di queste con le precedenti

utilizzando l'algoritmo di riconoscimento; parallelamente si costruisce una lista in cui si inseriscono solamente le 3-varietà che non sono omeomorfe a quelle già considerate. Questa lista è proprio ciò che si intende per classificazione; purtroppo, però, non si può pretendere che la posizione nella lista descriva qualche proprietà topologica.

L'esistenza di un algoritmo di enumerazione è garantita, per esempio nel caso compatto, dal fatto che ogni 3-varietà possa essere vista come complesso simpliciale finito (Teorema di Moise [13]); allora, elencando i possibili complessi simpliciali finiti ed eliminando quelli che non corrispondono a 3-varietà, si procede alla costruzione di una lista di 3-varietà compatte; è chiaro che questo procedimento è infinito, perché infiniti sono i complessi simpliciali finiti e le 3-varietà che essi rappresentano.

Il problema della classificazione posto nei termini della ricerca di un algoritmo di riconoscimento è stato risolto per alcune classi di 3-varietà, come ad esempio gli spazi dei nodi o, più in generale, le *varietà di Haken*, ovvero quelle 3-varietà compatte ed orientabili che sono irriducibili (ogni 2-sfera delimita una 3-cella) e che contengono una superficie incompressibile (π_1 -iniettiva) propriamente immersa. Le varietà di Haken sono 3-varietà piuttosto comuni, ma comunque non universali; sono varietà di Haken non solo tutti gli oggetti che possono essere immersi nello spazio fisico tridimensionale, ma anche molte altre varietà che non possono essere visualizzate in \mathbb{R}^3 . D'altro canto, una 3-varietà comune come S^3 non è una varietà di Haken.

La classificazione delle varietà di Haken, si fonda sull'esistenza di un algoritmo per decidere se una certa 3-varietà è di Haken (Jaco-Oertel [9]) e di un altro per stabilire se due varietà di Haken sono omeomorfe (Johannson [10]); entrambi questi algoritmi si fondano sulla teoria delle *superfici normali* formulata originariamente dallo stesso Haken [5] negli anni Sessanta; questa teoria consente di tradurre in termini combinatori le superfici immerse in una 3-varietà dotata di una triangolazione o di una decomposizione a manici. L'algoritmo di riconoscimento, a cui hanno contribuito anche Hemion [6], Schubert [17] e Waldhausen [21], procede sostanzialmente nel seguente modo: date due varietà di Haken H, H' , è possibile costruire per ognuna l'insieme di tutte le superfici normali rispetto ad una data triangolazione sulla varietà; tra queste c'è *essenzialmente* solo un numero finito di superfici incompressibili (di qui il nome *essenziale* dato talvolta alle superfici incompressibili). Tagliando H' lungo una di queste superfici essenziali, sia S' , si ottiene una 3-varietà più semplice; è chiaro che H è omeomorfa a H' se e solo se esiste una superficie essenziale S per H per cui $H \setminus S$ è omeomorfo a $H' \setminus S'$. Ricorsivamente ci si riconduce a confrontare 3-varietà via via più semplici, fino ad arrivare in ultima analisi a confrontare 3-celle; l'algoritmo termina quando si trova che le 3-varietà ottenute in seguito ai tagli sono omeomorfe, e in tal caso $H \cong H'$;

oppure quando, pur avendo tagliato lungo tutte le possibili (ma finite) superfici essenziali, non si è ottenuta alcuna coppia di varietà omeomorfe, e quindi $H \not\cong H'$. Il punto più delicato di questo algoritmo è che nel confrontare due 3-varietà (ed in particolare due 3-celle) bisogna tener conto anche di come deve essere effettuato il reicollamento sul bordo per ottenere di nuovo la 3-varietà iniziale: è inutile che due 3-varietà intermedie siano omeomorfe se poi i loro bordi vengono incollati in maniera diversa per ricostruire la 3-varietà iniziale! La classificazione delle 3-varietà di Haken si riconduce allora anche alla classificazione degli omeomorfismi tra superfici.

Sebbene la generalizzazione dell'algoritmo di riconoscimento ad una qualsiasi 3-varietà non sia ancora matura, parallelamente agli studi che hanno condotto ai risultati appena descritti, sono stati sviluppati altri algoritmi per il riconoscimento di 3-varietà diverse da quelle di Haken; in particolare, com'è facile immaginare, il primo interesse è stato verso il riconoscimento di S^3 .

Già a partire dagli anni Settanta erano noti due differenti algoritmi per il riconoscimento di S^3 tra le 3-varietà di genere due (si veda [1, 20, 8]). Nel 1992, in una serie di lezioni tenute ad Haifa, Rubinstein [16] descrisse un algoritmo che consente di decidere se una 3-varietà chiusa, orientabile e triangolata sia o meno omeomorfa ad S^3 ; la sua argomentazione utilizza ancora la nozione di superficie normale combinandola però con alcune idee della teoria delle superfici minimali. Più tardi, nel 1994, Thompson [18] dimostrò in maniera puramente topologica che l'algoritmo di Rubinstein funziona, introducendo la nozione di *thin position* per i nodi.

Nello stesso anno, Matveev [12] elaborò una versione modificata della dimostrazione di Thompson, ricorrendo alle decomposizioni a manici piuttosto che alle triangolazioni; gli ingredienti sono nuovamente le superfici normali di Haken e la definizione di *thin position* per i link introdotta da Gabai [4].

Lo scopo del lavoro esposto in questa tesi è l'interpretazione dell'algoritmo per il riconoscimento di S^3 in termini della rappresentazione delle 3-varietà come rivestimenti ramificati di S^3 . In particolare, tenendo conto del fatto che questa rappresentazione consente di associare ad ogni 3-varietà chiusa ed orientabile una coppia di permutazioni σ, τ appartenenti all'insieme Σ_h , dove h è l'ordine del rivestimento (Montesinos [14]), si è tradotto l'algoritmo per il riconoscimento di S^3 dal punto di vista delle permutazioni σ, τ . L'approccio all'algoritmo di riconoscimento è quello seguito da Matveev; la scelta è motivata dal fatto che è possibile costruire ed esprimere una decomposizione a manici su una 3-varietà mediante le permutazioni σ, τ che la rappresentano.

L'obiettivo che ha ispirato la ricerca è stata l'idea di poter adattare l'algoritmo di riconoscimento per testare la semplice connessione di una 3-varietà,

visto che esiste già un modo per costruire una presentazione del gruppo fondamentale in termini delle permutazioni σ, τ che rappresentano una determinata 3-varietà (Montesinos [14]). L'individuazione di un tale algoritmo costituirebbe un passo avanti nella ricerca di una eventuale soluzione negativa per la

Congettura di Poincaré. *Ogni 3-sfera d'omotopia è omeomorfa a S^3 .*

Questa congettura è ancora un problema aperto, sebbene esistano alcune proposte di dimostrazione, peraltro non verificate. Ricordando che una 3-varietà è una sfera d'omotopia se e solo se il suo gruppo fondamentale è banale (Hempel [7]), allora un algoritmo per testare la semplice connessione servirebbe anche a riconoscere una 3-sfera d'omotopia. Si potrebbero cercare controesempi per la congettura di Poincaré in questo modo: mentre si elencano le 3-varietà, si controlla se ciascuna di queste sia o meno una sfera d'omotopia; in caso positivo si applica anche l'algoritmo per il riconoscimento di S^3 per stabilire se la sfera d'omotopia è omeomorfa a S^3 . Se esistesse un controesempio per la congettura di Poincaré, questo verrebbe trovato in un numero finito di passi; in caso contrario la procedura sarebbe infinita.

La trattazione che si leggerà qui di seguito è organizzata in questo modo: nel Capitolo 1, dopo un'introduzione generale alle nozioni topologiche che di volta in volta sono richiamate nel corso della dissertazione con particolare attenzione alle questioni relative alle 3-varietà, sono trattati in dettaglio il concetto di superficie normale e la rappresentazione di una 3-varietà come rivestimento ramificato di S^3 .

L'intero algoritmo per il riconoscimento di S^3 e la dimostrazione prodotta da Matveev sono invece l'oggetto del Capitolo 2.

Nel Capitolo 3, infine, viene descritto l'algoritmo per il riconoscimento di S^3 dal punto di vista delle permutazioni associate al rivestimento ramificato su S^3 con cui si rappresentano le 3-varietà; quest'ultima parte costituisce il contributo originale di questo lavoro.

Capitolo 1

3-varietà

1.1 Preliminari

Siano \mathbb{Z} , \mathbb{R} e \mathbb{C} rispettivamente l'anello degli interi, il campo reale ed il campo complesso; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ rappresenta il sottoinsieme dei numeri reali non negativi, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}$ lo spazio euclideo delle n -ple reali ordinate e $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in \mathbb{R}_+\}$ il semispazio di \mathbb{R}^n contenente i punti con prima coordinata non negativa.

Si indicherà con $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ la n -boccia unitaria, con $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ la $(n-1)$ -sfera unitaria e con $I = [0, 1]$ l'intervallo unitario in \mathbb{R} ; la generica n -boccia centrata nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ e di raggio $\varepsilon > 0$ sarà rappresentata col simbolo $B^n(x, \varepsilon)$.

1.1.1 Richiami di topologia generale

Sia X un insieme qualsiasi di elementi; si dice *topologia* su X una famiglia \mathcal{T} di sottoinsiemi di X chiusa rispetto alle operazioni di unione numerabile ed intersezione finita e contenente i sottoinsiemi impropri \emptyset e X . I sottoinsiemi $A \in \mathcal{T}$ sono detti *aperti*, mentre i loro complementari sono detti *chiusi*. La coppia (X, \mathcal{T}) prende il nome di *spazio topologico*. Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) induce una topologia $\mathcal{T}|_U$ in ogni suo sottospazio $U \subset X$ in questo modo:

$$A \in \mathcal{T}|_U \Leftrightarrow \exists A' \in \mathcal{T} : A = A' \cap U.$$

Spesso può risultare conveniente descrivere una topologia assegnandone una *base*: una base per la topologia \mathcal{T} è una famiglia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ di aperti tale che ogni aperto $A \in \mathcal{T}$ può essere ottenuto come unione di aperti $\{B_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B}$, dove J è un insieme di indici. Dati uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) ed un punto $x \in X$, ogni insieme $U \subset X$ tale che esiste $A \in \mathcal{T}$ per cui $x \in A \subset U$ prende

il nome di *intorno* di x . L'insieme \mathbb{R}^n con la topologia euclidea \mathcal{E} così definita

$$A \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : B^n(x, \varepsilon) \subset A$$

è un esempio di spazio topologico; anche B^n e S^{n-1} sono spazi topologici con la topologia euclidea indotta.

Un'applicazione $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ tra due spazi topologici è detta *continua* se la controimmagine di ogni aperto di \mathcal{S} è un aperto di \mathcal{T} ; se f è anche biettiva e la sua inversa è continua allora si dice che f è un *omeomorfismo* e che i due spazi sono *omeomorfi*, o simbolicamente $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$. Un'applicazione $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ è un'*immersione* se la sua restrizione $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (f(X), \mathcal{S}|_{f(X)})$ è un'omeomorfismo.

Dato un insieme X , si dice *ricoprimento* di X ogni famiglia \mathcal{U} di sottoinsiemi di X la cui unione è uguale a X . Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) è *compatto* se per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ di X esiste un sottoricoprimento finito $\{U_1, U_2, \dots, U_k\} \subset \mathcal{U}$.

Uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) è *connesso* se non esistono due aperti $A, B \in \mathcal{T}$ non vuoti, disgiunti e che ricoprono X ; (X, \mathcal{T}) è *connesso per archi* se per qualunque coppia di punti $x, y \in X$ esiste un arco $\alpha : I \rightarrow X$ (applicazione continua ed iniettiva) tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Ogni spazio topologico connesso per archi è anche connesso, ma non vale il viceversa.

Gli spazi topologici \mathbb{R}^n , B^n e S^{n-1} sono tutti connessi (e connessi per archi); invece solo la n -boccia e la $(n-1)$ -sfera sono compatte.

Al fine di alleggerire la notazione, d'ora in avanti si indicheranno gli spazi topologici solamente mediante il nome dell'insieme, trascurando di specificare la topologia definita sull'insieme stesso; quindi ogni qual volta si dovrà far riferimento ad uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) , si scriverà semplicemente X sottintendendo la topologia \mathcal{T} .

Dati gli spazi topologici X e Y , si definisce *omotopia* da X a Y un'applicazione continua $H : X \times I \rightarrow Y$; ciascuna delle applicazioni $h_t : X \rightarrow Y$, $t \in I$, definita da $h_t(x) = H(x, t)$ è continua. Due applicazioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ si dicono *omotope*, e si scrive $f \simeq g$, se esiste un'omotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ tale che $h_0 = f$ e $h_1 = g$; uno spazio topologico X è *contraibile* se l'identità su X è omotopa all'applicazione costante. Due spazi topologici X e Y sono *omotopicamente equivalenti*, $X \simeq Y$, se esistono due applicazioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ siano omotope rispettivamente all'identità su Y ed a quella su X . È immediato osservare che \mathbb{R}^n è contraibile ovvero omotopicamente equivalente ad un punto; lo stesso si può dire per B^n , ma non per S^{n-1} .

Un'omotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ è detta *isotopia* se per ogni $t \in I$ l'applicazione h_t è un'immersione.

Si definisce *retrazione* di uno spazio topologico X su un suo sottospazio Y un'applicazione continua $r : X \rightarrow Y$ tale che la sua restrizione su Y coincide con l'identità, ovvero $r \circ i = id_Y$, dove i è l'inclusione $i : Y \hookrightarrow X$. Si dice che X si *deforma* su Y , e si scrive $X \searrow Y$, se esiste una retrazione $r : X \rightarrow Y$ tale che $i \circ r \simeq_Y id_X$, dove \simeq_Y rappresenta un'omotopia che coincide con l'identità su Y . È chiaro che

$$X \searrow Y \Rightarrow X \simeq Y.$$

Presi due spazi topologici X e Y , si definisce la loro *unione disgiunta* $X \sqcup Y$ come l'unione degli insiemi di coppie ordinate $X' = \{(x, X) : x \in X\} \cong X$ e $Y' = \{(y, Y) : y \in Y\} \cong Y$; nel caso in cui i due spazi siano disgiunti, essa coincide, a meno di omeomorfismi, con $X \cup Y$. La *topologia unione* su $X \sqcup Y$ ha per aperti l'unione disgiunta degli aperti di X e di Y .

Dati uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) ed una relazione di equivalenza \sim su di esso, si indica con X/\sim l'insieme delle classi di equivalenza. A partire dalla proiezione $p : X \rightarrow X/\sim$ definita in maniera naturale come l'applicazione che manda ciascun elemento $x \in X$ nella propria classe di equivalenza, è possibile costruire su X/\sim una topologia \mathcal{T}/\sim , detta *topologia quoziente*, in questo modo:

$$A \in \mathcal{T}/\sim \Leftrightarrow p^{-1}(A) \in \mathcal{T};$$

si osservi che in questo modo la proiezione diventa un'applicazione continua.

Siano X e Y spazi topologici, $Z \subset X$ un sottospazio e $f : Z \rightarrow Y$ un'applicazione continua. Si consideri su $X \sqcup Y$ la relazione d'equivalenza $z \sim f(z)$, dove $z \in Z$ e $f(z) \in Y$; l'insieme $X \sqcup Y/\sim$ viene rappresentato col simbolo $X \sqcup_f Y$. Questa operazione prende il nome di *incollamento*; più precisamente si dice che lo spazio X è stato incollato sullo spazio Y lungo l'applicazione f ; se f è un'immersione, per cui $Z \subset X$ è omeomorfo a $f(Z) \subset Y$, si dice che i due spazi sono stati incollati insieme identificando Z e $f(Z)$ mediante f .

1.1.2 Poliedri e complessi

Siano U e V sottoinsiemi di \mathbb{R}^n ; si definisce *congiunzione* di U e V l'insieme $UV = \{\lambda x + \mu y : x \in U; y \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1\}$; nel caso in cui si abbia $U = \{x\}$ e $V = \{y\}$, la congiunzione $UV = \{x\}\{y\}$, che si abbrevierà con xy , rappresenta il *segmento* di estremi x, y in \mathbb{R}^n ; un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^n$ è *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in U$ il segmento xy è tutto contenuto in U . Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $U \subset \mathbb{R}^n$; la congiunzione xU si dice *cono* di vertice x e base U se ogni punto può essere espresso univocamente come $\lambda x + \mu y$ con $y \in U$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$.

Assegnati i punti $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, si definisce *poliedro convesso* $P \subset \mathbb{R}^n$ di vertici x_0, x_1, \dots, x_k il più piccolo sottospazio convesso contenente tali i punti; x_0, x_1, \dots, x_k sono *indipendenti* se non esiste alcun piano $(k-1)$ -dimensionale che li contiene tutti. Un poliedro convesso con $k+1$ vertici indipendenti si dice *simpleso* k -dimensionale; esempi di semplici sono il punto, il segmento, il triangolo ed il tetraedro, rispettivamente di dimensione 0, 1, 2 e 3. Ogni sottoinsieme dei vertici di un simpleso definisce ancora un simpleso detto *faccia*. Un *poliedro* in \mathbb{R}^n è unione finita di poliedri convessi; ogni poliedro può essere suddiviso in semplici in modo che ogni coppia di semplici sia disgiunta oppure abbia una sola faccia in comune; tale suddivisione è detta *triangolazione* del poliedro ed un poliedro P con una determinata triangolazione Λ è detto *complesso simpliciale* (P, Λ) .

Se v è un vertice di un complesso simpliciale (P, Λ) , l'unione dei semplici di Λ che hanno v come vertice prende il nome di *star* di v e si rappresenta con $\text{St}(v, \Lambda)$; l'unione delle facce dei semplici di $\text{St}(v, \Lambda)$ che non contengono il vertice v si dice invece *link* di v e si denota con $\text{Lk}(v, \Lambda)$. Si osservi che $\text{St}(v, \Lambda)$ coincide con il cono $v\text{Lk}(v, \Lambda)$.

È chiaro che un poliedro può ammettere più triangolazioni; il modo più naturale per passare da una triangolazione ad un'altra è quello di procedere per *suddivisioni*; un complesso simpliciale (P, Λ') è una suddivisione del complesso simpliciale (P, Λ) se ogni simpleso di Λ' è interamente contenuto in un simpleso di Λ . Ad esempio, la suddivisione a stella di un complesso (P, Λ) rispetto ad un suo punto x è ottenuta in questo modo: i semplici che non contengono x non vengono modificati, mentre ogni simpleso σ contenente il punto viene diviso in coni aventi per vertice x e per base quelle facce del simpleso σ che non contengono il punto x ; se tale suddivisione viene praticata prendendo centri su ogni simpleso, procedendo da quelli di dimensione maggiore a quelli di dimensione minore, si ottiene una suddivisione *derivata* $(P, \delta\Lambda)$ del complesso (P, Λ) . Una suddivisione derivata praticata scegliendo come centri i baricentri dei semplici viene detta *baricentrica* e la si indica con $(P, \beta\Lambda)$. Si può provare che due triangolazioni qualsiasi di uno stesso poliedro ammettono una suddivisione comune ottenibile mediante successive suddivisioni a stella.

Un'applicazione $f : K \rightarrow L$ tra complessi simpliciali è detta *simpliciale* se l'immagine $f(\sigma)$ di ogni simpleso $\sigma \in K$ è un simpleso di L e se la restrizione $f|_\sigma$ è lineare; un'applicazione $g : P \rightarrow Q$ tra poliedri è detta *lineare a tratti*, o più brevemente *p.l.* (*piecewise linear*), se esistono opportune triangolazioni su P e su Q che rendono g simpliciale.

Si definisce *k-cella* ogni spazio topologico C^k per cui esiste un omeomorfismo $h : B^k \rightarrow C^k$; per bordo della k -cella si intende l'insieme $\partial C^k = h(S^{k-1})$; si osservi che il bordo non dipende dal particolare omeomorfismo h scelto.

Uno spazio topologico X è un *complesso cellulare* di dimensione n se ha una struttura cellulare ovvero una successione di sottospazi

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots \subset X_n = X$$

con queste proprietà:

- $X_0 = C_1^0 \sqcup C_2^0 \sqcup \dots \sqcup C_{m_0}^0$, cioè X_0 è unione disgiunta di 0-celle; si richiede che $m_0 \geq 1$;
- $X_k = X_{k-1} \sqcup_{f_1^k \sqcup f_2^k \sqcup \dots \sqcup f_{m_k}^k} (C_1^k \sqcup C_2^k \sqcup \dots \sqcup C_{m_k}^k)$, con $0 < k < n$; X_k è costruito a partire da X_{k-1} incollando le k -celle C_i^k mediante le funzioni di incollamento $f_i^k : \partial C_i^k \rightarrow X_{k-1}$; è ammessa l'evenienza che m_k sia nullo ($m_k \geq 0$);
- $X = X_n = X_{n-1} \sqcup_{f_1^n \sqcup f_2^n \sqcup \dots \sqcup f_{m_n}^n} (C_1^n \sqcup C_2^n \sqcup \dots \sqcup C_{m_n}^n)$, con $m_n \geq 1$.

Il sottospazio X_k della struttura cellulare prende il nome di *k-scheletro*, dove $0 \leq k \leq n$.

Ogni poliedro dotato di una triangolazione può essere interpretato come complesso cellulare: è sufficiente considerare i k -simplessi come k -celle; non è invece valido il viceversa, in quanto i poliedri hanno una struttura localmente piatta che invece i complessi cellulari possono non avere; si tornerà successivamente sul concetto di struttura.

Sia X un complesso cellulare di dimensione n ; se si indica il numero delle k -celle con $c_k(X)$, si definisce la *caratteristica di Eulero* $\chi(X)$ del complesso X come la somma $\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(X)$. La caratteristica è indipendente dalla scelta della decomposizione cellulare del complesso X .

1.1.3 Il gruppo fondamentale

Dato uno spazio topologico X , si fissi un suo generico punto $x_0 \in X$; un *cappio* in X con punto base x_0 è un'applicazione continua $\alpha : I \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Sull'insieme $\Omega_1(X, x_0)$ dei cappi su X con punto base x_0 si consideri la seguente operazione di moltiplicazione: dati $\alpha, \alpha' \in \Omega_1(X, x_0)$, il cappio $\alpha'' = \alpha \bullet \alpha' \in \Omega_1(X, x_0)$ è definito così

$$\alpha''(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha'(2t-1) & \text{se } 1/2 < t \leq 1 \end{cases} .$$

Se si indica con $\pi_1(X, x_0) = \Omega_1(X, x_0) / \simeq_{x_0}$ l'insieme delle classi di equivalenza in $\Omega_1(X, x_0)$ definite dalla relazione \simeq_{x_0}

$$\alpha \simeq_{x_0} \alpha' \Leftrightarrow \exists H : I \times I \rightarrow X, \text{ omotopia :} \\ h_0 = \alpha, h_1 = \alpha', h_t(0) = h_t(1) = x_0, \forall t \in I,$$

l'operazione di moltiplicazione risulta ben definita su questo spazio quoziente; inoltre tale operazione rende $\pi_1(X, x_0)$ un gruppo, che prende il nome di *gruppo fondamentale* dello spazio topologico X con punto base x_0 .

Se X è connesso per archi, tutti i gruppi fondamentali di X sono isomorfi indipendentemente dalla scelta del punto base.

Ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici induce un omomorfismo di gruppi $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ che fa corrispondere ad ogni classe d'omotopia di cammini con rappresentante α la classe d'omotopia avente come rappresentante il cammino $f \circ \alpha$ (sono stati omessi i punti base in virtù dell'osservazione precedente); se X e Y sono omotopicamente equivalenti, allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi.

1.1.4 Rivestimenti

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici; un aperto $V \subset Y$ si dice *ben rivestito* da f se $f^{-1}(V)$ è unione disgiunta di aperti $U \subset X$ tali che ogni restrizione $f|_U : U \rightarrow V$ è un omeomorfismo. L'applicazione f si dice un *rivestimento* se la collezione degli aperti V connessi e ben rivestiti da f è un ricoprimento di Y . Ogni fibra $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di X ; se Y è connesso, tutte le fibre hanno la stessa cardinalità.

Sia $f : X \rightarrow Y$ un rivestimento; se $\alpha : S \rightarrow Y$ è un'applicazione continua, un'applicazione continua $\tilde{\alpha} : S \rightarrow X$ tale che $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ si dice *sollevamento* di α .

Proposizione 1.1.1 (Sollevamento dei cammini). *Se $\alpha : I \rightarrow Y$ è un cammino con punto iniziale y_0 , per ogni $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ esiste un unico sollevamento $\tilde{\alpha} : I \rightarrow X$ di α con punto iniziale x_0 .*

Proposizione 1.1.2 (Sollevamento delle omotopie). *Se $H : I \times I \rightarrow Y$ è un'omotopia di cammini con $H(0, 0) = y_0$, per ogni $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ esiste un unico sollevamento $\tilde{H} : I \times I \rightarrow X$ di H tale che $\tilde{H}(0, 0) = x_0$. \tilde{H} è ancora un'omotopia di cammini.*

Si definisce un'azione destra del gruppo fondamentale $\pi_1(Y, y_0)$ sulla fibra $f^{-1}(y_0)$ ponendo

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_0) \times \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow f^{-1}(y_0) \\ (x_0, \alpha) &\mapsto x_0 \cdot \alpha = \tilde{\alpha}(1), \end{aligned}$$

dove $\tilde{\alpha}$ denota il sollevamento di α uscente da x_0 .

L'azione così definita induce un omomorfismo di gruppi

$$\omega : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \text{Aut}(f^{-1}(y_0))$$

a valori nel gruppo degli automorfismi della fibra $f^{-1}(y_0)$; se la fibra ha cardinalità h , $\text{Aut}(f^{-1}(y_0))$ coincide col gruppo delle permutazioni Σ_h . L'omomorfismo ω prende il nome di *monodromia* del rivestimento.

1.1.5 Varietà

Uno spazio topologico X è *di Hausdorff* se comunque si scelgano due punti distinti $x, y \in X$ esistono un intorno di x e un intorno di y disgiunti; inoltre si dice che X è *a base numerabile* se esiste una base numerabile \mathcal{B} che genera la topologia di X .

Uno spazio topologico M è detto *varietà topologica* di dimensione m , o più brevemente *m -varietà*, se è uno spazio di Hausdorff a base numerabile localmente euclideo; localmente euclideo significa che per ogni punto $x \in M$ esistono un aperto U contenente x ed un'immersione $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$; la coppia (U, φ) prende il nome di *carta locale*; un ricoprimento di M fatto di carte locali si dice *atlante*.

Se si ammettono anche carte locali del tipo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_+^m$, si parla allora di *varietà topologiche con bordo*; l'unione dei punti di M che ammettono carte di questo secondo tipo è detta *bordo* della varietà M ed è rappresentato con ∂M .

Data una m -varietà M con bordo, il sottospazio topologico $N \subset M$ è una *n -sottovarietà (con bordo)* di M se la coppia (M, N) è localmente omeomorfa alla coppia $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (oppure a $(\mathbb{R}_+^m, \mathbb{R}_+^n)$), cioè se per ogni punto $p \in N$ esiste un intorno U di p in M ed un omeomorfismo $\varphi : (U, U \cap N, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, 0)$ (oppure $\varphi : (U, U \cap N, p) \rightarrow (\mathbb{R}_+^m, \mathbb{R}_+^n, 0)$). Una sottovarietà $N \subset M$ si dice *propriamente immersa* se $\partial N = N \cap \partial M$; nel seguito si adotterà la convenzione di considerare come sottovarietà solamente quelle propriamente immerse.

Il bordo ∂M di una m -varietà con bordo M è una $(m - 1)$ -varietà senza bordo, ma, alla luce della precedente convenzione, non può essere considerata una sottovarietà di M . Una varietà senza bordo è detta *chiusa* se è compatta, *aperta* altrimenti.

Si definirà ora il concetto di *struttura* su una varietà. Data una m -varietà M , siano $(\varphi, U), (\psi, V)$ due carte locali tali che $U \cap V \neq \emptyset$; resta definito il cambiamento di carta $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$, ovvero un omeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^m . Fissata una famiglia \mathcal{G} di omeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^m , si dice che le due carte locali φ e ψ sono *\mathcal{G} -compatibili* se $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{G}$; un atlante massimale di carte locali \mathcal{G} -compatibili è una struttura sulla varietà M .

Una varietà topologica si dice *differenziabile*, o *liscia*, se è dotata di una struttura differenziabile; una struttura differenziabile è un atlante in cui i

cambiamenti di carta sono diffeomorfismi, cioè omeomorfismi infinitamente differenziabili con inverse infinitamente differenziabili. Una varietà differenziabile è anche *orientabile* se esiste un atlante differenziabile in cui i cambiamenti di carta sono diffeomorfismi che conservano l'orientazione di \mathbb{R}^m , ovvero tali che il determinante della loro matrice Jacobiana sia positivo in ogni punto.

Le varietà differenziabili godono di una interessante proprietà: è sempre possibile considerarle come sottovarietà di un spazio euclideo; questo è quanto enunciato dal seguente

Teorema 1.1.3 (Whitney). *Sia M una m -varietà differenziabile; allora esiste un'immersione differenziabile regolare $h : (M, \partial M) \rightarrow (\mathbb{R}_+^{2m+1}, \mathbb{R}^{2m})$, ovvero M è diffeomorfa alla sottovarietà differenziabile $h(M)$ di \mathbb{R}_+^{2m+1} .*

Una varietà *lineare a tratti*, o *p.l.*, ha invece come struttura un atlante in cui i cambiamenti di carta sono omeomorfismi p.l.; una m -varietà p.l. compatta può sempre essere triangolata in modo da poter essere pensata come un assemblaggio finito di m -simplessi con un determinato piano che descrive come incollare tra loro a due a due le facce $(m - 1)$ -dimensionali dei simplessi.

La trattazione che verrà sviluppata nei capitoli successivi sarà incentrata sullo studio delle 3-varietà p.l.; le considerazioni che verranno tratte nelle ultime Sezioni di questo Capitolo introduttivo faranno quindi espressamente riferimento a questo ambito.

È innanzitutto interessante osservare come per le dimensioni basse ($m \leq 3$) i concetti di varietà differenziabile e di varietà p.l. praticamente coincidano; più precisamente, su ogni m -varietà differenziabile è possibile introdurre una struttura p.l. e, viceversa, su ogni m -varietà p.l. è possibile introdurre una struttura differenziabile. Il seguente

Teorema 1.1.4 (Moise). *Ogni 3-varietà differenziabile compatta ammette una triangolazione finita, cioè può essere presentata come una collezione finita di tetraedri opportunamente incollati.*

consente di poter lavorare con 3-varietà p.l. sfruttandone il loro aspetto *combinatorio*, immaginandole e manipolandole tuttavia come varietà lisce, addirittura immerse in uno spazio euclideo (Teorema di immersione di Whitney).

Un modo più generale per rappresentare una varietà di dimensione qualsiasi in termini di componenti più semplici è rappresentato dal

Teorema 1.1.5 (Decomposizione cellulare). *Ogni varietà differenziabile compatta ammette una decomposizione cellulare finita.*

Questo significa che in ogni varietà sufficientemente *regolare* (liscia o p.l., per esempio) si può sempre supporre l'esistenza di una struttura cellulare. In virtù di ciò ha senso il prossimo enunciato.

Proposizione 1.1.6. *Ogni m -varietà p.l. con bordo può essere deformata su un suo $(m - 1)$ -sottocomplesso.*

1.1.6 Intorni regolari

Siano M una varietà p.l. e $N \subset M$ una sottovarietà p.l.; si scelga su M una triangolazione Λ tale che N risulti essere un sottocomplesso $(N, \Lambda|_N) \subset (M, \Lambda)$. Si definisce *intorno regolare* di N in M lo spazio

$$U(N) = \bigcup_{v \in \beta\Lambda|_N} \text{St}(v, \beta^2\Lambda)$$

ottenuto come unione degli star, relativi alla seconda suddivisione baricentrica $\beta^2\Lambda$, aventi per vertici gli 0-simplessi v della (prima) suddivisione baricentrica $\beta\Lambda$ appartenenti a N .

È chiaro che se si avesse avuto su M una triangolazione $\Lambda' \neq \Lambda$ per la quale la sottovarietà N fosse risultata ancora un sottocomplesso, l'intorno regolare $U(N)$ sarebbe stato diverso; ciononostante, tenendo conto del fatto che due qualsiasi triangolazioni ammettono una suddivisione a stella comune, esiste un'isotopia p.l. ferma su N tra i due intorni regolari. Quindi un intorno regolare può essere considerato, a meno di isotopia, indipendente dalla triangolazione presa sulla varietà.

Intuitivamente, un intorno regolare di una sottovarietà può essere immaginato come un'ispessimento della sottovarietà stessa che ne conserva fedelmente la forma.

1.1.7 Posizione generale e trasversalità

I concetti di *posizione generale* e *trasversalità* hanno approssimativamente lo stesso significato: vogliono esprimere l'assenza di *eccessive* intersezioni tra varietà, quando queste non sono dovute a considerazioni di tipo dimensionale; in particolare, la nozione di posizione generale attiene all'ambito delle varietà p.l., mentre quella di trasversalità riguarda le varietà differenziabili.

Si limiteranno le considerazioni al caso delle 3-varietà.

Data una 3-varietà p.l. (M, Λ_M) , la superficie $S \subset M$ è una 2-sottovarietà p.l. se esiste una suddivisione Λ'_M della triangolazione Λ_M tale che la sua intersezione con S induca una triangolazione Λ_S sulla superficie stessa. Analogamente si definisce una 1-sottovarietà p.l. $L \subset M$.

Si danno le seguenti definizioni.

1. La 2-sottovarietà p.l. (S, Λ_S) di (M, Λ_M) è in posizione generale in M rispetto a Λ_M se:
 - nessuno dei vertici di Λ_M è contenuto in S ;
 - ogni spigolo di Λ_M incontra S al più in un insieme finito di punti ed in ogni punto dell'intersezione *attraversa* S ;
 - ogni faccia di Λ_M incontra S al più in un insieme finito di curve disgiunte ed in ogni punto dell'intersezione *attraversa* S .

La questione più delicata è stabilire che cosa c'è dietro la nozione intuitiva di *attraversare*. Il problema sorge perché non esiste su M una struttura lineare globale, bensì solo all'interno di ogni semplice; ciascun punto p di intersezione tra S e uno spigolo $\sigma \in \Lambda_M$ appartiene al bordo di più semplici; quindi, in un intorno del punto p non esiste un'unica nozione di linearità, ma ne esiste una per ognuno di questi semplici. Allora il concetto di *attraversare* non può essere definito in termini della linearità.

Il problema non sussisterebbe se si avesse a che fare con 3-varietà differenziabili, in quanto si potrebbe allora ricorrere alla struttura lineare indotta dalla struttura differenziabile e tradurre *attraversare* con *essere trasversale*; posizione generale implica trasversalità, in questo caso.

Ricordando quanto affermato nella Sezione 1.1.5, sulle 3-varietà p.l. esiste una struttura differenziabile che coincide con la struttura p.l., per cui il problema effettivamente scompare. Si descriverà più avanti in questa Sezione il concetto di trasversalità per varietà differenziabili.

Osservazione. Un approccio più topologico al problema della trasversalità nella definizione di posizione generale, senza cioè ricorrere alla differenziabilità, è questo:

- fissato un punto p di intersezione tra lo spigolo σ di Λ_M e S , si richiede l'esistenza di un intorno aperto basico B di p in M e di un omeomorfismo (p.l.) tra le terne $(B, S \cap B, \sigma \cap B)$ e $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$;
- fissata una curva γ di intersezione tra la faccia Σ di Λ_M e S , si richiede per ogni punto $p \in \gamma$ l'esistenza di un intorno basico B di p in M e di un omeomorfismo (p.l.) tra le terne $(B, S \cap B, \Sigma \cap B)$ e $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{R}^2)$.

Si danno di seguito le definizioni di posizione generale per una curva L sia in M che in S e di posizione generale tra superfici $S_1, S_2 \subset M$; in ogni caso valgono le considerazioni precedenti.

2. La 1-sottovarietà p.l. (L, Λ_L) di (M, Λ_M) è in posizione generale in M rispetto a Λ_M se:
 - nessuno dei vertici di Λ_M è contenuto in L ;
 - nessuno spigolo di Λ_M incontra L ;
 - ogni faccia di Λ_M incontra L al più in un insieme finito di punti ed in ogni punto dell'intersezione è trasversale a L .
3. La 1-sottovarietà p.l. (L, Λ_L) di (S, Λ_S) è in posizione generale in S rispetto a Λ_S se:
 - nessuno dei vertici di Λ_S è contenuto in L ;
 - ogni spigolo di Λ_S incontra L al più in un insieme finito di punti ed in ogni punto dell'intersezione è trasversale a L .
4. Le 2-sottovarietà p.l. $(S_1, \Lambda_{S_1}), (S_2, \Lambda_{S_2})$ di (M, Λ_M) sono in posizione generale tra loro se:
 - l'intersezione $S_1 \cap S_2$ è un insieme finito di curve p.l. disgiunte che sono in posizione generale sia rispetto a S_1 che a S_2 ;
 - nelle curve di intersezione le superfici S_1 e S_2 sono trasversali.

Osservazione. È sempre possibile deformare ogni k -sottovarietà di M , con $k = 1, 2$, mediante piccoli spostamenti in M in modo che sia in posizione generale rispetto alla triangolazione Λ_M e ad ogni altra sottovarietà.

Nel caso differenziabile, si deve innanzitutto ricordare che ogni applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$ tra varietà differenziabili induce un'applicazione $Tf : TM \rightarrow TN$ tra i fibrati tangenti, tale che la sua restrizione $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ sulla fibra relativa al punto x sia lineare.

L'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$ si dice trasversale ad una sottovarietà $L \subset N$ se per ogni punto $x \in f^{-1}(L)$ gli spazi lineari $T_x f(T_x M)$ e $T_{f(x)} L$ generano lo spazio $T_{f(x)} N$; la sottovarietà $f(M) \subset N$ si dice trasversale alla sottovarietà L .

1.1.8 Somme connesse

Siano M_1 e M_2 due 3-varietà. Si definisce *somma connessa* di M_1 e M_2 la 3-varietà $M = M_1 \# M_2$ che si ottiene rimuovendo da M_1 e M_2 rispettivamente l'interno delle 3-celle $B_1 \subset M_1$ e $B_2 \subset M_2$ e reincollando $M_1 \setminus \text{Int } B_1$ e $M_2 \setminus \text{Int } B_2$ lungo un omeomorfismo $h : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$.

Posta in questo modo, la definizione dipende, in generale, dalla scelta dell'omeomorfismo h lungo cui sono incollati i bordi delle 3-celle. Dal punto di vista dell'isotopia, ci sono esattamente due modi di realizzare questo incollamento, che potrebbero in alcuni casi generare varietà non omeomorfe.

Un modo per eliminare questa ambiguità è, nel caso delle 3-varietà orientabili, considerare un omeomorfismo h che conserva l'orientazione; in questo caso quindi la somma connessa risulta univocamente definita. Inoltre l'operazione è commutativa, non dipendendo dall'ordine delle varietà da sommare, ed associativa; la 3-sfera S^3 è l'elemento neutro, cioè $M \# S^3 \cong S^3 \# M \cong M$, mentre $M \# B^3 \cong B^3 \# M \cong M \setminus B$, dove B è una 3-cella.

Analogamente si estende la definizione di somma connessa al caso delle 2-varietà, con l'unica differenza che in questo ambito l'operazione è ben definita anche nel caso non orientabile.

Un'operazione simile è quella di *somma connessa sul bordo*; prese due 3-varietà M_1 e M_2 con bordo, si definisce somma connessa sul bordo di M_1 e M_2 la 3-varietà $M = M_1 \#_{\partial} M_2$ che si ottiene incollando M_1 e M_2 mediante l'omeomorfismo $k : B_1 \rightarrow B_2$ tra le due 2-celle $B_1 \subset \partial M_1$ e $B_2 \subset \partial M_2$. Anche questa operazione è commutativa ed associativa; il suo elemento neutro è la boccia B^3 , cioè $M \#_{\partial} B^3 \cong B^3 \#_{\partial} M \cong M$.

Una 3-varietà M si dice *prima* se ogni decomposizione di M nella somma connessa $M = M_1 \# M_2$ implica che almeno una tra M_1 e M_2 sia una 3-sfera.

Una 3-varietà M si dice *irriducibile* se ogni 2-sfera $S \subset \text{Int } M$ delimita una 3-cella in M . È chiaro che ogni 3-varietà irriducibile è anche prima: infatti, se $M = M_1 \# M_2$, allora esiste una 2-sfera $S \subset \text{Int } M$ che coincide con i bordi delle 3-celle B_1 e B_2 rimosse da M_1 e M_2 , rispettivamente, per effettuare la somma connessa; poiché S delimita una 3-cella in M , allora almeno una tra $M_1 \setminus B_1$ e $M_2 \setminus B_2$ è una 3-cella, ovvero almeno una tra le 3-varietà M_1 e M_2 è una 3-sfera.

Nella rappresentazione delle 3-varietà esiste un'importante proprietà di fattorizzazione:

Teorema 1.1.7. *Ogni 3-varietà compatta può essere espressa come somma connessa di un numero finito di fattori primi.*

In virtù di questo Teorema, è evidente che un primo passo nella classifica-

zione delle 3-varietà potrebbe essere proprio quello di considerare solamente 3-varietà prime (oppure irriducibili).

1.1.9 Superfici immerse in 3-varietà

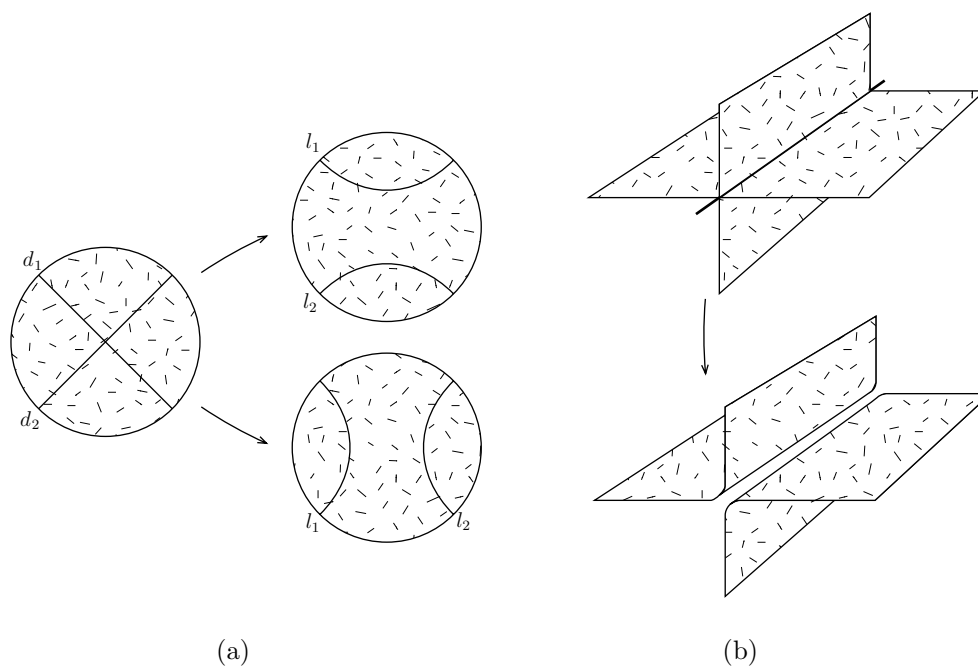
Sia S una 2-varietà (possibilmente non connessa) e M una 3-varietà orientabile; sia $f : S \rightarrow M$ un'applicazione continua tale che l'immagine $\hat{S} = f(S)$ sia in posizione generale in M e $f^{-1}(\partial M) = \partial S$; \hat{S} è una *superficie singolare* propriamente immersa.

Lemma 1.1.8. *Ogni punto singolare di una superficie singolare è doppio oppure triplo oppure un punto di ramificazione.*

Nello studio delle superfici normali contenute in una 3-varietà (Sezione 1.4), si presenterà il caso di superfici singolari le cui singolarità sono rappresentate esclusivamente da curve doppie; si descrivono ora due operazioni utili per eliminare questo tipo di singolarità.

1. (*Switch surgery*) Sia γ una di queste curve doppie e sia $U(\gamma)$ un suo intorno in M . La coppia $(U(\gamma), U(\gamma) \cap \hat{S})$ può essere identificata con la coppia $(B^2 \times S^1, (d_1 \cup d_2) \times S^1)$, se γ è una curva chiusa, o con $(B^2 \times I, (d_1 \cup d_2) \times I)$, se γ è un arco aperto; d_1 e d_2 sono due diametri del disco B^2 . Gli estremi di questi diametri possono essere uniti all'interno del disco, mediante archi l_1 e l_2 che non si intersecano, in due modi diversi, come mostrato in Figura 1.1(a). Scelto uno dei due, l'operazione di chirurgia lungo γ consiste nel ritagliare dalla superficie \hat{S} la sua intersezione con l'intorno $U(\gamma)$ ed incollare al posto di $(d_1 \cup d_2) \times S^1$ (oppure $(d_1 \cup d_2) \times I$) il prodotto diretto $(l_1 \cup l_2) \times S^1$ (oppure $(l_1 \cup l_2) \times I$). Il risultato è una nuova superficie singolare che, sebbene non sia equivalente alla precedente, contiene un numero inferiore di curve doppie (Figura 1.1(b)).
2. (*Parallel surgery*) Se la curva doppia γ è tale che tagliando lungo di essa la superficie singolare \hat{S} si ottengono più componenti, una delle quali, sia E , non contiene punti singolari, allora si aggiungono due copie di E , una per ogni lato di E , e si rimuove l'anello o la striscia di \hat{S} delimitata dai bordi delle due copie (Figura 1.2).

Siano D_1 e D_2 due dischi propriamente immersi nella 3-varietà orientabile M ; supponendo che i bordi ∂D_1 e ∂D_2 siano disgiunti, è sempre possibile costruire una coppia di dischi $D'_1, D'_2 \subset M$ tale che $\partial D'_1 = \partial D_1$, $\partial D'_2 = \partial D_2$ e $D'_2 \cap D'_1 = \emptyset$. Infatti, mediante operazioni di *taglia ed incolla* (*parallel*

Figura 1.1: *Switch surgery*.

surgery) applicate alle curve di intersezione *più interne* in D_1 si possono eliminare via via tutte le intersezioni tra i dischi D_1 e D_2 , ottenendo due nuovi dischi D'_1 e D'_2 con le proprietà richieste; si veda la dimostrazione del Lemma 2.5.2 per una più dettagliata descrizione del procedimento.

La generalizzazione di questa operazione al caso delle intersezioni tra una superficie arbitraria S ed un disco D non è sempre possibile; infatti, ripetendo l'argomento delle *curve più interne* in D , sorgono dei problemi quando una di queste curve non delimita un disco sulla superficie S ; l'operazione di *taglia ed incolla* genera una superficie S' che non è equivalente a S . Le superfici per cui questo non accade sono dette *incomprimibili*.

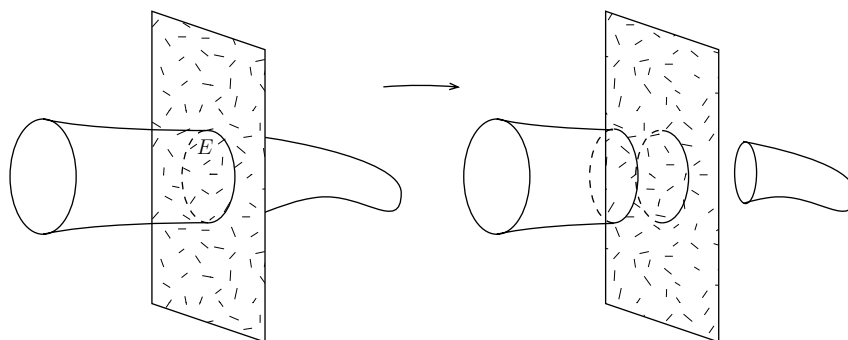
Una superficie S propriamente immersa in M è detta *comprimibile* se:

- esiste un disco $D \subset \text{Int } M$, con $D \cap S = \partial D$, tale che ∂D non delimita un disco su S ;
- S (possibilmente con una porzione di ∂M) delimita una 3-cella.

Vale il seguente

Lemma 1.1.9. *La superficie S propriamente immersa nella 3-varietà orientabile M è incomprimibile se e solo se*

- *non delimita (possibilmente con ∂M) una 3-cella;*

Figura 1.2: *Parallel surgery.*

- $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ è iniettiva.

La dimostrazione della parte sufficiente presuppone il

Lemma 1.1.10 (Dehn). *Sia M una 3-varietà e $f : B^2 \rightarrow M$ un'applicazione continua tale che esista un intorno A di ∂B^2 in B^2 per cui $f|_A$ sia un'immersione e $f^{-1}(f(A)) = A$. Allora $f|_{\partial B^2}$ si estende ad un'immersione $g : B^2 \rightarrow M$.*

Le intersezioni tra un disco D ed una superficie incompressibile S possono essere sempre eliminate sostituendo S con una superficie S' topologicamente equivalente. È possibile realizzare ciò mediante un'isotopia ferma sul bordo che trasforma S in S' ? In generale la risposta è negativa; è positiva, però, se si assume che la 3-varietà sia anche irriducibile, in quanto in tal caso i due dischi delimitati su D e su S dalla curva di intersezione sono bordo di una 3-cella attraverso la quale è possibile far scorrere isotopicamente i dischi in modo da eliminare la loro intersezione.

1.2 Sfere e bocce

Si descrivono alcune proprietà della n -sfera S^n e della n -boccia B^n , con particolare attenzione alle dimensioni basse $n \leq 3$.

Teorema 1.2.1 (Jordan). *Siano M una m -varietà e $S \subset M$ una $(m-1)$ -sottovarietà omeomorfa alla sfera S^{m-1} ; allora S sconnette M in due componenti connesse, ovvero $M \setminus S = E(S) \cup I(S)$ con $E(S) \cap I(S) = \emptyset$.*

In particolare, nel caso p.l. vale il seguente

Teorema 1.2.2 (Alexander). *Siano M una 3-sfera e $S \subset M$ una 2-sfera p.l.; allora S sconnette M esattamente in due 3-celle.*

Questo non accade in generale; infatti eliminando l'ipotesi che la 2-sfera S sia p.l., il Teorema di Alexander non è più valido, mentre continua a valere quello di Jordan: S sconnette ancora M in due componenti ma non è detto che queste siano delle 3-celle.

Il caso $m = 2$ costituisce un'eccezione, in quanto una proprietà analoga al Teorema di Alexander sussiste anche nel caso generale (non p.l.). Vale infatti il seguente

Teorema 1.2.3 (Schönflies). *Sia C una 1-sfera immersa in \mathbb{R}^2 ; allora esiste un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $h(S^1) = C$.*

Il Teorema di Alexander può essere generalizzato dal seguente

Teorema 1.2.4 (Schönflies (p.l.)). *Sia S una $(m - 1)$ -sfera p.l. immersa in \mathbb{R}^m ; allora esiste un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $h(S^{m-1}) = S$.*

Nel prosieguo verranno utilizzate alcune nozioni relative ai gruppi di omologia e coomologia; a tal proposito si faccia riferimento ad un testo di topologia algebrica (Massey [11], per esempio). In particolare ci si servirà esplicitamente delle successioni di Mayer-Vietoris e del Teorema del coefficiente universale.

Si dà inoltre la seguente

Proposizione 1.2.5. *Sia M una m -varietà liscia, compatta e connessa; allora il suo m -esimo gruppo d'omologia è libero e*

$$H_m(M, \partial M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } M \text{ è orientabile,} \\ 0 & \text{se } M \text{ non è orientabile.} \end{cases}$$

Definizioni 1.2.6. *Si dice sfera d'omologia ogni 3-varietà chiusa avente gli stessi gruppi d'omologia della sfera S^3 .*

Si dice boccia d'omologia ogni 3-varietà compatta con bordo avente gli stessi gruppi d'omologia della boccia B^3 .

Proposizione 1.2.7. *Una 3-varietà compatta e connessa M è una boccia d'omologia se e solo se $\partial M \cong S^2$ e $H_1(M) \cong 0$.*

Dimostrazione. È immediato vedere che la condizione è necessaria. Per quanto riguarda la sufficienza bisogna provare che tutti i gruppi d'omologia di M sono isomorfi a quelli della boccia B^3 ; dalla connessione di M si deduce subito che $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$.

Si consideri la seguente successione esatta per la coppia $(M, \partial M)$:

$$H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M) \rightarrow H_1(M, \partial M) \rightarrow \tilde{H}_0(\partial M);$$

poiché $\tilde{H}_0(\partial M) \cong \tilde{H}_0(S^2) \cong 0$ e $H_1(\partial M) \cong H_1(S^2) \cong 0$, allora, per l'esattezza della successione, si ha anche $H_1(M, \partial M) \cong H_1(M) \cong 0$; dalla dualità di Poincaré, risulta che $H^2(M) \cong H_1(M, \partial M) \cong 0$. Si utilizzi ora il Teorema del coefficiente universale per scrivere

$$H^2(M) \cong F_2(M) \oplus T_1(M),$$

dove $F_2(M)$ e $T_1(M)$ sono rispettivamente la parte libera di $H_2(M)$ e la torsione di $H_1(M)$; chiaramente $T_1(M) < H_1(M)$ è il gruppo banale, per cui $F_2(M) \cong 0$, ovvero la parte libera di $H_2(M)$ non ha generatori. Per la Proposizione 1.1.6, M può essere deformato su un suo sottocomplesso K di dimensione 2; questo implica che $H_2(M) \cong H_2(K)$ e quest'ultimo è libero essendo il gruppo d'omologia di indice pari alla dimensione della varietà K . Allora anche il secondo gruppo d'omologia di M è libero e quindi non può che essere banale. Infine, $H_3(M)$ è banale in virtù proprio del fatto che $H_3(M) \cong H_3(K) \cong 0$. \square

1.3 Decomposizioni a manici

Definizione 1.3.1. *Un p -manico $H_p^{(m)}$ su una m -varietà M è una coppia $(H_p^{(m)}, h)$, dove $H_p^{(m)} \cong B^m \cong B^p \times B^{m-p}$ è una m -cella e $h : \partial B^p \times B^{m-p} \rightarrow \partial M$ è una applicazione di incollamento.*

$\partial B^p \times \{0\}$ viene detta sfera di incollamento, mentre $\{0\} \times \partial B^{m-p}$ viene detta sfera di costruzione.

Teorema 1.3.2 (Decomposizione a manici). *Ogni varietà differenziabile (o p.l.) compatta ammette una decomposizione a manici finita, ovvero può essere ottenuta a partire da una collezione di 0-manici incollando successivamente manici di indice via via maggiore.*

Dimostrazione. Nel caso p.l. si ragiona così: sia Λ una triangolazione di M e si consideri la sua seconda suddivisione baricentrica $\beta^2\Lambda$; gli star dei vertici di Λ rispetto alla suddivisione $\beta^2\Lambda$ costituiscono gli 0-manici, gli star dei baricentri degli 1-simplessi di Λ rispetto a $\beta^2\Lambda$ formano gli 1-manici, gli star dei baricentri dei 2-simplessi di Λ rispetto a $\beta^2\Lambda$ formano i 2-manici e così via. \square

In dimensione tre ha senso parlare solamente degli 0-manici, 1-manici, 2-manici e 3-manici rappresentati nella Figura 1.3.

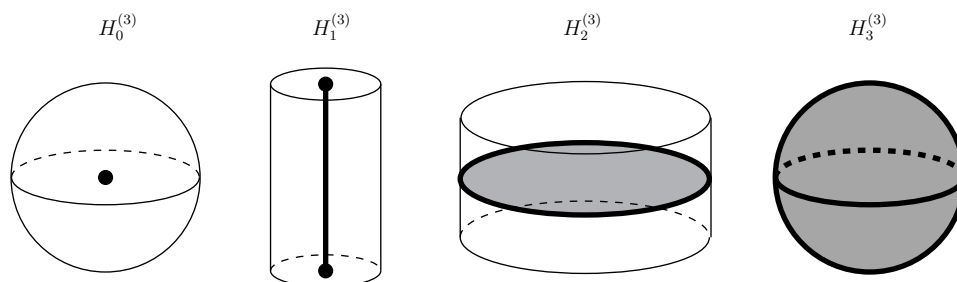


Figura 1.3: Manici in dimensione tre.

Lemma 1.3.3. *Ad ogni 3-varietà con bordo si può associare una decomposizione a manici che non contiene 3-manici.*

Definizione 1.3.4. *Una 3-varietà orientabile ottenuta incollando g 1-manici disgiunti su un unico 0-manico prende il nome di corpo di manici di genere g . Il bordo di un corpo di manici è una superficie compatta, connessa ed orientabile di genere g .*

Teorema 1.3.5. *Due corpi di manici sono omeomorfi se e solo se hanno lo stesso genere.*

Definizione 1.3.6. *Sia S_g una superficie chiusa ed orientabile di genere g . Una 3-varietà ottenuta incollando successivamente dei 2-manici e dei 3-manici (nell'ordine) alla 3-varietà $S_g \times I$ lungo $S_g \times \{1\}$ è un corpo di manici cavo di genere g . La superficie $S_g \times \{0\}$ viene detta bordo libero.*

1.3.1 Spezzamenti e diagrammi di Heegaard

Definizione 1.3.7. *Uno spezzamento di Heegaard di una 3-varietà M è una coppia (M_g, h) in cui M_g è un corpo di manici di genere g e $h : \partial M_g \rightarrow \partial M_g$ è un omeomorfismo tale che $M = M_g \sqcup_h M_g$; g viene detto il genere dello spezzamento.*

Teorema 1.3.8. *Ogni 3-varietà chiusa ed orientabile ha un spezzamento di Heegaard.*

Dimostrazione. Il Teorema è una conseguenza dell'esistenza di una decomposizione a manici (Teorema 1.3.2). L'unione degli 0-manici e degli 1-manici costituisce un corpo di manici; topologicamente, anche l'unione dei 3-manici e dei 2-manici costituisce un corpo di manici, in quanto può essere interpretata come unione, rispettivamente, di 0-manici e di 1-manici. L'omeomorfismo di incollamento si ricava dalle applicazioni di incollamento dei 2-manici e dei 3-manici sull'unione degli 0-manici e degli 1-manici. \square

Definizione 1.3.9. *Uno spezzamento di Heegaard generalizzato di una 3-varietà M è una terna (M_g, M'_g, h) dove M_g, M'_g sono corpi di manici cavi di genere g e h è un omeomorfismo tra i bordi liberi di M_g e M'_g tale che $M = M_g \sqcup_h M'_g$.*

Talvolta si denota uno spezzamento di Heegaard (generalizzato) mediante una coppia (M, S_g) , dove M è una 3-varietà e $S_g \subset M$ è una superficie di genere g che delimita due corpi di manici (cavi) in M .

Definizioni 1.3.10. *Sia S_g una superficie chiusa, connessa ed orientabile di genere g ; l'insieme $v = \{v_1, v_2, \dots, v_g\}$ di curve chiuse su S_g è un sistema completo se le curve sono a due a due disgiunte e se la loro unione non sconnette S_g .*

Un diagramma di Heegaard è una terna $(S_g; v, w)$ composta da una superficie S_g chiusa, connessa ed orientabile e da due sistemi completi v, w di curve su S_g .

Per diagramma di Heegaard generalizzato si intende ancora una volta una terna $(S_g; v, w)$ in cui però i sistemi di curve v, w su S_g non sono necessariamente completi; si richiede solamente che le curve di v siano a due a due disgiunte, e così anche le curve di w .

A partire da un diagramma di Heegaard $(S_g; v, w)$ si può costruire una 3-varietà M attaccando a $S_g \times I$ dei 2-manici in questo modo: sul bordo $S_g \times \{0\}$ si incollano lungo le curve di v , mentre sul bordo $S_g \times \{1\}$ si incollano lungo le curve di w ; quindi si eliminano le eventuali 2-sfere sul bordo riempiendole con delle 3-celle.

Viceversa, ad ogni spezzamento di Heegaard (M_g, h) di una 3-varietà chiusa M si può associare un diagramma di Heegaard prendendo come superficie il bordo ∂M_g e come sistemi completi di curve v e w su ∂M_g , rispettivamente, le sfere di costruzione degli 1-manici e le sfere di incollamento dei 2-manici.

1.4 Superfici normali

Sia M una 3-varietà compatta con bordo e sia ρ una sua decomposizione a manici; come già osservato (Lemma 1.3.3), è possibile scegliere ρ in modo che non abbia 3-manici.

Si premette la seguente terminologia: l'intersezione degli 0-manici con gli 1-manici è costituita da un'unione di dischi detti *isole*; ogni componente connessa dell'intersezione tra 0-manici e 2-manici è detta *ponte*; si chiamano infine *laghi* le componenti connesse sul bordo degli 0-manici del complementare dell'unione delle isole e dei ponti.

Definizione 1.4.1. *Sia k un numero intero positivo. Una superficie chiusa $F \subset M$ è detta k -normale rispetto alla decomposizione a manici ρ se:*

1. *l'intersezione di F con ciascun 2-manico $B^2 \times I$ può essere rappresentata come $B^2 \times K$, dove K è un insieme finito di punti in I ;*
2. *l'intersezione di F con ciascun 1-manico $I \times B^2$ può essere rappresentata come $I \times L$, dove L è un insieme finito di archi semplici disgiunti propriamente immersi in B^2 ;*
3. *nessuno degli insiemi L contiene un arco l i cui estremi siano contenuti nella stessa componente connessa dell'intersezione di un'isola con i ponti; un arco l siffatto è detto ritorno;*
4. *l'intersezione di F con ciascun 0-manico è unione finita di dischi, detti elementari;*
5. *l'intersezione di ogni disco elementare con ciascun ponte ha al più k componenti.*

Osservazione. Nella definizione di superficie k -normale è insita una nozione di trasversalità rispetto alla decomposizione a manici; in particolare, ogni superficie k -normale è in posizione generale rispetto ai bordi di tutti i manici della decomposizione a manici ρ .

Definizione 1.4.2. *Due dischi elementari D_1 e D_2 in uno stesso 0-manico della decomposizione a manici ρ si dicono equivalenti se esiste un'isotopia $h : M \times I \rightarrow M$ tale che h_t conservi la decomposizione a manici e h_1 porti D_1 su D_2 .*

In quanto seguirà, F indicherà una superficie 2-normale rispetto alla decomposizione a manici ρ . È chiaro che ogni 0-manico di ρ può contenere solo un numero finito di dischi elementari non equivalenti, in quanto sia il numero dei ponti che quello delle intersezioni di ciascun disco con un ponte sono limitati.

Siano E_1, E_2, \dots, E_n dischi elementari rappresentanti ciascuno una delle n classi di equivalenza relative a tutti gli 0-manici di ρ . Si osservi preliminarmente che, essendo F una superficie 2-normale, la sua forma globale è, a meno di isotopie di M , univocamente determinata dalla sua forma all'interno degli 0-manici di ρ ; infatti, sia negli 1-manici che nei 2-manici la superficie F presenta, per la 1. e la 2. della Definizione 1.4.1, una struttura prodotto caratterizzata completamente dalle intersezioni di F con ponti ed isole, ovvero dai bordi dei dischi elementari. Alla luce di ciò, è ragionevole rappresentare la

superficie F mediante il vettore di interi non negativi $x(F) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ in cui la coordinata x^i esprime il numero di dischi della classe di E_i presenti in F . È possibile rappresentare in questo modo ogni superficie 2-normale ed i numeri x^i possono essere considerati come sue *coordinate*; sulla traccia della Definizione 1.4.2, due superfici 2-normali F_1 e F_2 si dicono *equivalenti* se esiste un'isotopia $h : M \times I \rightarrow M$ che conservi la decomposizione a manici e che porti F_1 su F_2 , ovvero se $x(F_1) = x(F_2)$.

Ora, sebbene sia vero che ogni superficie 2-normale possa essere rappresentata mediante un vettore, non si può affermare il viceversa; in generale, esistono vettori a coordinate intere non negative che non realizzano superfici 2-normali. Affinché esista questa corrispondenza, è opportuno imporre delle condizioni sul vettore stesso; la prima richiede che, se le classi di equivalenza dei due dischi E_i e E_j , con $1 \leq i < j \leq n$, non ammettono rappresentanti disgiunti, allora almeno una delle due coordinate x^i e x^j sia nulla; questa condizione è necessaria perché dedotta dal fatto che una superficie 2-normale non abbia autointersezioni. Ogni vettore che la soddisfa è detto *ammissibile*.

La seconda condizione, anch'essa necessaria, scaturisce dalla seguente osservazione: fissato un 1-manico $I \times B^2$ della decomposizione ρ , si consideri il rettangolo $I \times l \subset I \times B^2$, in cui $\{0\} \times l$ è un arco semplice l propriamente immerso nell'isola $\{0\} \times B^2$ che ha gli estremi su due ponti distinti. Assegnato il vettore $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ si prendano x^i copie del disco elementare E_i , per ogni $i = 1, 2, \dots, n$; si vogliono contare quanti archi del tipo $\{0\} \times l$ (cioè aventi gli estremi sugli stessi ponti su cui li ha $\{0\} \times l$) ci sono complessivamente nelle intersezioni tra $\{0\} \times B^2$ ed i vari dischi E_i ; questo numero è pari alla combinazione lineare

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n,$$

dove il coefficiente c_i rappresenta il numero di archi del tipo di $l \times \{0\}$ nell'intersezione $E_i \cap \{0\} \times B^2$; si osservi che $c_i \in \{0, 1, 2\}$ per la 5. della Definizione 1.4.1. Se si ripete lo stesso procedimento per l'arco $l \times \{1\} \subset B^2 \times \{1\}$, si giunge ad un'altra combinazione lineare delle coordinate di x

$$d_1x^1 + d_2x^2 + \dots + d_nx^n,$$

dove questa volta il coefficiente d_i rappresenta il numero di archi del tipo di $l \times \{1\}$ nell'intersezione $E_i \cap \{1\} \times B^2$; poiché si vuole che il vettore x rappresenti una superficie 2-normale (in particolare per la 2. della Definizione 1.4.1), le due combinazioni esprimono lo stesso numero, ovvero x soddisfa la seguente equazione lineare omogenea a coefficienti interi

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n - d_1x^1 - d_2x^2 - \dots - d_nx^n = 0.$$

Poiché si può scrivere un'equazione di questo tipo per ogni arco l e per ogni 1-manico della decomposizione a manici ρ , si ottiene un sistema $S(\rho)$ di equazioni lineari omogenee a coefficienti interi; la seconda condizione necessaria affinché il vettore x rappresenti una superficie 2-normale è che le sue coordinate soddisfino il sistema $S(\rho)$.

In realtà, si dimostra che tali condizioni sono anche sufficienti, ovvero che vale il seguente

Lemma 1.4.3. *Sia M una 3-varietà con bordo e ρ una decomposizione a manici di M . L'insieme delle classi d'equivalenza delle superfici 2-normali rispetto a ρ in M è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle soluzioni intere non negative ammissibili del sistema $S(\rho)$.*

Dimostrazione. Resta da far vedere che ad ogni vettore x che soddisfa le due condizioni si può associare una superficie 2-normale F . Sia x una soluzione ammissibile intera non negativa di $S(\rho)$; si prendano x^i copie del disco elementare E_i , per ogni $i = 1, 2, \dots, n$; per la condizione di ammissibilità tali dischi possono essere arrangiati in modo che non si intersechino. Quindi, si consideri l'intersezione dei bordi di questi dischi con le isole; ogni componente dell'intersezione è un arco l propriamente immerso in un'isola con gli estremi su ponti diversi; in questo modo risulta verificata la 3. della Definizione 1.4.1.

Ci si soffermi, dunque, sulle isole $\{0\} \times B^2$ e $\{1\} \times B^2$ che delimitano uno stesso 1-manico $I \times B^2$; poiché il vettore x è soluzione del sistema $S(\rho)$, gli insiemi \mathcal{A}_0 e \mathcal{A}_1 degli archi che i dischi elementari individuano rispettivamente su ciascuna delle due isole devono corrispondersi in modo che, a meno isotopie che conservano la decomposizione a manici, possano essere costruite all'interno dell'1-manico superfici della forma $I \times l$, con $l \subset B^2$, tali che $\{0\} \times l \in \mathcal{A}_0$ e $\{1\} \times l \in \mathcal{A}_1$. Sempre a meno di isotopie, è possibile inserire anche dentro i 2-manici superfici che ne rispettino la struttura prodotto e che si raccordino bene con quelle superfici già costruite negli altri manici; in conclusione, anche la 1. e la 2. della Definizione 1.4.1 sono verificate. Poiché la 4. e la 5. valgono per costruzione, la superficie F , che si ottiene assemblando tutte le porzioni di superficie sin qui considerate, è 2-normale rispetto alla decomposizione a manici ρ .

La superficie F è un rappresentante della classe di equivalenza delle superfici 2-normali G aventi come coordinate il vettore $x(G) = x(F) = x$; il Lemma risulta quindi completamente mostrato. \square

1.4.1 Sistemi di equazioni lineari diofantee

Si dice *equazione diofantea* ogni equazione ad una o più variabili, con coefficienti interi, per la quale si cerca una soluzione costituita esclusivamente da

numeri interi.

Si consideri un sistema omogeneo di equazioni lineari diofantee

$$Ax = 0, \quad \begin{cases} a_{11}x^1 + \cdots + a_{1n}x^n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x^1 + \cdots + a_{mn}x^n = 0 \end{cases};$$

si sta assumendo che i coefficienti a_{ij} e le variabili x^i siano interi.

Definizione 1.4.4. *Sia $X = \{f_1, f_2, \dots, f_p\} \subset \mathbb{Z}^n$ un insieme finito di soluzioni intere non negative del sistema $Ax = 0$ di equazioni lineari omogenee a coefficienti interi. Si dice che X è un insieme fondamentale di soluzioni se:*

1. X genera l'insieme di tutte le soluzioni non negative del sistema $Ax = 0$, ovvero se per ogni soluzione x non negativa esistono coefficienti c_j interi non negativi per cui

$$x = \sum_{j=1}^p c_j f_j;$$

2. nessuna delle soluzioni $f_j \in X$ può essere rappresentata come somma delle altre soluzioni $f_k \in X$, con $k \neq j$.

Ogni soluzione di un insieme fondamentale è anch'essa detta fondamentale.

Teorema 1.4.5. *Sia $Ax = 0$ un sistema omogeneo di equazioni lineari diofantee. Allora esiste un insieme fondamentale di soluzioni; questo insieme è anche unico.*

Dimostrazione. Innanzitutto, si consideri il problema nel campo dei numeri razionali. L'insieme di tutte le soluzioni razionali del sistema $Ax = 0$ è rappresentato dai punti razionali di un piano Y , di una certa dimensione d , nello spazio \mathbb{R}^n ; la disuguaglianza $x \geq 0$ ritaglia sul piano Y un cono infinito C avente vertice nell'origine $O \in \mathbb{R}^n$ e passante per i punti del poligono convesso $P = Y \cap \{x : \sum_i x^i = 1\}$; si osservi che i vertici del poligono P hanno coordinate razionali e quindi corrispondono a soluzioni razionali del sistema; si indicano con $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ tali soluzioni.

Ogni soluzione razionale non negativa x può essere scritta come combinazione $x = \sum_j d_j \bar{x}_j$, dove i coefficienti d_j sono razionali non negativi. Moltiplicando le soluzioni $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ per il minimo comun denominatore delle componenti $\bar{x}_j^i, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k$, si ottengono i vettori interi $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k$, che soddisfano ancora le equazioni del sistema.

Si costruisca ora il parallelogramma P' generato dai punti $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k$, ovvero l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n che possono essere espressi nella forma $\sum_j t_j \hat{x}_j$, dove $t_j \in [0, 1]$ per ogni $j = 1, 2, \dots, k$. Sia K l'insieme delle soluzioni intere non negative contenute nel parallelogramma P' ; si considerino quindi solo le soluzioni in K che non possono essere decomposte nella somma di altri vettori (non nulli) di K ; poiché K è finito, anche tale sottoinsieme di K risulta finito e lo si indica con $X = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$.

Si dimostra che X è un insieme fondamentale di soluzioni; infatti l'indecomponibilità delle soluzioni in X garantisce che nessuna delle $f_j \in X$ possa essere rappresentata come somma delle altre $f_k \in X$, con $k \neq j$; d'altra parte, come già visto, ogni soluzione x intera non negativa può essere rappresentata come $x = \sum_j c_j \hat{x}_j$, dove i coefficienti c_j sono razionali non negativi; se almeno uno dei coefficienti, sia c_1 , è maggiore di 1 allora si pone $x' = x - \hat{x}_1$ e la rappresentabilità della soluzione x si riconduce a quella della soluzione x' avente coefficienti interi più piccoli di x ; se nessuno dei coefficienti c_j è maggiore di 1 allora $x \in K$ e quindi coincide con una delle soluzioni fondamentali o con una loro combinazione lineare a coefficienti interi non negativi.

L'unicità discende dal fatto che le soluzioni fondamentali f_1, f_2, \dots, f_p , per la loro indecomponibilità, non possono essere rappresentate come somme di soluzioni appartenenti ad un altro insieme fondamentale $\{g_1, g_2, \dots, g_{p'}\}$, a meno che f_i coincida con g_j ; ma questo equivale ad affermare che $p = p'$ e che esiste una permutazione $\sigma \in \Sigma_p$ tale che $f_i = g_{\sigma(i)}$, per ogni $i = 1, 2, \dots, p$. \square

Osservazione. Un fatto molto importante è che la dimostrazione del Teorema 1.4.5 ha carattere costruttivo. Ciò significa che un insieme fondamentale può essere costruito algebricamente.

1.4.2 L'algoritmo di Haken

Si consideri nuovamente il sistema $S(\rho)$ costruito nella Sezione 1.4; esso è un sistema omogeneo di equazioni lineari diofantee e, quindi, ammette, per il Teorema 1.4.5, un insieme fondamentale.

Si ricordi, ora, che non tutte le soluzioni del sistema $S(\rho)$ sono ammissibili e questo vale in particolare anche per le soluzioni fondamentali.

Definizione 1.4.6. *Sia $F \subset M$ una superficie 2-normale corrispondente ad una soluzione fondamentale ammissibile del sistema $S(\rho)$; allora si dice che F è una superficie fondamentale.*

Si vuole ora interpretare dal punto di vista geometrico la *somma* di due soluzioni ammissibili intese come superfici 2-normali; siano x_1 e x_2 due soluzioni ammissibili tali che la soluzione $x_1 + x_2$ sia anch'essa ammissibile;

ai vettori x_1, x_2 corrispondono rispettivamente le superfici 2-normali F_1, F_2 , mentre al vettore $x_1 + x_2$ corrisponde la superficie 2-normale F .

Che relazione sussiste tra le superfici F_1, F_2 e la superficie F ? Per la condizione di ammissibilità, le superfici F_1 e F_2 possono essere sistemate in modo che i loro dischi elementari non si intersechino. Le intersezioni delle superfici con gli 1-manici $I \times B^2$ sono costituite da strisce $I \times l$, dove l è un arco in B^2 ; le strisce relative alla superficie F_1 possono intersecare quelle corrispondenti alla superficie F_2 ; manipolando queste strisce è possibile porle in posizione generale, cioè in modo che si intersechino solamente lungo archi doppi trasversali aventi gli estremi sul bordo dell'1-manico. Un discorso analogo vale per le intersezioni tra le superfici all'interno dei 2-manici; si può assumere che anche qui le superfici siano in posizione generale e che, quindi, le intersezioni siano degli archi doppi con estremi sul bordo dei 2-manici.

Per rimuovere queste intersezioni si procede con un'operazione di *taglia ed incolla* (*switch surgery*) su ciascun arco doppio, come descritto nella Sezione 1.1.9; l'operazione può essere realizzata in due modi; si sceglie l'unico che restituisce una superficie 2-normale; questa superficie sarà anche equivalente alla superficie F visto che non è stato modificato alcuno dei dischi elementari delle superfici F_1, F_2 .

Alla luce di ciò, emerge come ogni superficie fondamentale F sia connessa; infatti, se così non fosse, le due componenti connesse F_1 e F_2 sarebbero ancora delle superfici 2-normali alle quali corrisponderebbero le soluzioni ammissibili $x(F_1)$ e $x(F_2)$ del sistema $S(\rho)$ che soddisfano la relazione $x(F) = x(F_1) + x(F_2)$; ma quest'ultima contraddice l'ipotesi che F sia una superficie fondamentale.

Si dimostra, ora, che ogni superficie 2-normale è *somma* di superfici fondamentali, ovvero ogni soluzione ammissibile di $S(\rho)$ è combinazione lineare di soluzioni fondamentali; infatti vale il seguente

Lemma 1.4.7. *Sia $x(F) = c_1x(F_1) + \dots + c_px(F_p)$ la rappresentazione di una superficie 2-normale F in termini delle soluzioni fondamentali; allora i coefficienti delle soluzioni fondamentali non ammissibili sono nulli.*

Dimostrazione. Sia $F \subset M$ una superficie 2-normale rispetto alla decomposizione a manici ρ ; per quanto visto nella Sezione 1.4, è possibile associare a F un unico vettore $x(F) = (x^1, \dots, x^n)$, soluzione del sistema lineare $S(\rho)$. Dal momento che $x(F)$ rappresenta effettivamente una superficie 2-normale, esso deve verificare la condizione di ammissibilità; ovvero, se due dischi elementari E_i e E_j , con $1 \leq i < j \leq n$, sono incompatibili, cioè appartengono a classi di equivalenza che non ammettono rappresentanti disgiunti, allora almeno una delle due coordinate x^i e x^j deve essere nulla. Ora, se si rappresentano le soluzioni fondamentali F_k , per ogni $k = 1, \dots, p$, mediante il

vettore $x(F_k) = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, risulta

$$x^i = \sum_{k=1}^p c_k x_k^i,$$

per ogni $i = 1, \dots, n$.

Si concentri l'attenzione sulla superficie F_l , con $1 \leq l \leq p$; comunque si prendano due dischi incompatibili E_i e E_j , con $1 \leq i < j \leq n$, poiché almeno una delle somme a termini non negativi $\sum_{k=1}^p c_k x_k^i$ e $\sum_{k=1}^p c_k x_k^j$ deve essere nulla, si ha, in particolare, che $c_l x_l^i = 0$ oppure $c_l x_l^j = 0$. Questo è possibile solo se almeno una coordinata tra x_l^i e x_l^j è nulla oppure se $c_l = 0$. Ripetendo tale ragionamento per ogni coppia di dischi incompatibili, si può concludere che ci sono due eventualità (che non necessariamente si escludono): la soluzione fondamentale $x(F_l)$ è ammissibile, cioè F_l è una superficie fondamentale, oppure non compare nella rappresentazione di $x(F)$. \square

Definizione 1.4.8. *Siano M una 3-varietà con bordo e ρ una decomposizione a manici di M . Per superficie parallela al bordo rispetto a ρ si intende una superficie F che si ottiene in questo modo: fissata una componente connessa S del bordo ∂M si costruisca il collare $S \times [0, \varepsilon] \subset M$, in modo che l'intersezione del collare $S \times [0, \varepsilon]$ con ciascun manico H della decomposizione soddisfi questa proprietà*

$$(S \times [0, \varepsilon]) \cap H = (S \cap H) \times [0, \varepsilon];$$

la superficie F coincide con il bordo $S \times \{\varepsilon\}$ del collare.

Accade spesso che una superficie parallela al bordo rispetto a ρ sia anche 2-normale (addirittura 1-normale); si vedrà più avanti (Proposizione 2.1.5) sotto quali condizioni sulla decomposizione a manici ρ questo fatto risulta sempre vero; basti osservare, per ora, che una superficie parallela al bordo rispetta la struttura prodotto degli 1-manici e dei 2-manici di ρ e che se interseca un ponte lo fa al più due volte.

Lemma 1.4.9. *Ogni superficie 1-normale F parallela al bordo rispetto alla decomposizione a manici ρ della 3-varietà M è una superficie fondamentale.*

Dimostrazione. Si considerino innanzitutto i dischi elementari di F ; chiaramente, ciascun disco elementare E di F , essendo parallelo al bordo, è compatibile con ogni altro disco elementare; infatti, poiché ∂E delimita, sul bordo dello 0-manico corrispondente, un disco che non contiene per intero alcun ponte né alcuna isola, è possibile scegliere un rappresentante nella classe di equivalenza di E disgiunto da tutti gli altri dischi elementari.

Sia fissata una superficie 2-normale $F' \not\cong F$; poiché tutti i dischi elementari della superficie F sono paralleli alla stessa componente connessa $S \subset \partial M$, è possibile scegliere un rappresentante per ognuna delle classi di equivalenza dei dischi elementari di F in modo che nessuno intersechi F' ; in definitiva, F è disgiunta, a meno di isotopia, da qualsiasi superficie 2-normale F' .

Si supponga ora l'esistenza di due superfici 2-normali F_1 e F_2 tali che $x(F) = x(F_1) + x(F_2)$; F_1 risulta parallela al bordo S in quanto è rappresentata da tutti dischi elementari paralleli a S ; lo stesso discorso vale per F_2 . Allora si possono scegliere dei rappresentanti di F_1 e F_2 disgiunti; questo implica che F non è connessa, ovvero che la superficie $S \subset \partial M$ non è connessa, contraddicendo così l'ipotesi. \square

Lemma 1.4.10. *Sia M una 3-varietà tale che $H_1(M) \cong 0$. Se M contiene una sfera 2-normale F non parallela al bordo rispetto alla decomposizione a manici ρ , allora c'è una siffatta sfera anche tra le superfici fondamentali.*

Dimostrazione. L'ipotesi che $H_1(M) \cong 0$ in realtà è sovrabbondante in quanto per dimostrare la tesi è sufficiente assumere che non esistano piani proiettivi che possano essere immersi in M .

Si vuol far vedere che effettivamente la nullità del primo gruppo d'omologia implica la non esistenza di piani proiettivi: si supponga che esista un piano proiettivo $P \subset M$; se si considera un intorno regolare M_1 di P , allora $\partial M_1 \cong S^2$ sconnette M in due parti M_1 e M_2 . Per l'esattezza della successione di Mayer-Vietoris

$$H_1(M_1 \cap M_2) \rightarrow H_1(M_1) \oplus H_1(M_2) \xrightarrow{\psi} H_1(M) \rightarrow H_0(M_1 \cap M_2),$$

si ha che, essendo $H_1(M_1 \cap M_2) \cong H_1(S^2) \cong 0$, l'omomorfismo di gruppi ψ è iniettivo; quindi dall'ipotesi che $H_1(M) \cong 0$ discende che $H_1(M_1) \oplus H_1(M_2) \cong 0$; ma ciò è in contraddizione col fatto che $H_1(M_1) \cong H_1(P) \cong \mathbb{Z}_2$.

Sia ora F una sfera 2-normale non parallela al bordo; se F non è fondamentale, allora il vettore $x(F)$ può essere scritto come combinazione lineare a coefficienti interi di soluzioni fondamentali del sistema $S(\rho)$; queste sono anche ammissibili per il Lemma 1.4.7. La caratteristica di Eulero di F è uguale alla combinazione lineare delle caratteristiche di Eulero delle superfici fondamentali corrispondenti ed è uguale a 2; poiché tra le superfici chiuse solo la sfera ed il piano proiettivo hanno caratteristiche di Eulero positive e dal momento che non ci sono piani proiettivi in M , almeno una delle superfici fondamentali deve essere una sfera 2-normale.

Sia F_1 una sfera tra le superfici fondamentali che generano F ; si può provare che F_1 non è parallela al bordo rispetto a ρ ; infatti, per quanto

visto nel corso della dimostrazione del Lemma 1.4.9, se la superficie F_1 fosse parallela al bordo, sarebbe disgiunta da tutte le altre superfici fondamentali; allora, poiché F è connessa, nella sua decomposizione nella somma di superfici fondamentali deve comparire solo F_1 ; ma questo contraddice l'ipotesi che F non fosse parallela al bordo. \square

Teorema 1.4.11. *Esiste un algoritmo per stabilire se una 3-varietà M con $H_1(M) \cong 0$ contenga o meno una sfera 2-normale, rispetto ad una data decomposizione a manici ρ di M , che sia anche non parallela al bordo (sempre rispetto a ρ). Se una tale sfera esiste, essa può essere costruita effettivamente.*

Dimostrazione. Si associ alla decomposizione ρ il sistema lineare $S(\rho)$; per il Teorema 1.4.5, si possono calcolare effettivamente le soluzioni fondamentali ed estrarre da queste quelle ammissibili, eliminando quelle che contengono coppie di dischi elementari incompatibili. Il Lemma 1.4.3 consente di associare a queste soluzioni delle superfici fondamentali; in virtù del Lemma 1.4.10, per stabilire se esiste una sfera 2-normale contenuta in M non parallela al bordo, è sufficiente cercarla tra le superfici fondamentali; per riconoscere se una superficie fondamentale F è una sfera non parallela al bordo si calcola innanzitutto la sua caratteristica di Eulero e quindi si verifica che il vettore $x(F)$ non abbia tutte le coordinate nulle tranne quelle relative ai dischi elementari paralleli ad una componente connessa del bordo ∂M . \square

1.5 Rivestimenti ramificati di S^3

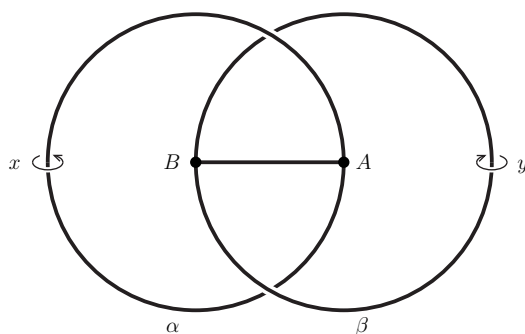
1.5.1 L'insieme di ramificazione universale

Definizione 1.5.1. *Un'applicazione p.l. $p : \tilde{M} \rightarrow M$ tra due n -varietà p.l. compatte e connesse è un rivestimento ramificato se essa è non degenere e se esiste un $(n-2)$ -sottocomplesso $L \subset M$ tale che, posto $\tilde{L} = p^{-1}(L)$, la restrizione $p|_{\tilde{M} \setminus \tilde{L}} : \tilde{M} \setminus \tilde{L} \rightarrow M \setminus L$ sia un rivestimento finito ordinario; il numero d_p indica il numero dei fogli del rivestimento $p|_{\tilde{M} \setminus \tilde{L}}$.*

Come già osservato nella Sezione 1.1.4, il rivestimento ordinario può essere descritto in termini della monodromia

$$\omega_p : \pi_1(M \setminus L) \rightarrow \Sigma_{d_p};$$

poiché L e \tilde{L} hanno codimensione 2, la restrizione $p|_{\tilde{M} \setminus \tilde{L}}$ determina completamente il rivestimento ramificato p che può quindi anch'esso essere rappresentato mediante ω_p .

Figura 1.4: Il grafo universale G .

Si considereranno d'ora in poi 3-varietà compatte, connesse, orientabili e senza 2-sfere sul bordo. Data una 3-varietà M , si ottiene una pseudovarietà chiusa \hat{M} semplicemente facendo il cono di ogni componente del bordo ∂M ; si parla di *pseudovarietà* in quanto questi coni possono generare delle singolarità (si pensi ad esempio al caso del cono di un toro), cioè dei punti per i quali non esistono intorno omeomorfi a \mathbb{R}^3 .

In generale, dati una 3-varietà chiusa M ed un suo 1-sottocomplesso B , i rivestimenti di M ramificati su B non sono delle 3-varietà in quanto il link di un vertice potrebbe essere una superficie chiusa, connessa ed orientabile diversa dalla 2-sfera.

Definizione 1.5.2. *Un poliedro tridimensionale N connesso e compatto è una 3-varietà singolare se ammette una triangolazione che la rende una pseudovarietà chiusa ed orientabile in cui il link di ogni k -simplexso, con $k = 0, 1$, è connesso.*

La costruzione della pseudovarietà \hat{M} a partire dalla 3-varietà M fornisce un modo generale per ottenere 3-varietà singolari; i vertici dei coni che hanno come base una superficie diversa dalla 2-sfera sono detti *punti singolari* di \hat{M} . Quindi ogni 3-varietà M può essere rappresentata dalla 3-varietà singolare \hat{M} ; viceversa, ad ogni 3-varietà singolare N resta associata univocamente, a meno di omeomorfismi, un'unica 3-varietà \check{N} ; è proprio per garantire questo fatto che si giustifica la scelta di considerare solo varietà che non contengano 2-sfere sul bordo.

Sia G il sottoinsieme di S^3 rappresentato nella Figura 1.4; sussiste il seguente

Teorema 1.5.3. *Ogni 3-varietà compatta, connessa ed orientabile è un rivestimento di S^3 ramificato sul grafo G .*

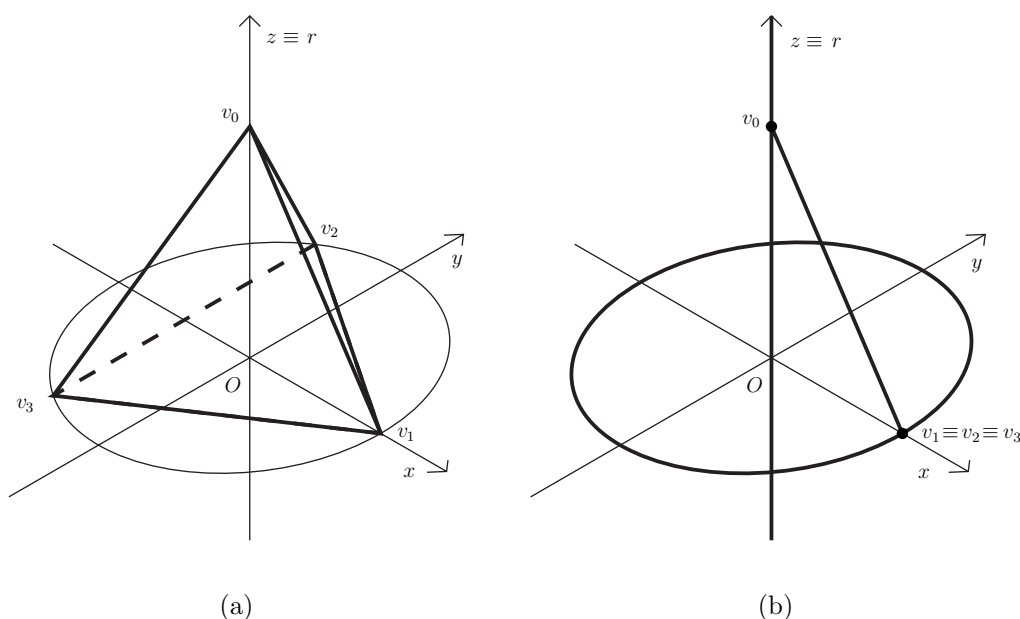


Figura 1.5: Il tetraedro $t \subset \mathbb{R}^3$ e l'insieme di ramificazione di p .

Dimostrazione. a) Sia M una 3-varietà compatta, connessa ed orientabile e sia Λ una sua triangolazione; se si considera la suddivisione baricentrica $\beta\Lambda$, ogni nuovo tetraedro acquista una orientazione naturale, che nasce dall'ordine in cui vengono considerati i suoi vertici, ma eredita anche l'orientazione (indotta) del vecchio tetraedro in cui giace. Se si colorano di nero i tetraedri di $\beta\Lambda$ in cui le due orientazioni coincidono e di bianco gli altri, si ottiene una colorazione a scacchiera, in quanto due nuovi tetraedri con una faccia in comune hanno la stessa orientazione indotta, ma opposta orientazione naturale.

Ora, considerando S^3 come incollamento lungo il bordo di due tetraedri, si può colorarne uno di bianco ed uno di nero ed ordinare i quattro vertici in comune; resta così definita un'applicazione p.l. $f : M \rightarrow S^3$ che manda i tetraedri neri (bianchi) in quello nero (bianco), conservando l'ordine dei vertici. Allora f è un rivestimento di S^3 ramificato sull'1-scheletro R del tetraedro; il numero dei fogli è pari al numero k dei tetraedri della triangolazione $\beta\Lambda$.

b) Si costruirà ora un'altra applicazione p.l. $g : S^3 \rightarrow S^3$; tenendo conto della compattificazione $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, si consideri il tetraedro $t \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ di vertici $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, rappresentato in Figura 1.5(a); si fissi un sistema di coordinate (x, y, z) per \mathbb{R}^3 in modo che il vertice v_0 sia contenuto nell'asse z e tutti gli altri vertici nel piano xy e che l'asse z coincida con l'asse di simmetria r di t passante per v_0 , e quindi si identifichi \mathbb{R}^3 con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$; si

può allora definire l'applicazione g in questo modo:

$$g(q) = \begin{cases} ((x + iy)^3, z), & \text{se } q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ \infty & \text{se } q = \infty \end{cases}.$$

L'applicazione g è un rivestimento a tre fogli di S^3 ramificato sull'insieme $r \cup \{\infty\}$.

c) Se si suppone che l'insieme di ramificazione R di f coincida con l'1-scheletro del tetraedro t , la composizione $p = g \circ f : M \rightarrow S^3$ risulta essere un rivestimento di S^3 ramificato sull'insieme $g(R) \cup r \cup \{\infty\}$ (Figura 1.5(b)); quest'ultimo è omeomorfo al grafo G in quanto:

$$\begin{aligned} g(v_1v_2) &= g(v_2v_3) = g(v_3v_1) = \beta, & g(r \cup \{\infty\}) &= \alpha, \\ g(v_1) &= g(v_2) = g(v_3) = B, & g(v_0) &= A, \\ g(v_0v_1) &= g(v_0v_2) = g(v_0v_3) = AB. \end{aligned}$$

Il rivestimento p ha chiaramente $h = 3k$ fogli; ogni siffatto rivestimento è in relazione con una rappresentazione transitiva ω di $\pi_1(S^3 \setminus G)$ nel gruppo simmetrico Σ_h ; poiché $\pi_1(S^3 \setminus G)$ è un gruppo libero sui generatori x, y evidenziati nella Figura 1.4, risulta che ad ogni coppia di permutazioni $\{\sigma, \tau\} \in \Sigma_h$ che generano un sottogruppo di Σ_h che agisce transitivamente su $\{1, 2, \dots, h\}$ corrisponde una monodromia

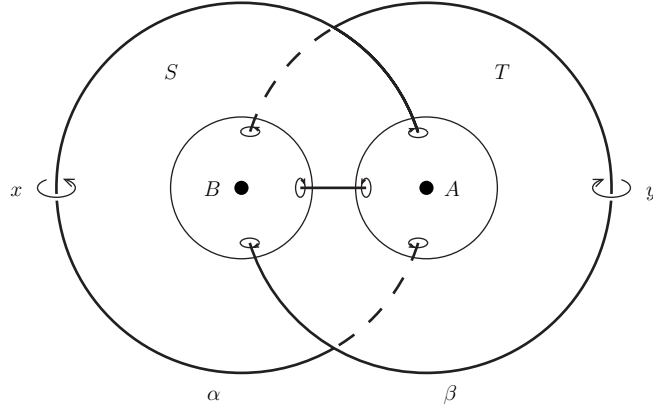
$$\begin{aligned} \omega : \pi_1(S^3 \setminus G) &\rightarrow \Sigma_h \\ x &\mapsto \sigma \\ y &\mapsto \tau \end{aligned}$$

e quindi un rivestimento e infine una 3-varietà singolare. In definitiva, ogni 3-varietà M (senza 2-sfere sul bordo) può essere rappresentata come $\check{N}(\sigma, \tau)$, ovvero come la varietà che si ottiene desingularizzando la 3-varietà singolare $N(\sigma, \tau)$ corrispondente a qualche coppia transitiva di permutazioni $\{\sigma, \tau\}$. \square

Sia H un sottogruppo di Σ_h ; si indica con $c(H)$ il numero delle orbite dell'azione di H su $\{1, 2, \dots, h\}$. Per ogni sottoinsieme $X \subset \Sigma_h$ non vuoto si indica con $\langle X \rangle$ il sottogruppo generato da X ; per alleggerire la notazione, si adotterà la seguente identificazione: $c(\sigma) = c(\langle \sigma \rangle)$, con $\sigma \in \Sigma_h$. Infine, se $\sigma, \tau \in \Sigma_h$, si pone $\sigma^\tau = \tau\sigma\tau^{-1}$ e $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$.

Proposizione 1.5.4. *La caratteristica di Eulero di $N(\sigma, \tau)$ è*

$$\chi(N(\sigma, \tau)) = h + c(\sigma, \sigma^\tau) + c(\tau, \tau^\sigma) - c(\sigma) - c(\tau) - c[\sigma, \tau].$$

Figura 1.6: Decomposizione cellulare di S^3 .

Dimostrazione. Per calcolare la caratteristica di Eulero di $N(\sigma, \tau)$, si consideri innanzitutto la decomposizione cellulare di S^3 descritta nella Figura 1.6; questa è costituita dalle 0-celle A e B , dalle 1-celle $\alpha = \partial S$, $\beta = \partial T$ e $AB = S \cap T$, dalle 2-celle S e T e da un'unica 3-cella incollata a $S \cup T$; i dischi S e T sono stati incollati sul grafo G identificando parte delle frontiere.

Sollevando questa decomposizione cellulare di S^3 , se ne ottiene una per $N(\sigma, \tau)$ costituita da $c(\sigma, \sigma^\tau) + c(\tau, \tau^\sigma)$ 0-celle, $c(\sigma) + c(\tau) + c[\sigma, \tau]$ 1-celle, $2h$ 2-celle e h 3-celle; con questo la Proposizione è dimostrata.

Meritano maggiori dettagli solo il numero delle celle di dimensione 0 e 1, visto che fuori dall'1-scheletro si ha un rivestimento finito ordinario; la controimmagine di α ha $c(\sigma)$ componenti, in quanto α corrisponde al cappio x e $\omega(x) = \sigma$, quella di β ne ha $c(\tau)$, poiché β corrisponde al cappio y e $\omega(y) = \tau$, ed infine il sollevamento di AB ha $c[\sigma, \tau]$ componenti, essendo $[x, y]$ un cappio intorno a AB e $\omega[x, y] = [\sigma, \tau]$. Per ottenere il numero delle 0-celle, si prendano due 2-sfere S_A e S_B , centrate in A e B rispettivamente; la controimmagine di S_A è un rivestimento di S_A ramificato su tre punti, corrispondente alla rappresentazione $\pi_1(S_A \setminus G) \rightarrow \Sigma_h$, avente come immagine il sottogruppo $\langle \sigma, [\sigma, \tau], \sigma^\tau \rangle = \langle \sigma, \sigma^\tau \rangle$; lo stesso vale per S_B . \square

Poiché la caratteristica di Eulero $\chi(N(\sigma, \tau))$ è la somma dei generi delle componenti del bordo di $\check{N}(\sigma, \tau)$, si ha il seguente

Corollario 1.5.5. $N(\sigma, \tau)$ è una 3-varietà chiusa se e solo se

$$h + c(\sigma, \sigma^\tau) + c(\tau, \tau^\sigma) = c(\sigma) + c(\tau) + c[\sigma, \tau].$$

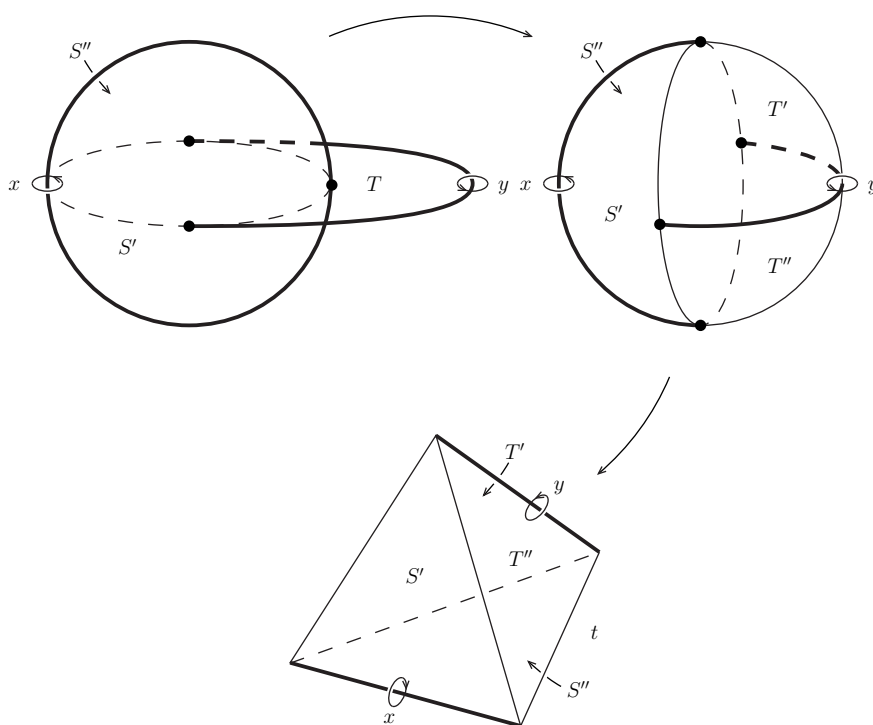


Figura 1.7: Tagliando S^3 lungo $S \cup T$ si ottiene il tetraedro t .

1.5.2 Rivestimenti e permutazioni

Si descriverà un procedimento per costruire, a partire dalle permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$, con $c(\sigma, \tau) = 1$, la 3-varietà singolare $N(\sigma, \tau)$; il metodo adottato è quello del *complesso di spezzamento*.

Un complesso di spezzamento per $G \subset S^3$ è costituito dall'unione dei dischi S e T della Figura 1.6; tagliando S^3 lungo $S \cup T$, si ottiene un tetraedro t , come descritto nella Figura 1.7; i due spigoli non consecutivi di t che sono stati marcati di più nella figura corrispondono alle 1-celle α e β del grafo G ; quello corrispondente a α consiste nel bordo comune delle due facce S' e S'' di t che discendono dal disco S ; discorso analogo vale per β , T' e T'' .

A questo punto, prese h copie $\{t_1, t_2, \dots, t_h\}$ del tetraedro t e indicate rispettivamente con $S'_{i\sigma(i)}$, $S''_{i\sigma^{-1}(i)}$, $T'_{i\tau(i)}$ e $T''_{i\tau^{-1}(i)}$ le facce S' , S'' , T' e T'' di t_i , si procede all'identificazione delle facce $S'_{i\sigma(i)}$ con $S''_{\sigma(i)i}$ e $T'_{i\tau(i)}$ con $T''_{\tau(i)i}$, $i = 1, 2, \dots, h$, mediante omeomorfismi che invertono l'orientazione e che rispettano gli spigoli marcati. Si ottiene in questo modo una 3-varietà singolare che risulta essere proprio $N(\sigma, \tau)$ in quanto gli incollamenti sono stati prodotti seguendo le orbite delle due permutazioni σ e τ .

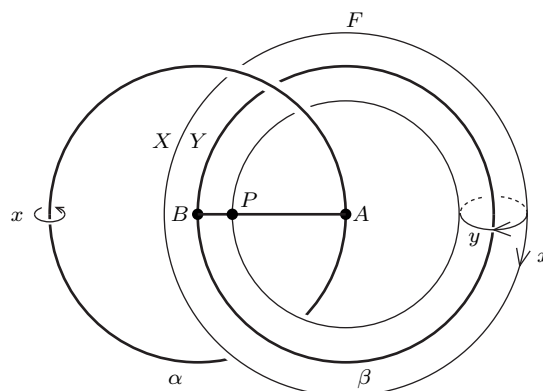


Figura 1.8: La superficie torica F in S^3 .

1.5.3 Rivestimenti e diagrammi di Heegaard

Sia ancora $N(\sigma, \tau)$ il rivestimento di S^3 ramificato su G associato alle permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$; sia F un toro immerso in S^3 in modo che le chiusure X e Y delle due componenti di $S^3 \setminus F$ siano intorni regolari di α e β (Figura 1.8).

Teorema 1.5.6. *La controimmagine \tilde{F} del toro F in $N(\sigma, \tau)$ è una superficie chiusa, connessa ed orientata di genere $1 + \frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau])$. Inoltre $(\tilde{N}(\sigma, \tau), \tilde{F})$ è uno spezzamento di Heegaard generalizzato.*

Dimostrazione. La controimmagine \tilde{F} del toro F è il rivestimento di F , ramificato sul punto $P \in S^3$, corrispondente alla rappresentazione transitiva $\pi_1(F \setminus P) \rightarrow \Sigma_h$ così definita: se x e y sono i generatori di $\pi_1(F \setminus P) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, allora $x \mapsto \sigma$ e $y \mapsto \tau$. Si costruisce \tilde{F} tagliando F lungo due curve λ e μ , omotope ai generatori x e y , passanti per P ; si prendono quindi h copie del toro così tagliato, e le si incollano seguendo le istruzioni date dalle permutazioni σ e τ . La superficie \tilde{F} è chiaramente chiusa ed orientabile; è anche connessa per la transitività della rappresentazione. Si può calcolare la caratteristica di Eulero di \tilde{F} sollevando la decomposizione cellulare di F data da λ e μ ; quest'ultima è composta da una 0-cella (il punto P), due 1-celle (le curve λ e μ) ed una 2-cella, per cui su \tilde{F} si avranno $c[\sigma, \tau]$ 0-celle, $2h$ 1-celle e h 2-celle e conseguentemente $\chi(\tilde{F}) = -h + c[\sigma, \tau]$. Poiché tra il genere $g(S)$ e la caratteristica di Eulero $\chi(S)$ di una generica superficie S chiusa, connessa ed orientabile sussiste la relazione $\chi(S) = 2(1 - g(S))$, si ottiene immediatamente che $g(\tilde{F}) = 1 + \frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau])$.

La superficie \tilde{F} separa $N(\sigma, \tau)$ in due componenti le cui chiusure sono le controimmagini \tilde{X} e \tilde{Y} di X e Y , rispettivamente. Si vuole dimostrare che \tilde{X} e \tilde{Y} sono corpi di manici cavi. Come già visto nella Sezione 1.5.2, tagliando

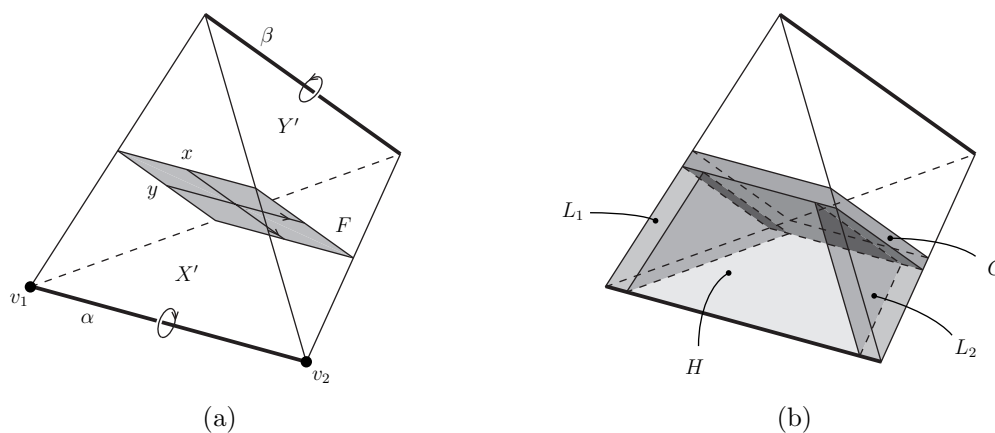


Figura 1.9: La superficie F e il tetraedro t .

S^3 lungo $S \cup T$ si ottiene un tetraedro t ; in virtù di questa operazione, anche la superficie F risulta tagliata lungo cappi che, a meno di omotopia, coincidono con λ e μ ; per cui la superficie F ed i cappi x e y assumono la configurazione descritta nella Figura 1.9(a), dove t è unione di due prismi X' e Y' incollati lungo F . \tilde{X} si ottiene incollando linearmente h copie di X' secondo le istruzioni contenute in σ e τ ; se si immagina X' suddivisa come in Figura 1.9(b), dove C è un collare di F , L_1 e L_2 sono intorni regolari dei vertici v_1 e v_2 e H è la parte rimanente, allora le h copie di C generano un collare di \tilde{F} (omeomorfo quindi a $\tilde{F} \times [-1, 1]$) mentre le h copie di H formano un insieme di 2-manici che vanno incollati ad una delle componenti connesse del bordo del collare di \tilde{F} ; infine, le copie di L_1 e L_2 relative ai vertici non singolari di $N(\sigma, \tau)$ costituiscono degli ulteriori 3-manici da incollare; \tilde{X} risulta quindi effettivamente un corpo di manici cavo.

Un ragionamento analogo sussiste anche per \tilde{Y} . □

Proposizione 1.5.7. *La somma dei generi dei link dei punti singolari nella controimmagine \tilde{X} di X è*

$$\frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau]) - c(\sigma) + c(\sigma, \sigma^\tau).$$

Dimostrazione. Si consideri la 3-varietà $2\tilde{X}$ costruita incollando due copie di \tilde{X} lungo il bordo libero \tilde{F} ; la caratteristica di Eulero di $2\tilde{X}$ è due volte la somma dei generi dei link dei punti singolari di \tilde{X} . D'altra parte, si ha

$$\chi(2\tilde{X}) = 2\chi(\tilde{X}) - \chi(\tilde{F}) = 2(c(\sigma, \sigma^\tau) - c(\sigma)) + h - c[\sigma, \tau],$$

per cui la dimostrazione è completa. □

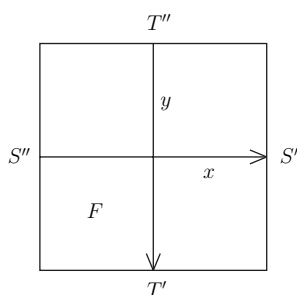


Figura 1.10: La superficie che si ottiene dopo aver tagliato F lungo λ e μ .

Poiché un enunciato analogo sussiste anche per \tilde{Y} , risulta provato il seguente

Corollario 1.5.8. $N(\sigma, \tau)$ è una 3-varietà chiusa se e solo se

$$\frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau]) = c(\sigma) - c(\sigma, \sigma^\tau) = c(\tau) - c(\tau, \tau^\sigma).$$

Ora, si riprenda in considerazione lo spezzamento di Heegaard generalizzato $(\check{N}(\sigma, \tau), \tilde{F})$; tenendo conto della dimostrazione del Teorema 1.5.6, si osserva che i sollevamenti degli archi x e y della Figura 1.10 costituiscono due sistemi $v = (v_1, \dots, v_{c(\sigma)})$ e $w = (w_1, \dots, w_{c(\tau)})$ di curve semplici chiuse su \tilde{F} , ovvero definiscono un diagramma di Heegaard generalizzato $(\tilde{F}; v, w)$. Allora vale il seguente

Teorema 1.5.9. $(\tilde{F}; v, w)$ è un diagramma di Heegaard generalizzato per la 3-varietà $\check{N}(\sigma, \tau)$.

Ecco un modo per costruire il diagramma $(\tilde{F}; v, w)$ direttamente a partire dalle permutazioni σ e τ ; prese h copie $\{F_1, \dots, F_h\}$ del quadrilatero F della Figura 1.10 ed indicati i lati S' , S'' , T' e T'' di F_i con $S'_{i\sigma(i)}$, $S''_{i\sigma^{-1}(i)}$, $T'_{i\tau(i)}$ e $T''_{i\tau^{-1}(i)}$, rispettivamente, si ottiene la superficie \tilde{F} identificando $S'_{i\sigma(i)}$ con $S''_{\sigma(i)i}$ e $T'_{i\tau(i)}$ con $T''_{\tau(i)i}$. Le unioni delle copie delle curve x e delle curve y danno rispettivamente i sistemi v e w .

1.5.4 Diagrammi di Heegaard e permutazioni

Teorema 1.5.10. Sia $(S_g; v, w)$ un diagramma di Heegaard. Allora esiste un algoritmo che determina un intero $h \geq 1$ e due permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$, con $c(\sigma, \tau) = 1$, in modo che $\check{N}(\sigma, \tau)$ sia la 3-varietà associata al diagramma di Heegaard.

Dimostrazione. Se $g = 0$, allora la 3-varietà rappresentata dal diagramma di Heegaard $(S_g; v, w)$ è omeomorfa a S^3 e quindi la tesi sussiste per $h = 1$ e $\sigma = \tau$ uguali all'identità.

Se $g > 0$, si definisce il seguente algoritmo.

1. Si eliminano dal sistema v alcune curve affinché $S_g \setminus v$ sia una superficie piana connessa.
2. Se $w = \emptyset$, si aggiungono al diagramma $(S_g; v, w)$ una coppia di manici che si annullano, ovvero un 1-manico di valenza 1 ed il relativo 2-manico.
3. Si modificano le curve del sistema w in modo che $w_i \cap v \neq \emptyset$, per ogni $w_i \in w$; per fare ciò si taglia la superficie S_g sia lungo v che lungo le curve di w che intersecano v , ottenendo così delle superfici piane e connesse C_1, C_2, \dots, C_r . Se si assume che esista una curva w_i tale che $w_i \cap v = \emptyset$, allora $w_i \subset C_j$, per qualche j . Tra tutte le curve di w contenute in C_j ne esiste una che può essere spinta fino ad attraversare il bordo ∂C_j senza intersecare le altre curve di w . In questo modo si riduce il numero delle curve di w che non intersecano v .
4. Si rende ogni componente di $S_g \setminus (v \cup w)$ semplicemente connessa. Tagliando S_g lungo $v \cup w$ si ottengono delle superfici piane connesse C_1, C_2, \dots, C_r ciascuna delle quali, in virtù dei passi 1., 2. e 3., ha sul bordo sia archi di v che archi di w . Se, per qualche i , ∂C_i ha più di una componente, è possibile spingere una parte di w attraverso C_i fino ad intersecare v in una diversa componente del bordo. In questo modo si riduce il numero delle superfici C_j non semplicemente connesse.
5. Dopo aver orientato S_g , v e w arbitrariamente, si controlla se le intersezioni tra v e w avvengono sempre nello stesso senso rispetto all'orientazione di S_g ; se questo non accade in un punto z si modifica il diagramma $(S_g; v, w)$ in un intorno di z aggiungendo una coppia di manici che si annullano.
6. Se h è il numero dei punti di $v \cap w$, si associa ad ognuno di questi punti z un intero $\varphi(z) \in \{1, 2, \dots, h\}$. Allora le curve orientate $v_i \in v$ e $w_i \in w$ individuano dei cicli $\gamma(v_i)$ e $\gamma(w_i)$ in Σ_h ; si definiscono

$$\begin{aligned}\sigma &= \gamma(v_1) \cdots \gamma(v_g), \\ \tau &= \gamma(w_1) \cdots \gamma(w_t).\end{aligned}$$

Resta da far vedere che la 3-varietà $\check{N}(\sigma, \tau)$ è omeomorfa alla 3-varietà associata al diagramma di Heegaard $(S_g; v, w)$. Attraverso i passi 1.–5., il diagramma di Heegaard originale è stato trasformato in un altro diagramma $(S'_g; v', w')$ che, tuttavia, definisce la stessa 3-varietà. Poiché $S'_g \setminus (v' \cup w')$ è costituito da componenti semplicemente connesse, esiste una decomposizione cellulare di S'_g duale rispetto a quella definita da $v' \cup w'$; le 2-celle di questa decomposizione duale sono dei quadrilateri, contenenti ciascuno un solo punto di intersezione $z' \in v' \cap w'$. Indicando con $F_{\varphi(z')}$ il quadrilatero contenente z' , si ha che S'_g è ottenuta incollando i quadrilateri proprio come descritto al termine della Sezione 1.5.3. \square

Corollario 1.5.11. 1. Per ogni 3-varietà M esistono un intero $h \geq 1$ e due permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$ tali che M è omeomorfa a $\check{N}(\sigma, \tau)$ e

$$c(\sigma, \sigma^\tau) = 1, \quad c(\sigma) = 1 + \frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau]).$$

2. Per ogni 3-varietà chiusa M esistono un intero $h \geq 1$ e due permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$ tali che M è omeomorfa a $N(\sigma, \tau)$ e

$$c(\sigma) = c(\tau), \quad c(\sigma, \sigma^\tau) = c(\tau, \tau^\sigma) = 1.$$

Dimostrazione. 1. Poiché ad ogni 3-varietà M è possibile associare un diagramma di Heegaard $(S_g; v, w)$, il Teorema 1.5.10 consente di trovare le permutazioni σ e τ , con $c(\sigma, \tau) = 1$, per cui $M \cong \check{N}(\sigma, \tau)$. Essendo il genere della superficie S_g pari a $c(\sigma)$, per il Teorema 1.5.6 si ha che

$$c(\sigma) = 1 + \frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau]),$$

mentre dalla Proposizione 1.5.7 si ottiene

$$c(\sigma, \sigma^\tau) = c(\sigma) - \frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau]) = 1.$$

2. In questo caso il diagramma di Heegaard $(S_g; v, w)$ associato a M ha lo stesso numero g di curve sia in v che in w ; allora per il Teorema 1.5.10 si ha che $M \cong N(\sigma, \tau)$ con $c(\sigma) = c(\tau)$. Dalla 1. discende anche che $c(\sigma, \sigma^\tau) = c(\tau, \tau^\sigma) = 1$. \square

Capitolo 2

Algoritmo per il riconoscimento di S^3

2.1 Riduzione delle decomposizioni a manici

Sia M una boccia d'omologia e sia ρ una decomposizione a manici di M .

Definizione 2.1.1. *Si definisce valenza di un 1-manico C , e la si indica con $v(C)$, il numero dei 2-manici adiacenti a C , contati ciascuno tante volte quante sono le componenti della sua intersezione con C .*

La quantità $\gamma(C) = \max(0, v(C) - 2)$ è detta complessità del manico C .

La complessità $c(\rho)$ della decomposizione a manici ρ è la somma delle complessità di tutti gli 1-manici di ρ .

Si vuole ora semplificare la decomposizione a manici ρ di M mediante semplici *movimenti* dei manici; tale semplificazione va intesa nel senso di una riduzione della complessità $c(\rho)$. I movimenti che verranno descritti non lasceranno inalterata la 3-varietà M , ma la trasformeranno in una 3-varietà M' data dall'unione di bocce d'omologia la cui decomposizione a manici ρ' avrà globalmente complessità $c(\rho') \leq c(\rho)$. Inoltre, come si vedrà, ciascuna delle nuove bocce d'omologia di M' è una boccia se e solo se anche M lo è.

Si descrivono ora i cinque movimenti.

1. *Rimozione di un 1-manico ed un 2-manico cancellabili.*

Se esiste un 1-manico di valenza 1, allora lo si elimina insieme all'unico 2-manico ad esso adiacente.

2. *Rimozione di un ponte di separazione.*

Sia B uno 0-manico della decomposizione ρ ; se ∂B contiene un *ponte di separazione*, cioè un ponte che collega due componenti disgiunte

dell'unione delle isole con gli altri ponti, allora entrambi i lati del ponte di separazione delimitano lo stesso lago. Se si presenta B come unione di due nuovi 0-manici e di un nuovo 1-manico (Figura 2.1), in modo che il ponte di separazione appartenga al bordo del nuovo 1-manico, quest'ultimo ha valenza 1 e quindi può essere rimosso insieme all'unico 2-manico adiacente mediante il movimento 1.

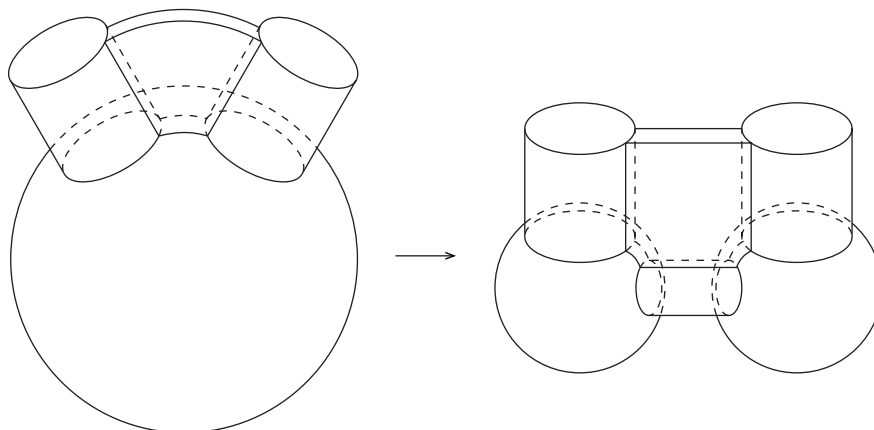


Figura 2.1: Movimento 2.: rimozione di un ponte di separazione.

3. *Rimozione di un 1-manico di valenza 0.*

Se esiste un 1-manico di valenza 0, lo si elimina.

4. *Taglio di uno 0-manico.*

Sia B uno 0-manico della decomposizione ρ ; se ∂B contiene un lago L non semplicemente connesso, allora esiste un disco $D \subset B$ propriamente immerso tale che ∂D è una curva non banale in L . Il movimento si realizza tagliando B proprio lungo D ; in tal modo si ottengono due nuovi 0-manici.

5. *Rimozione di un'isola di separazione.*

Questo movimento va eseguito solamente dopo aver rimosso ogni ponte di separazione. Sia B uno 0-manico della decomposizione tale che il suo bordo ∂B contenga un lago L che delimita un'isola J lungo due o più segmenti; J è detta *isola di separazione* poiché collega componenti disgiunte dell'unione dei ponti e delle altre isole. Si prenda in J una striscia A che colleghi due segmenti di $\partial J \cap L$; la chiusura di $J \setminus A$ consta di due dischi J_1 e J_2 che, insieme a A , possono essere visti rispettivamente come due nuove isole ed un nuovo ponte su ∂B (Figura 2.2).

Analogamente, l'1-manico attaccato a J può essere pensato come unione di due nuovi 1-manici e di un nuovo 2-manico. Allora A risulta essere un ponte di separazione cui può essere applicato il movimento 2.

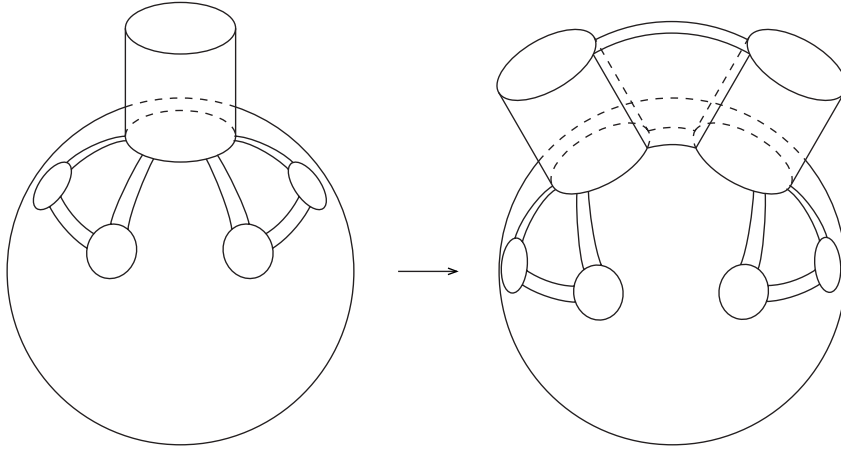


Figura 2.2: Movimento 5.: rimozione di un'isola di separazione.

Osservazioni. *Equivalenza topologica.* I movimenti 1., 2. e 5. trasformano ρ senza alterare la classe di omeomorfismo di M ; infatti essi si riconducono tutti al movimento 1., ovvero alla rimozione di un 1-manico $C = (I \times B^2)_C$ di valenza 1 e dell'unico 2-manico $P = (B^2 \times I)_P$ adiacente, la cui unione $C \cup P$ è una boccia attaccata al bordo ∂M lungo il disco

$$(I \times \partial B^2)_C \cup (B^2 \times \partial I)_P \setminus ((I \times \partial B^2)_C \cap (B^2 \times \text{Int } I)_P);$$

ma allora, posto $M' = \overline{M \setminus (C \cup P)}$, si ha che $M' \cong M$.

Diversamente, i movimenti 3. e 4. trasformano la boccia d'omologia M in una nuova 3-varietà $M' \not\cong M$, che tuttavia risulta essere ancora unione di bocce d'omologia. Si osservi innanzitutto che la rimozione un 1-manico $I \times B^2$ di valenza 0 può essere assimilata al taglio di M lungo il disco propriamente immerso $\{p\} \times B^2$, con $p \in I$; alla luce di ciò, i movimenti 3. e 4. possono essere considerati topologicamente equivalenti. La 3-varietà M' che si ottiene in seguito al taglio è composta da due componenti M_1 e M_2 disgiunte in quanto, se così non fosse, esisterebbe in M un cappio non banale, in contraddizione con l'ipotesi $H_1(M) \cong 0$. Inoltre, M_1 e M_2 sono bocce d'omologia perché si ottengono tagliando una boccia d'omologia lungo un disco D ; per constatare ciò si calcolino i gruppi di omologia di M_1 e M_2 mediante la successione di Mayer-Vietoris applicata alla coppia (M_1, M_2)

$$\cdots \rightarrow H_n(D) \rightarrow H_n(M_1) \oplus H_n(M_2) \rightarrow H_n(M) \rightarrow H_{n-1}(D) \rightarrow \cdots;$$

dal fatto che $H_n(D) \cong 0$, per $n \geq 1$, e che $\tilde{H}_0(D) \cong 0$ e dall'esattezza della successione discende che $H_n(M_1) \oplus H_n(M_2) \cong H_n(M) \cong 0$, per $n \geq 1$, e $\tilde{H}_0(M_1) \oplus \tilde{H}_0(M_2) \cong \tilde{H}_0(M) \cong 0$.

Complessità. Si considerino ora gli effetti che i cinque movimenti hanno sulla complessità della decomposizione a manici ρ . I movimenti 1.–4. non aumentano la complessità: infatti, nel primo movimento si elimina, oltre ad un 1-manico di valenza 1, il quale non contribuisce alla complessità, l'unico 2-manico ad esso adiacente con la conseguente riduzione della valenza degli 1-manici che eventualmente dovessero essere adiacenti al 2-manico eliminato; con il secondo movimento si creano, a partire da uno 0-manico, due nuovi 0-manici ed un nuovo 1-manico il quale, avendo valenza 1, non va ad aumentare la complessità e può inoltre essere eliminato mediante il movimento precedente; i movimenti 3. e 4. non intervengono sulla complessità in quanto si limitano rispettivamente ad eliminare un 1-manico di valenza nulla ed a tagliare uno 0-manico in due nuovi 0-manici. Il movimento 5. risulta essere il più delicato: siano J e C rispettivamente un'isola di separazione e l'1-manico incollato su di essa e si sostituisca C con un 2-manico P e due nuovi 1-manici C_1 e C_2 ; C deve avere valenza almeno uguale a 2, altrimenti J non potrebbe essere un'isola di separazione, e quindi per la complessità di C vale la relazione $\gamma(C) = v(C) - 2$. Nella nuova decomposizione a manici la complessità $\gamma(C)$ viene rimpiazzata dalla complessità $\gamma(C_1) + \gamma(C_2)$; poiché tra le valenze sussiste la seguente relazione

$$v(C_1) + v(C_2) = v(C) + 2,$$

si ha che

$$\gamma(C_1) + \gamma(C_2) = v(C_1) + v(C_2) - 4 = v(C) - 2 = \gamma(C),$$

dove si è tenuto conto del fatto che $v(C_1), v(C_2) \geq 2$. A questo punto si effettua il movimento 2., al termine del quale risulta che non si sono aggiunti 1-manici ma che si è eliminato il 2-manico P , con conseguente riduzione della valenza di C_1 e C_2 ; in definitiva, quindi, il movimento 5. determina una decomposizione a manici con complessità strettamente inferiore a $\gamma(\rho)$. Quest'ultimo fatto risulta vero proprio in virtù dell'ipotesi che non ci siano ponti di separazione per la decomposizione a manici; infatti la complessità di ρ rimarrebbe invariata, e quindi non diminuirebbe, solo nel caso in cui i due 1-manici C_1 e C_2 avessero entrambi valenza 2, ovvero solo se l'1-manico C avesse valenza 2; ma questo non può accadere perché implicherebbe che i due ponti attaccati all'isola J siano di separazione.

Numero dei 2-manici. Si osservi infine che ciascun movimento non aumenta il numero totale dei 2-manici della decomposizione; in particolare, i

movimenti 1. e 2. diminuiscono strettamente il numero dei 2-manici. D'ora in avanti si indicherà tale numero col simbolo $\sharp(\rho)$.

Definizioni 2.1.2. *Una decomposizione a manici ρ di una 3-varietà M costituita dall'unione finita e disgiunta di bocce d'omologia è ridotta se non può essere effettuato alcuno dei movimenti 1.–5.*

Una decomposizione a manici ridotta è banale se non contiene 1-manici né 2-manici.

In virtù di questa definizione, una decomposizione a manici è ridotta se e solo se non contiene 1-manici di valenza 0 o 1, né ponti o isole di separazione e se tutti i laghi sono semplicemente connessi.

Lemma 2.1.3. *Ogni decomposizione a manici ρ di una boccia d'omologia M può essere algebricamente trasformata in una decomposizione a manici ridotta ρ' di un'unione disgiunta M' di bocce d'omologia tale che $c(\rho') \leq c(\rho)$; inoltre, M è una boccia se e solo se ogni boccia d'omologia di M' è una boccia.*

Dimostrazione. Si definisce il seguente algoritmo (Figura 2.3).

Passo 1. Se non esistono 1-manici di valenza 1 né ponti di separazione si prosegue al Passo 2.

Se esistono un 1-manico di valenza 1 o un ponte di separazione, li si elimina rispettivamente con un movimento 1. o con un movimento 2.; si ottiene una 3-varietà M' topologicamente equivalente a M , ma con una decomposizione a manici ρ' contenente un numero strettamente inferiore di 2-manici, cioè $\sharp(\rho') < \sharp(\rho)$. Quindi si ripete il Passo 1.

Passo 2. Se non esiste alcuna isola di separazione si prosegue al Passo 3.

Se invece esiste un'isola di separazione, la si rimuove mediante un movimento 5.; questo produce una 3-varietà M'' omeomorfa alla precedente la cui decomposizione a manici ρ'' ha complessità strettamente minore, cioè soddisfa la relazione $c(\rho'') < c(\rho')$; si ritorna quindi al Passo 1, visto che potrebbero essere comparsi nuovi 1-manici di valenza 1 o ponti di separazione.

Passo 3. Quando si arriva a questo punto si ha a che fare con una 3-varietà M'' avente una decomposizione a manici ρ'' che non contiene 1-manici di valenza 1 né ponti né isole di separazione.

Se non ci sono neanche 1-manici di valenza 0 né laghi non semplicemente connessi, allora la decomposizione a manici è ridotta, per cui la coppia (M'', ρ'') soddisfa la tesi.

Altrimenti, è possibile applicare almeno uno tra i movimenti 3. e 4.; entrambi questi movimenti non solo non modificano la complessità $c(\rho'')$ della decomposizione a manici o il numero dei 2-manici $\sharp(\rho'')$, ma, soprattutto, non

generano neanche nuovi 1-manici di valenza 0 o 1, né laghi non semplicemente connessi, né ponti o isole di separazione; essi tagliano esclusivamente la 3-varietà M'' in due bocce d'omologia. Una volta praticato questo taglio si ripete il Passo 3.

Resta da provare che l'algoritmo così descritto è finito; basta osservare che il Passo 1 può essere iterato solo un numero finito di volte in quanto ad ogni esecuzione dei movimenti 1. e 2. diminuisce il numero di 2-manici della decomposizione a manici; anche il Passo 2 può essere ripetuto solo un numero finito di volte poiché il movimento 5. riduce la complessità della decomposizione a manici; infine, dal momento che i movimenti 3. e 4. non generano 1-manici di valenza 0 né laghi non semplicemente connessi, il numero di iterate del Passo 3 è limitato dal numero (finito) degli 1-manici e dei laghi.

Si è già osservato in precedenza che l'effetto dei movimenti sulla boccia d'omologia è quello di trasformarla nell'unione disgiunta di bocce d'omologia; resta da far vedere la doppia implicazione finale. Se M è una boccia, ogni volta che si effettua uno dei movimenti 3. e 4., che sono gli unici a modificare topologicamente la varietà, non si fa altro che tagliare M lungo un disco propriamente immerso e quindi si ottengono due nuove bocce. Viceversa, se M non fosse una boccia, non sarebbe possibile tagliandola lungo un disco propriamente immerso sconnetterla in due bocce, perché reincollando queste ultime lungo il disco si otterrebbe una boccia. \square

Definizione 2.1.4. *Il passaggio dalla decomposizione ρ alla decomposizione ridotta ρ' descritto nel Lemma 2.1.3 è detto riduzione.*

Proposizione 2.1.5. *Sia ρ una decomposizione a manici ridotta non banale di una boccia d'omologia M . Allora ogni sfera S parallela al bordo rispetto a ρ in M è 1-normale.*

Dimostrazione. Bisogna controllare che siano verificate tutte le asserzioni della Definizione 1.4.1. Per quanto riguarda l'andamento di S nei 2-manici la conclusione è immediata: sia $B^2 \times I$ un 2-manico di ρ ; allora $S \cap (B^2 \times I) = B^2 \times \{\varepsilon, 1 - \varepsilon\}$, con $0 < \varepsilon < 1$. Per gli 1-manici, invece, non è sufficiente affermare che S ne rispetta la struttura prodotto, ma bisogna controllare che nell'intersezione tra S e gli 1-manici non compaiano componenti che individuino sulle isole curve chiuse o *ritorni*; questo potrebbe verificarsi solo in presenza di 1-manici di valenza 0 o 1, ma l'ipotesi che ρ sia ridotta garantisce proprio che tali 1-manici non possano esistere. Infine, si può asserire che S interseca gli 0-manici lungo dei dischi; se così non fosse, S individuerrebbe su uno 0-manico una superficie avente come bordo più di una

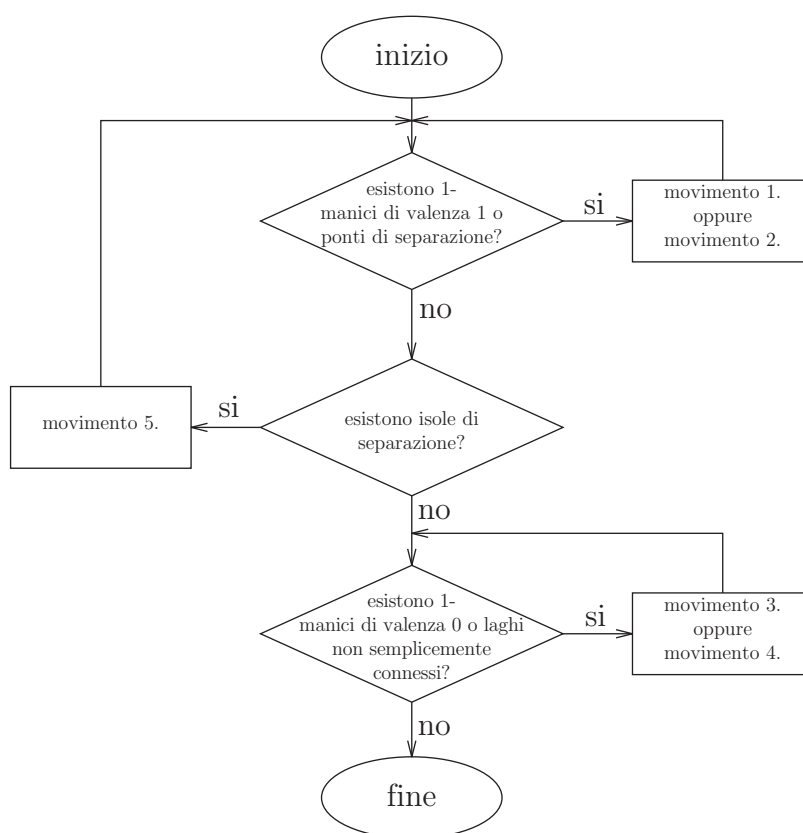


Figura 2.3: Algoritmo di riduzione.

curva chiusa, ma ciò è impossibile perché in questo modo le isole ed i ponti sul bordo dello 0-manico formerebbero componenti connesse disgiunte, cioè esisterebbero laghi non semplicemente connessi, contrariamente all'ipotesi di riduzione. Tenendo quindi conto del fatto che S interseca ogni 2-manico esattamente due volte, è immediato concludere che essa è 2-normale. In realtà, si riesce a provare di più; infatti, il bordo di un disco elementare parallelo al bordo è, in particolare, parallelo al bordo di un lago; non esistendo ponti di separazione, quando ci si muove lungo la sponda di un lago non si attraversa mai due volte lo stesso ponte prima di aver concluso tutto il percorso; per cui il bordo di un disco elementare parallelo al bordo attraversa i ponti effettivamente una sola volta. La proposizione è così definitivamente provata.

L'ipotesi di non banalità interviene solo ad escludere l'evenienza che M sia una boccia; in tal caso l'unica decomposizione a manici ridotta possibile sarebbe quella costituita da un solo 0-manico e una sfera S parallela al bordo non potrebbe essere 2-normale rispetto a questa decomposizione. \square

2.2 Divisione lungo una sfera 2-normale

Si descriverà ora un altro movimento su una decomposizione a manici detto *divisione-perforazione*. Sia ρ una decomposizione a manici di una boccia d'omologia M tale che ogni sfera parallela al bordo sia 2-normale e si supponga che M contenga una sfera 2-normale S non parallela al bordo (rispetto a ρ). Il movimento si realizza in due passi.

Divisione. Siano M_1 e M' le varietà ottenute tagliando M lungo S ; più precisamente, sia M' quella che contiene il bordo ∂M e sia M_1 quella che invece non lo contiene. Si consideri quindi la successione di Mayer-Vietoris relativa alla coppia (M_1, M') , dove si è posto $M_1 \cap M' = S$ e $M_1 \cup M' = M$,

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(M) \rightarrow H_n(S) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(M_1) \oplus H_n(M') \rightarrow H_n(M) \rightarrow \cdots$$

Poiché M è una boccia d'omologia, si ha $H_n(M) \cong 0$, per $n \geq 1$; allora l'omomorfismo di gruppi φ_1 è una biezione, per cui $H_1(M_1) \oplus H_1(M') \cong H_1(S) \cong 0$. Quindi, essendo anche $\partial M_1 = S \cong S^2$, dalla Proposizione 1.2.7 segue che M_1 è una boccia d'omologia. Per vedere che la varietà M' è omologa a $S^2 \times I$, resta da provare che $H_2(M') \cong \mathbb{Z}$ e $H_3(M') \cong 0$; la prima discende dalla concomitanza dei seguenti fatti: φ_2 è un isomorfismo, $H_2(S) \cong \mathbb{Z}$ e $H_2(M_1) \cong 0$; la seconda, invece, da: φ_3 è un isomorfismo e $H_3(S) \cong H_3(M_1) \cong 0$.

Dal momento che la divisione di M avviene lungo una superficie 2-normale, ogni manico della decomposizione ρ viene spezzato in manici dello stesso indice, per cui si ottiene una nuova decomposizione a manici ρ' per la 3-varietà $M_1 \cup M'$; si osservi inoltre che tagliando un 1-manico C lungo una striscia in $C \cap S$ si ottengono due 1-manici C_1 e C' tali che $\gamma(C_1) + \gamma(C') = \gamma(C)$; in definitiva si ha che $c(\rho') = c(\rho)$.

Prima di descrivere il secondo passo del movimento, bisogna introdurre della notazione ed un lemma. Dopo aver osservato che il bordo $\partial M'$ è composto da due sfere, si supponga di *colorarne* una di bianco e l'altra di nero; poiché ogni manico di ρ' in M' incontra il bordo, si suddividono tali manici in *bianchi*, *neri* e *bicolori*, a seconda che il loro bordo incontri rispettivamente soltanto la componente bianca, soltanto la nera oppure entrambe. La stessa terminologia si usa per i ponti e le isole.

Lemma 2.2.1. *Esiste un 1-manico $C \in \rho'$ contenuto in M' che è bicolore e ha valenza $v(C) \geq 3$.*

Dimostrazione. Poiché la varietà M' è connessa, sicuramente esistono manici bicolori; in particolare ci saranno 1-manici bicolori, incollati a 0-manici bicolori e a 2-manici bicolori. Si osservi che gli 1-manici bicolori sono stati

ottenuti mediante il taglio di 1-manici di ρ lungo S ; essendo 2-normale, S non avrebbe potuto intersecare 1-manici di valenza 0, né di valenza 1 rispettivamente per la 2. e la 3. della Definizione 1.4.1; per cui gli 1-manici bicolori non possono avere valenza inferiore a 2.

Si assuma che ogni 1-manico bicolore abbia valenza 2; allora l'unione delle isole e dei ponti bicolori nel bordo di ciascun 0-manico bicolore è costituita da anelli disgiunti. Poiché, come si dimostrerà, tutti i laghi sono semplicemente connessi, allora il bordo di ogni 0-manico bicolore contiene un solo anello; ne segue che tutti i manici della decomposizione ρ' in M' sono bicolori, per cui su ognuno può essere immaginata una struttura prodotto $B^2 \times I$ in cui i dischi $B^2 \times \{0\}$ e $B^2 \times \{1\}$ rappresentano il bordo bianco ed il bordo nero, rispettivamente; tale struttura può essere opportunamente raccordata nelle intersezioni dei manici, in modo da determinare una struttura prodotto $S^2 \times I$ su tutta la 3-varietà M . Ma ciò contraddice l'ipotesi che la sfera S non sia parallela al bordo.

Resta da provare che non possono esistere laghi non semplicemente connessi; questo discende direttamente dall'ipotesi che ogni sfera parallela al bordo sia 2-normale. Sia, per assurdo, B uno 0-manico contenente sul suo bordo un lago non semplicemente connesso L ; l'intersezione di una sfera parallela al bordo con B avrebbe una componente (parallela a L) che non è un disco, contravvenendo alla 4. della Definizione 1.4.1. La stessa caratteristica viene ereditata da ρ' in quanto la divisione di M lungo S non genera nuovi laghi non semplicemente connessi. \square

Perforazione. In accordo col Lemma 2.2.1, esiste un 1-manico bicolore C di valenza $v(C) \geq 3$; allora almeno uno dei 2-manici incollati a C deve essere anch'esso bicolore. Il secondo passo del movimento consiste nella rimozione di questo 2-manico, che si indicherà con $P = B^2 \times I$; si ottiene una 3-varietà M_2 il cui bordo diventa connesso ed omeomorfo alla sfera e tale che $H_1(M_2) \cong 0$. Infatti il bordo di M_2 si ottiene togliendo da ciascuna delle sfere del bordo di M' un disco ed incollando sui bordi dei due dischi così ottenuti un anello, cioè

$$\partial M_2 = \partial M' \setminus (B^2 \times \{0, 1\}) \cup (\partial B^2 \times I);$$

inoltre, essendo $M_2 \cong M'/P$, si ha che $H_1(M_2) \cong H_1(M'/P) \cong H_1(M', P)$, e questa relazione, insieme all'esattezza della successione

$$H_1(P) \rightarrow H_1(M', P) \rightarrow H_1(M') \rightarrow \tilde{H}_0(P)$$

e alla banalità dei gruppi $H_1(P)$, $H_1(M')$ e $\tilde{H}_0(P)$, garantisce che $H_1(M_2) \cong 0$. Per la Proposizione 1.2.7, quindi, M_2 è una boccia d'omologia.

La complessità della decomposizione risultante su M_2 è strettamente minore di quella di su M' , in quanto, eliminando un 2-manico incollato a un

1-manico di valenza non inferiore a 3, come è C , si riduce strettamente la complessità di quest'ultimo.

È immediato osservare che, se M è una boccia, allora anche M_1 e M_2 lo sono: infatti, per il Teorema di Schönflies per le varietà p.l. (Teorema 1.2.4), mediante la divisione lungo una sfera si sconnette M in due componenti di cui una, M_1 , è ancora una boccia e l'altra, M' , è omeomorfa a $S^2 \times I$; quando poi si applica la perforazione a quest'ultima si ottiene di nuovo una boccia, M_2 . Analogamente vale il viceversa.

Quanto detto finora prova completamente il seguente

Lemma 2.2.2. *Un movimento di divisione-perforazione trasforma una decomposizione a manici ρ di una boccia d'omologia M in una decomposizione a manici ρ' di un'unione disgiunta $M_1 \cup M_2$ di bocce d'omologia tale che $c(\rho') < c(\rho)$. Inoltre M è una boccia se e solo se anche M_1 e M_2 lo sono.*

2.3 L'algoritmo

Sia N una 3-varietà chiusa. Se $H_1(N) \not\cong 0$, allora N non è una 3-sfera. Se $H_1(N) \cong 0$, si consideri la 3-varietà M ottenuta togliendo da N una boccia aperta e si scelga una decomposizione a manici ρ per M . M è una boccia d'omologia, in quanto $\partial M \cong S^2$ e $H_1(M) \cong 0$; quest'ultimo fatto discende dall'esattezza della successione di Mayer-Vietoris

$$H_2(N) \rightarrow H_1(S^2) \rightarrow H_1(B^2) \oplus H_1(M) \rightarrow H_1(N).$$

Applicando i movimenti di riduzione (Lemma 2.1.3) si ottiene una decomposizione a manici ridotta ρ' di M' con complessità $c(\rho') \leq c(\rho)$, dove M' è una unione disgiunta di bocce d'omologia che sono bocce se e solo se lo è anche M . Ora, se ρ' non è banale si ricorre all'algoritmo di Haken per trovare un'eventuale sfera 2-normale non parallela al bordo; se la ricerca ha successo si effettua un movimento di divisione-perforazione (Lemma 2.2.2) lungo la sfera trovata ottenendo una nuova varietà M'' con decomposizione a manici ρ'' di complessità $c(\rho'') < c(\rho')$; M'' è ancora una volta unione disgiunta di bocce d'omologia che sono bocce se e solo se lo è M' . A questo punto l'algoritmo riprende con la riduzione di ρ'' e si arresta quando si giunge ad una decomposizione a manici ridotta che non ammette sfere 2-normali; si osservi che l'algoritmo risulta essere finito perché ad ogni procedimento di riduzione-divisione-perforazione la complessità diminuisce strettamente.

La decomposizione a manici che viene restituita al termine dell'algoritmo contiene tutte le informazioni per stabilire se la 3-varietà N sia omeomorfa

a S^3 . Se la decomposizione a manici è banale, allora $N \cong S^3$; mentre se non è banale, allora $N \not\cong S^3$.

La correttezza di questa conclusione si fonda sulla validità del Teorema di Rubinstein-Thompson che verrà enunciato nella prossima Sezione ed alla cui dimostrazione sarà dedicata tutta la parte restante di questo Capitolo.

2.4 Il teorema di Rubinstein-Thompson

Teorema 2.4.1 (Rubinstein-Thompson [16, 19]). *Per ogni decomposizione a manici ridotta e non banale di una boccia B esiste una sfera $S \subset B$ 2-normale non parallela al bordo (rispetto alla decomposizione a manici).*

Dimostrazione. (*Traccia*) Si farà ricorso ai concetti di link, superfici impermeabili, cilindri invertiti e *thin position* introdotti rispettivamente nelle Sezioni 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8.

Tra i link si considera in particolare il link duale L_ρ , associato alla decomposizione a manici ρ di B , costituito da un arco trasversale per ogni 2-manico. Il fatto che ρ sia ridotta e non banale implica che il link L_ρ non sia banale (Lemma 2.5.2).

Sfruttando una condizione minimale insita nella definizione di *thin position* per i link, si riesce a provare che se L_ρ è non banale, allora esiste in B una sfera impermeabile S' che non ammette cilindri invertiti (Teorema 2.8.11).

La nozione di superficie impermeabile è in qualche modo vicina a quella di superficie 2-normale; in particolare, a partire da ogni sfera impermeabile S' è possibile costruire una sfera 2-normale S non parallela al bordo (rispetto a ρ), quando S' non ammette cilindri invertiti (Teorema 2.7.3).

Il Teorema è così completamente dimostrato. \square

2.5 Non banalità del link duale

Definizioni 2.5.1. *Sia ρ una decomposizione a manici della boccia d'omologia M e sia $B^2 \times I$ un 2-manico di ρ .*

Fissato $p \in B^2$, un arco $l = \{p\} \times I$ è detto trasversale.

Un link L in M è un'unione di archi propriamente immersi in M (senza componenti chiuse). Il link $L = l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_k$ si dice banale se esistono dischi disgiunti D_1, D_2, \dots, D_k in M tali che $D_i \cap L = l_i$ e $\partial D_i = D_i \cap (l_i \cup \partial M)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Un link $L_\rho \subset M$ costituito da un arco trasversale per ogni 2-manico è detto link duale della decomposizione ρ .

Lemma 2.5.2. *Se ρ è ridotta, allora L_ρ è non banale.*

Dimostrazione. Si dimostrerà una tesi ancora più forte: si farà vedere addirittura che L_ρ non contiene alcuna componente banale. Si supponga per assurdo che esista una componente l di L_ρ banale; a meno di isotopie di M , è possibile immaginare che l sia contenuto in uno dei ponti che delimitano il 2-manico P corrispondente a l . Poiché l è banale, esiste un disco $D \subset M$ tale che $D \cap L_\rho = l$ e $\partial D = D \cap (l \cup \partial M)$.

Ora, essendo $D \cap L_\rho = l$, è possibile costruire un'isotopia di M che tiene fermo L_ρ in modo che D risulti contenuto nell'unione degli 0-manici e degli 1-manici. Si consideri, a tal proposito, l'intersezione tra il disco D ed un qualsiasi 2-manico diverso da P ; se si rappresentano il 2-manico come il prodotto $B^2 \times I$ ed il corrispondente arco del link come $\{p\} \times I$, con $p \in B^2$, è chiaro che nessuna componente dell'intersezione può essere della forma $B^2 \times \{q\}$, per qualche $q \in I$, perché altrimenti incontrerebbe l'arco del link. Ogni altro tipo di intersezione può essere fatto scorrere fuori dal 2-manico mediante un'isotopia costruita in questo modo: essendo il numero delle componenti dell'intersezione finito, è possibile determinare un raggio ε per cui il cilindro $B^2(p, \varepsilon) \times I \subset B^2 \times I$ non incontra il disco D ; allora si estenda questo cilindro fino a coprire tutto il 2-manico con l'accortezza di tenere fermo l'asse $\{p\} \times I$ (è possibile fare in modo che l'isotopia sia ferma anche sugli altri archi del link L_ρ); al termine di questa deformazione ogni componente dell'intersezione del disco D col 2-manico risulta spostata fuori dal 2-manico stesso.

Quindi si ponga D in posizione generale rispetto all'unione U delle isole e si prenda in esame l'intersezione $U \cap D$: questa è costituita da un sistema finito di curve tutte propriamente immerse in D ; infatti, l'esistenza di archi di $U \cap D$ non propriamente immersi in D sarebbe possibile solo nel caso in cui D intersechi un ponte, eventualità, questa, che è stata esclusa in precedenza.

Si considerino tutte le curve chiuse di $U \cap D$ contenute in D ; ciascuna di queste delimita un disco su D che può contenere o meno altre curve chiuse; si scelga quindi una curva chiusa α che delimiti un disco D' su D che non contenga altre curve chiuse. Siano J , B e C rispettivamente l'isola, lo 0-manico e l'1-manico contenenti α ; il disco D' è contenuto tutto in C oppure tutto in B in quanto per uscire da B o da C dovrebbe attraversare un'isola, ma questo non è possibile perché D' non può contenere altre curve chiuse. Quindi, D' e il disco D'' che α delimita su J formano il bordo di una 3-cella in M ; si vorrebbe deformare D facendo scorrere il disco D' lungo la 3-cella fino ad attraversare il disco D'' in modo da eliminare l'intersezione α , ma ci potrebbero essere degli ostacoli rappresentati da altre componenti di D contenute nella 3-cella. Infatti, in generale è possibile che il disco D'' contenga altre curve chiuse di $U \cap D$ al suo interno; queste potranno essere

di due tipi a seconda che delimitino o meno su D dischi che non contengono altre componenti di $U \cap D$.

Si procede allora nel seguente modo: se esiste una curva chiusa $\alpha_1 \subset D''$ appartenente all'intersezione $U \cap D$ tale che il disco D'_1 che essa delimita in D non contenga altre componenti di $U \cap D$, si cerca di eliminare α_1 prima di α ; ripetendo questo ragionamento si arriverà a considerare, dopo un numero finito di passi, una curva chiusa $\alpha_k \subset D''$ appartenente a $U \cap D$ tale che:

- il disco D'_k che essa delimita su D non contiene altre componenti di $U \cap D$;
- il disco D''_k che essa delimita in D'' non contiene altre curve chiuse di $U \cap D$ che delimitano dischi in D che non contengono altre componenti di $U \cap D$.

Allora, se $D''_k \cap (U \cap D) = \emptyset$, si può deformare D'_k attraverso D''_k eliminando l'intersezione α_k ; altrimenti, $D''_k \cap (U \cap D) = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_l$, dove β_i sono curve chiuse che delimitano dischi in D che contengono altre componenti di $U \cap D$; queste curve sono tali che esistono due indici i, j per cui β_i e β_j delimitano dischi contenuti l'uno nell'altro sia in D che in D''_k , ovvero individuano due anelli che formano il bordo di un toro pieno che non interseca D al suo interno; quindi è possibile deformare D attraverso questo toro pieno eliminando le intersezioni β_i, β_j . In questo modo si possono eliminare prima tutte le intersezioni β_i , con $i = 1, 2, \dots, l$, e poi anche α_k . Procedendo a ritroso per $\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \dots, \alpha_1$, si riesce infine ad eliminare l'intersezione α .

Dopo aver eliminato in questo modo tutte le curve chiuse dell'intersezione di D con le isole, si passi ora a considerare gli archi propriamente immersi in ciascuna isola. Per eliminarli si proceda in modo analogo a quanto fatto per le curve chiuse. Ciascuno di questi archi individua su D un arco propriamente immerso che suddivide D in due dischi di cui uno non contiene l'arco trasversale l sul suo bordo (chiarmente l non può intersecare un arco su un'isola); si scelga, quindi, un arco γ che delimiti su D un disco D' che non intersechi l né contenga altre componenti di $U \cap D$. Siano ancora una volta J, B e C rispettivamente l'isola, lo 0-manico e l'1-manico contenenti γ ; come sopra, il disco D' è contenuto tutto in C oppure tutto in B .

Nel caso in cui $D' \subset C$, si vorrebbe deformare D' schiacciandolo sull'isola J lungo la 3-cella delimitata da $D', \partial C \cap \partial M$ e J ; potrebbero però esistere altre componenti di D contenute nella 3-cella che ostacolerebbero la deformazione. Allora si procede analogamente al caso dell'eliminazione della curva chiusa α , facendo questa volta distinzione tra archi $\gamma_i \subset J$ che delimitano su D dischi che non contengono altre curve di $U \cap D$ ed archi $\delta_i \subset J$ che delimi-

tano su D dischi che contengono altre curve di $U \cap D$. Dopo aver eliminato tutti gli ostacoli, si può finalmente rimuovere anche l'intersezione γ .

Se $D' \subset B$, poiché il bordo $\partial D' \setminus \gamma$ non interseca isole né ponti, tutte le isole e tutti i ponti devono trovarsi su ∂B dalla stessa parte rispetto a $\partial D' \setminus \gamma$, altrimenti J sarebbe un'isola di separazione, venendo meno in tal modo l'ipotesi che la decomposizione a manici ρ sia ridotta. Quindi è possibile effettuare le stesse deformazioni viste sopra sfruttando proprio la parte di ∂B che non contiene isole né ponti.

In conclusione, si può assumere che, a meno di isotopie che tengono fermo il link L_ρ , il disco D sia tutto contenuto nello 0-manico sul cui bordo giace l ; allora l'arco $\partial D \setminus l$ sta in un lago e connette due lati di un ponte, ma ciò produce un assurdo perché, essendo ρ ridotta, non esistono ponti di separazione. \square

2.6 Dischi di compressione e superfici impermeabili

Dato un link L in una boccia d'omologia M , si consideri una sfera bidimensionale $S \subset M$ trasversale al link L . Come già osservato, S sconnette M in due parti che si indicheranno con la seguente terminologia: si dirà *superiore* la parte omologa a $S^2 \times I$ ed *inferiore* quella omologa alla boccia.

Definizioni 2.6.1. *Sia γ un arco nella boccia d'omologia M con gli estremi sulla sfera S . Si dice che γ è un arco superiore (inferiore) se esiste per ciascuno degli estremi un intorno contenuto nella parte superiore (inferiore) di M .*

Un disco $D \subset M$ è detto disco di compressione superiore (inferiore) per S se $\partial D = \alpha \cup \beta$, dove α e β sono rispettivamente un arco superiore (inferiore) ed un arco in S tali che $D \cap L = \alpha$ e $\partial\alpha = \partial\beta$. Inoltre, se $\text{Int } D \cap S = \emptyset$ si dice che D è un disco di compressione strettamente superiore (inferiore). In entrambi i casi l'arco β è detto base di D .

Un disco di compressione superiore ed uno di compressione inferiore per S sono indipendenti se l'intersezione dei loro archi base è vuota o consiste al più del solo estremo in comune.

Una sfera S in M è impermeabile rispetto al link L se ammette dischi di compressione sia strettamente superiore che strettamente inferiore, ma non ne ammette una coppia indipendente.

Si osservi che l'impermeabilità di una sfera rispetto al link L è invariante per isotopie di M che tengono fermo L . Si vuol far vedere che la nozione di impermeabilità è vicina a quella di 2-normalità.

Sia ρ una decomposizione a manici della boccia d'omologia M .

Definizione 2.6.2. *Una superficie $F \subset M$ è detta quasi k -normale rispetto a ρ se:*

1. *l'intersezione di F con ogni 2-manico $B^2 \times I$ è del tipo $B^2 \times G$, dove G è un insieme finito in I ;*
2. *l'intersezione di F con ogni 1-manico $I \times B^2$ è del tipo $I \times H$, dove H è un insieme finito di archi disgiunti propriamente immersi in B^2 ;*
3. *nessuno degli insiemi H contiene un ritorno, cioè un arco i cui estremi sono contenuti nella stessa componente connessa dell'intersezione di un'isola con i ponti;*
4. *ogni curva chiusa nell'intersezione di F con il bordo degli 0-manici è contenuta in un'isola oppure interseca ogni ponte al più in k segmenti.*

La definizione di superficie quasi k -normale si differenzia da quella di superficie k -normale solo per il fatto che quest'ultima non ammette curve chiuse nell'intersezione con le isole né componenti che non siano dischi nell'intersezione con ogni 0-manico.

Sia L_ρ il link duale rispetto alla decomposizione a manici ρ della boccia d'omologia M .

Lemma 2.6.3. *Per ogni sfera $S \subset M$ impermeabile rispetto a L_ρ esiste un'isotopia ferma su L_ρ tra S ed una sfera quasi k -normale, per qualche k .*

Dimostrazione. La sfera S può essere trasformata, mediante un'isotopia che tiene fermo L_ρ , in modo che l'intersezione di S con ogni 2-manico $B^2 \times I$ sia costituita da fogli del tipo $B^2 \times \{q\}$, con $q \in I$; infatti, essendo S trasversale a L_ρ , è possibile scegliere per ogni 2-manico un intorno $B^2(p, \varepsilon) \times I$ del corrispondente arco del link $\{p\} \times I$, con $B^2(p, \varepsilon) \subset B^2$, in modo che $S \cap (B^2(p, \varepsilon) \times I) = B^2(p, \varepsilon) \times K$, con K sottoinsieme finito di I . A questo punto si espande, mediante un'isotopia che tiene fermo il link, l'intorno $B^2(p, \varepsilon) \times I$ fino ad invadere completamente il 2-manico, estendendo così la struttura prodotto voluta su tutto il 2-manico.

Si ponga S in posizione generale rispetto alle isole. Il problema principale nella trasformazione di S in superficie quasi 2-normale riguarda l'eliminazione dei ritorni. Si dice che un ritorno v è *superiore (inferiore)* se l'arco l_v nell'intersezione delle isole e dei ponti delimitato dagli estremi di v è contenuto nella parte superiore (inferiore) di M . Si osservi che ogni ritorno che ritaglia sull'isola su cui giace un disco che non contiene altre componenti

dell'intersezione tra S e l'isola stessa è necessariamente superiore o inferiore. Ogni ritorno superiore (inferiore) determina un disco di compressione superiore (inferiore) per S ; quindi una sfera impermeabile non può ammettere contemporaneamente un ritorno superiore ed uno inferiore, poiché ogni coppia di tali ritorni determinerebbe una coppia di dischi di compressione indipendenti.

Il resto della dimostrazione prevede alcuni passi intermedi.

- 1a. S è isotopa ad una sfera S_0 contenente un ritorno inferiore.

Dal momento che S è una sfera impermeabile, sia D un disco di compressione strettamente inferiore per S . Poiché D interseca solo un arco di L_ρ , è possibile spingere D fuori da ogni 2-manico eccetto quello, P , contenente l'arco $D \cap L_\rho$, come si è già visto nel corso della dimostrazione del Lemma 2.5.2. Inoltre, si può fare in modo che l'intersezione $D \cap P$ sia costituita da una striscia che unisca l'arco $D \cap L_\rho$ con un arco nel bordo di un'isola J ; la parte restante D' del disco D è un disco contenuto nell'unione degli 0-manici e degli 1-manici. È immediato a questo punto costruire un'isotopia su M che, restando ferma sui 2-manici, porti D' su un disco $D'' \subset J$; è sufficiente deformare D' lungo se stesso fintantoché non sia contenuto interamente nello 0-manico oppure nell'1-manico adiacenti all'isola J ; quindi si proietta su J badando a non generare delle autointersezioni. Questa isotopia porta S su una sfera S_0 con un ritorno inferiore; tale è infatti l'arco $\partial D'' \setminus \partial J$.

- 1b. S è isotopa ad una sfera S_1 contenente un ritorno superiore.

Si dimostra come nel caso precedente.

2. Ogni isotopia di M che porta S_0 su S_1 può essere presentata come composizione di isotopie ciascuna delle quali è l'identità su tutta la varietà tranne che in un intorno di un'isola.

Questo discende dal fatto generale che ogni isotopia di una varietà può essere ottenuta come composizione di traslazioni locali, ovvero di isotopie che sono l'identità ovunque tranne che in una piccola boccia (si veda ad esempio [2]).

3. Sia S' una sfera in M tale che, per ogni 1-manico $I \times B^2$, S' non abbia ritorni in almeno una delle isole $\{0\} \times B^2$ e $\{1\} \times B^2$. Allora S' è isotopa ad una sfera senza ritorni.

Fissato un 1-manico $I \times B^2$ con ritorni su un'isola, sia $O_\varepsilon = [0, \varepsilon] \times B^2$ oppure $O_\varepsilon = [1 - \varepsilon, 1] \times B^2$ un piccolo intorno dell'isola che non ha ritorni. È possibile estendere isotopicamente O_ε fino ad invadere l'intero

1-manico $I \times B^2$, rimuovendo in questo modo i ritorni dell'altra isola. Ripetendo questo procedimento per ogni 1-manico si ottiene una sfera senza ritorni.

Si costruisca un'isotopia, ferma sui 2-manici, tra S_0 e S_1 componendo le due isotopie descritte nei passi 1a. e 1b.; si consideri quindi una successione di sfere ottenute a partire da S_0 mediante la progressiva applicazione delle traslazioni descritte nel passo 2.; poiché tale successione contiene la sfera impermeabile S come passo intermedio, tutte le sfere della successione sono impermeabili. Allora, non potendo nessuna delle sfere contenere sia un ritorno superiore che uno inferiore ed avendo S_0 un ritorno inferiore e S_1 uno superiore, deve necessariamente verificarsi uno dei seguenti casi: o una sfera della successione non ha ritorni, o almeno una traslazione trasforma una sfera S' con un ritorno inferiore in una sfera S'' con un ritorno superiore. In quest'ultimo caso, poiché S' e S'' coincidono su tutte le isole tranne una, tutti i ritorni di S' e S'' giacciono proprio su quella medesima isola. In virtù del passo 3., è allora possibile rimuovere tali ritorni.

In ogni caso, quindi, si è riusciti a provare l'esistenza di una sfera isotopa a S che non contiene ritorni; per garantire che tale sfera sia anche quasi k -normale, per qualche k , rimane da controllare che essa rispetti la struttura prodotto di ogni 1-manico. Se questo non accade si possono facilmente sistemare le cose applicando di nuovo le isotopie del passo 3. \square

Lemma 2.6.4. *Ogni sfera $S \subset M$ impermeabile e quasi k -normale rispetto ad una data decomposizione a manici ρ è quasi 2-normale.*

Dimostrazione. Si supponga che S sia quasi k -normale, con $k > 2$, ma non quasi 2-normale; sia γ una curva chiusa nell'intersezione di S con il bordo di uno 0-manico B che interseca un ponte b in più di due segmenti. Si scelgano i segmenti I_1 , I_2 e I_3 nell'intersezione $\gamma \cap b$ in modo che I_2 sia l'unico segmento di $\gamma \cap b$ tra I_1 e I_3 in b . Si fissi su γ un'orientazione tale che, percorrendo γ , si incontrino i segmenti I_1 , I_2 e I_3 nell'ordine. Per ogni $i = 1, 2, 3$, si indichino con x_i^- e x_i^+ rispettivamente il primo e l'ultimo estremo di I_i secondo l'orientazione. Sia l_1 l'arco tra x_1^+ e x_2^- contenuto nell'intersezione tra b e l'isola sul cui bordo giacciono i punti x_1^+ e x_2^- ; la definizione di l_1 è ben posta perché il caso che x_1^+ e x_2^- appartengano a due componenti distinte dell'intersezione di b con le isole non è possibile; infatti, l'ipotesi che i segmenti I_1 , I_2 e I_3 siano consecutivi in b è incompatibile col fatto che x_1^+ e x_2^- appartengano a due componenti distinte dell'intersezione di b con le isole in quanto insieme condurrebbero all'assurda conclusione che S abbia delle autointersezioni. Analogamente si definisce l_2 l'arco tra x_2^+ e x_3^- contenuto

nell'intersezione tra b e l'isola sul cui bordo giacciono i punti x_2^+ e x_3^- ; valgono per l_2 le stesse osservazioni espresse per l_1 .

Ora, l'arco orientato in γ da x_1^+ a x_2^- e l'arco l_1 delimitano un disco D_1 in ∂B , così come l'arco in γ tra x_2^+ e x_3^- e l'arco l_2 delimitano un disco D_2 in ∂B ; si osservi che ogni curva chiusa su ∂B delimita due dischi; D_1 e D_2 sono scelti nell'unico modo possibile per cui non si intersechino.

Essendo S una superficie chiusa, si ha $\partial D_1, \partial D_2 \subset \text{Int } M$; ciò non vieta però che i dischi D_1 e D_2 possano intersecare il bordo ∂M al loro interno; per evitare ciò è opportuno spingerli un po' all'interno di M , tenendo fisso il loro bordo. A questo punto, per ogni $i = 1, 2$, si incollì a D_i una striscia A_i tutta contenuta nel 2-manico relativo al ponte b e tale che $\partial A_i \subset l_i \cup L_\rho \cup S$ (Figura 2.4). Si ottengono così due dischi: uno di compressione strettamente superiore ed uno di compressione strettamente inferiore; tali dischi sono anche indipendenti poiché i loro archi di base hanno un estremo in comune. Questo contraddice l'ipotesi che S sia impermeabile e l'assurdo discende dall'aver supposto che S non fosse 2-normale. \square

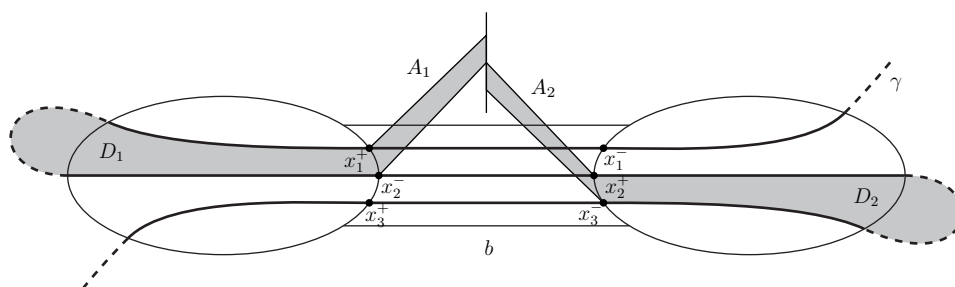


Figura 2.4: Dischi di compressione indipendenti.

2.7 Cilindri invertiti

Definizione 2.7.1. *Data una 3-varietà M , si definisce cilindro in M l'immagine $K = \lambda(B^2 \times I)$ di un'immersione $\lambda : B^2 \times I \rightarrow M$.*

I dischi $\partial_0 K = \lambda(B^2 \times \{0\})$ e $\partial_1 K = \lambda(B^2 \times \{1\})$ sono detti rispettivamente base inferiore e superiore del cilindro.

Per ogni punto $p \in B^2$, la curva $\lambda(\{p\} \times I)$ è detta generatore del cilindro.

Siano L un link in una boccia d'omologia M e $S \subset M$ una sfera trasversale a L .

Definizione 2.7.2. *Un cilindro $K \subset M$ è detto cilindro invertito per S rispetto a L se:*

1. $L \cap K$ è unione di generatori;
2. $\partial_1 K \subset \partial M$ e $\partial_0 K \subset S$;
3. la base superiore $\partial_1 K$ contiene tutti gli estremi di L ;
4. un piccolo intorno di $\partial_0 K$ in K giace nella parte inferiore di M rispetto a S .

Teorema 2.7.3. *Sia ρ una decomposizione a manici di una sfera d'omologia M e sia L_ρ un link duale. Se M contiene una sfera impermeabile che non ammette cilindri invertiti, allora M contiene una sfera 2-normale non parallela al bordo (rispetto a ρ).*

Dimostrazione. Sia $S \subset M$ una sfera impermeabile che non ammette cilindri invertiti. Dai Lemmi 2.6.3 e 2.6.4 segue che esiste un'isotopia di M , che tiene fermo il link L_ρ , che trasforma la sfera S in una sfera S' quasi 2-normale. Si presenti S' come somma connessa di sfere 2-normali, cioè come un insieme S_1, S_2, \dots, S_k di sfere 2-normali connesse mediante sottili tubi; questi tubi possono essere annodati, concatenati tra loro e possono passare uno dentro l'altro. Si possono ottenere le sfere S_1, S_2, \dots, S_k in questo modo: si rimpiazza l'intersezione di S con ogni 0-manico B con un insieme di dischi, sempre contenuti in B , che abbiano lo stesso bordo; si rimuovano quindi tutte le sfere contenute nell'unione degli 0-manici e degli 1-manici; le sfere rimanenti costituiscono l'insieme cercato.

Per dimostrare che queste ultime sono 2-normali rispetto alla decomposizione a manici ρ si ragioni nel seguente modo: la sfera S' è quasi 2-normale, per cui potrebbero esistere alcune componenti dell'intersezione tra S' e gli 0-manici che non sono dei dischi come pure alcune componenti dell'intersezione di S' con gli 1-manici che sono degli anelli. Per ogni 0-manico B , ogni componente dell'intersezione $S' \cap B$ è una superficie il cui bordo è costituito da un certo numero m di curve chiuse $\gamma_i \subset \partial B$, con $i = 1, 2, \dots, m$; mediante l'operazione descritta sopra, si sostituisce ciascuna di queste superfici con m dischi aventi ognuno come bordo una delle curve γ_i . In questo modo si sconnette la sfera S' in tante sfere che sono ancora quasi 2-normali, poiché non sono state modificate le intersezioni con gli 1-manici ed i 2-manici, e che godono anche della proprietà di intersecare ogni 0-manico lungo dei dischi. Infine, la rimozione di tutte le sfere contenute nell'unione degli 0-manici e degli 1-manici elimina tutti gli anelli presenti nell'intersezione di S' con gli 1-manici. In definitiva, quindi, restano tutte sfere che soddisfano la condizione di 2-normalità.

Ottenute in questo modo le sfere 2-normali S_1, S_2, \dots, S_k , per verificare che $S' \cong S_1 \# S_2 \# \dots \# S_k$ è sufficiente ricordare che quando le intersezioni di

S' con gli 0-manici sono state rimpiazzate con dischi aventi lo stesso bordo non si è fatto altro che eliminare dei tubi che collegavano dischi in S' ; per definizione, la somma connessa si può realizzare proprio mediante un procedimento inverso ovvero tagliando dalle sfere dei dischi e incollando sui nuovi bordi tali tubi.

Si vuole provare che almeno una delle sfere S_1, S_2, \dots, S_k non è parallela al bordo (rispetto a ρ). Si supponga per assurdo che tutte le sfere siano parallele al bordo (rispetto a ρ). Se $k = 1$, cioè $S' = S_1$, allora si cade subito in contraddizione in quanto una sfera parallela al bordo non può ammettere dischi di compressione superiore; infatti essa interseca ogni arco l del link L_ρ esattamente in due punti in prossimità del bordo ∂M e questi due punti delimitano in l un arco inferiore; quindi, se S_1 fosse parallela al bordo, il link L_ρ non conterrebbe nemmeno un arco superiore rispetto a S' , contraddicendo l'ipotesi che S' sia impermeabile.

Se $k \geq 2$, si osservi innanzitutto che, avendo assunto che tutte le sfere S_1, S_2, \dots, S_k siano parallele al bordo ed essendo esse disgiunte, esse delimitano necessariamente bocce d'omologia contenute propriamente l'una dentro l'altra; allora si può assumere, senza perdita di generalità, che S_1 sia la sfera più esterna tra quelle dell'insieme S_1, S_2, \dots, S_k e che S_2 sia quella successiva. Si consideri, quindi, la parte superiore U di M rispetto a S_2 ; essendo S_2 parallela al bordo, su U è possibile immaginare un struttura prodotto $S_2 \times I$ tale che $U \cap L_\rho = E \times I$, dove con E si indica un sottoinsieme finito di S_2 . Sia $D \subset S_2$ un disco contenente E che non interseca i tubi che raccordano le superfici 2-normali S_1, S_2, \dots, S_k , ovvero $E \subset S'$; allora esiste un intorno di D nella parte superiore U che giace *sotto* S_1 . Da tutto ciò segue che il cilindro $D \times I$ è un cilindro invertito per S' (Figura 2.5), conducendo di nuovo ad una contraddizione. \square

2.8 Thin position per i link

Ampiezza di un link

Sia $B = B^3(O, R)$ la boccia centrata nell'origine O e di raggio R immersa in \mathbb{R}^3 e sia $L \subset B$ un link tale che $O \notin L$. Si consideri la foliazione \mathcal{F} di $B \setminus \{O\}$ costituita dalle sfere S_r centrate in O e di raggio r , con $0 < r \leq R$.

Definizioni 2.8.1. *Le sfere di \mathcal{F} che hanno punti di tangenza con L sono dette singolari, mentre tutte le altre sono dette trasversali.*

L si dice in posizione generale (rispetto a \mathcal{F}) se:

1. *c'è solo un numero finito di sfere singolari in \mathcal{F} ;*

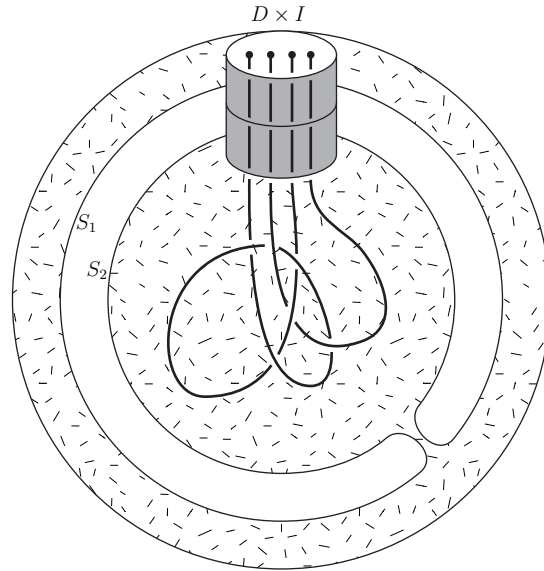


Figura 2.5: Cilindro invertito.

2. ogni sfera singolare in \mathcal{F} ha esattamente un punto di tangenza con L ;
3. ogni punto di tangenza è un minimo (locale) oppure un massimo (locale) rispetto alla restrizione su L della funzione altezza $h : B \rightarrow \mathbb{R}_+$, definita su ogni punto $x \in B$ come la distanza euclidea tra x e O .

Si rimuovano da B tutte le sfere singolari; si ottiene un insieme di 3-varietà, di cui una è una boccia aperta, una è omeomorfa a $S^2 \times (0, 1]$ e tutte le altre sono omeomorfe a $S^2 \times (0, 1)$. Una volta rimosse le sfere singolari, L risulta trasformato in una collezione \mathcal{L} di archi aperti e semi-aperti.

Definizione 2.8.2. Il numero complessivo $w(L)$ degli archi di \mathcal{L} è detto *ampiezza del link L rispetto alla foliazione \mathcal{F}* .

L'ampiezza di un link L è una proprietà instabile, dal momento che può variare se si applica un'isotopia a L . L'ampiezza si conserva se si considerano isotopie particolari, dette \mathcal{F} -regolari.

Definizione 2.8.3. Un'isotopia del link L è detta \mathcal{F} -regolare se ad ogni istante L è in posizione generale e se durante la trasformazione non si eliminano punti di minimo o di massimo per il link, né ne vengono generati di nuovi.

In realtà, l'ampiezza si conserva anche quando sono consentite autointersezioni di L , ovvero quando si ha a che fare con omotopie piuttosto

che con isotopie; è chiaro che deve comunque sussistere una condizione di \mathcal{F} -regolarità.

Definizione 2.8.4. *Un arco $l \subset B$ è detto superiore (inferiore) se esistono intorno dei suoi estremi che si trovano ad altezza superiore (inferiore) rispetto agli estremi stessi.*

Quando gli estremi si trovano alla stessa altezza r , questa definizione coincide con la Definizione 2.6.1 relativamente alla sfera S_r .

Lemma 2.8.5. *Sia $l \subset B$ un arco inferiore contenuto in un link $L \subset B$ in posizione generale. Si sostituisca l con un arco inferiore $l' \subset B$ avente gli stessi estremi in modo che l' abbia un solo minimo, che questo minimo sia maggiore del minimo assoluto di l e che il link $L' = (L \setminus l) \cup l'$ sia ancora in posizione generale. Allora $w(L') \leq w(L)$.*

Dimostrazione. Si prenda un arco inferiore $l'' \subset B$ avente gli stessi estremi di l in modo che ammetta un solo minimo e che questo minimo abbia altezza uguale a quella del minimo assoluto di l . Si consideri, quindi, il link $L'' = (L \setminus l) \cup l''$; ogni sfera singolare per L'' è chiaramente singolare anche per L in quanto tutti i minimi ed i massimi di $L'' \setminus l''$ coincidono con minimi e massimi di L e l'unico minimo di l'' si trova alla stessa altezza di un minimo per L (esattamente il minimo assoluto in l). Inoltre, per lo stesso motivo, il numero di archi di L'' compresi tra due sfere singolari successive è minore o uguale al numero di archi di L tra le stesse sfere; quindi, $w(L'') \leq w(L)$.

Ora si vuole deformare l'' su l' tenendo fissi gli estremi in modo che ad ogni istante l'' abbia un solo minimo e che l'altezza di questo minimo aumenti strettamente. Durante la deformazione l'' potrebbe intersecare $L'' \setminus l''$, ma questo fatto non costituisce un problema poiché, come è stato già osservato, l'ampiezza si conserva anche sotto omotopie \mathcal{F} -regolari. Più delicata è la situazione quando il punto di minimo di l'' passa attraverso un sfera singolare S_r di L' ; infatti si raggiunge una configurazione in cui L'' non è in posizione generale, per cui la deformazione non è più \mathcal{F} -regolare, con la conseguente perdita del controllo sull'ampiezza. Una più attenta analisi permette però di osservare che l'ampiezza non subisce cambiamenti troppo bizzarri; infatti, se S_r contiene un punto di minimo per L' l'ampiezza di L'' non cambia (Figura 2.6(a)), mentre se S_r contiene un punto di massimo per L' allora l'ampiezza diminuisce di 4 (Figura 2.6(b)). In ogni caso, $w(L') \leq w(L'')$. \square

Un enunciato analogo sussiste per gli archi superiori: *sia $l \subset B$ un arco superiore contenuto in un link $L \subset B$ in posizione generale. Si sostituisca l con un arco superiore $l' \subset B$ avente gli stessi estremi in modo che l' abbia un solo massimo, che questo massimo sia minore del massimo assoluto di l e che il link $L' = (L \setminus l) \cup l'$ sia ancora in posizione generale. Allora $w(L') \leq w(L)$.*

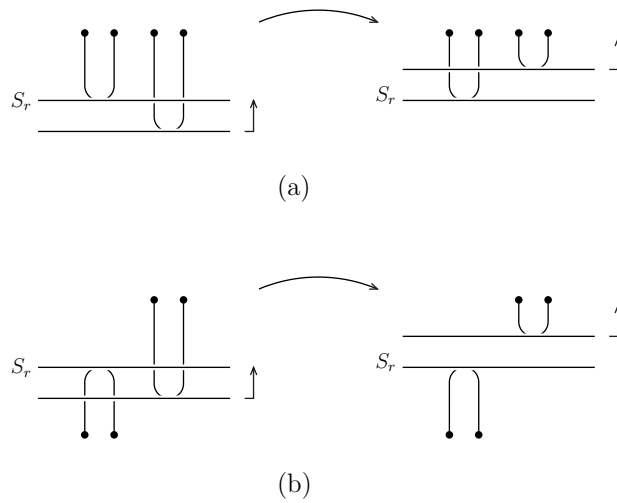


Figura 2.6: Attraversando la sfera singolare S_r l'ampiezza non aumenta.

Riduzione dell'ampiezza di un link in presenza di dischi di compressione indipendenti

Lemma 2.8.6. *Sia $L \subset B$ un link in posizione generale. Se una sfera trasversale S_r ammette una coppia di dischi di compressione indipendenti, allora L è isotopo ad un link di ampiezza minore.*

Dimostrazione. Sia D_s un disco di compressione superiore per S_r , con arco superiore α_s e base β_s , e sia D_i un disco di compressione inferiore, con arco inferiore α_i e base β_i . Allora L è isotopo al link $\bar{L} = (L \setminus (\alpha_s \cup \alpha_i)) \cup \beta_s \cup \beta_i$, poiché è sufficiente far scorrere gli archi α_s e α_i rispettivamente lungo i dischi D_s e D_i fino a sovrapporsi agli archi β_s e β_i . Ora, si trasli un po' l'arco β_s aumentando l'altezza di tutti i suoi punti tranne gli estremi, che rimangono fermi; si ottiene così un arco superiore β'_s con un solo punto di massimo; analogamente si deforma β_i in un arco inferiore β'_i con un solo punto di minimo.

Si consideri, quindi, il link $L' = (L \setminus (\alpha_s \cup \alpha_i)) \cup \beta'_s \cup \beta'_i$, anch'esso isotopo al link L ; per il Lemma 2.8.5 segue che $w(L') \leq w(L)$. Poiché le traslazioni viste sopra possono essere prese in modo che siano arbitrariamente piccole, si può assumere che non ci siano sfere singolari tra l'altezza del minimo di β'_i ed il massimo di β'_s ; allora traslando β'_s e β'_i rispettivamente sotto e sopra S_r , si ottiene un link con ampiezza minore, sia nel caso in cui β'_s e β'_i non si intersechino (Figura 2.7(a)), sia nel caso che abbiano un estremo in comune (Figura 2.7(b)). □

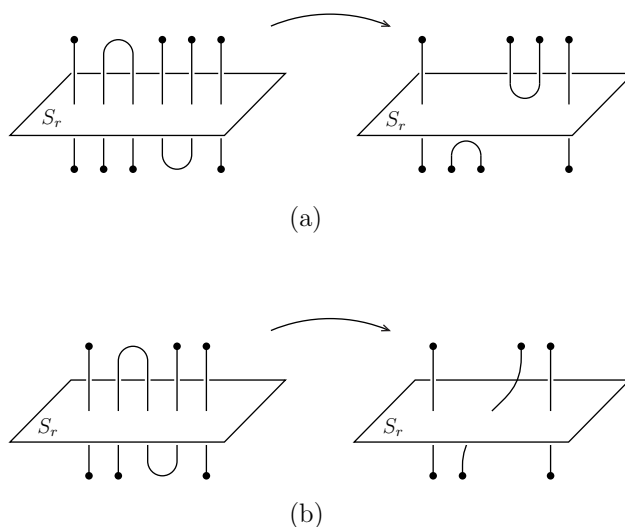


Figura 2.7: L'ampiezza diminuisce strettamente.

Riduzione dell'ampiezza di un link in presenza di cilindri invertiti

Definizioni 2.8.7. Sia S_r una sfera che ammette un cilindro invertito K rispetto ad un link $L \subset B$. L'insieme di archi $P = L \cap K$ è detto periferia di L . La parte rimanente di L è detta nucleo di L .

Lemma 2.8.8. Sia S_r una sfera che ammette un cilindro invertito K rispetto ad un link $L \subset B$ ed un cilindro invertito K' rispetto ad un altro link $L' \subset B$. Se $\partial_0 K = \partial_0 K'$ ed i nuclei di L e L' coincidono, allora L e L' sono isotopi.

Dimostrazione. Si può assumere l'esistenza di un piccolo intorno U di $\partial_0 K$ in B tale che $U \cap K = U \cap K'$. Si immerga B in S^3 , incollando una boccia B_1 sul bordo ∂B . Quindi, si costruisca un'isotopia $\varphi_t : S^3 \rightarrow S^3$, con $0 \leq t \leq 1$, nel modo seguente (Figura 2.8): inizialmente si comprime B_1 in una boccia in un piccolo intorno di $\partial_1 K$ tale che $K \cup L$ rimanga fermo; quindi si contragga K lungo se stesso fino a portarlo in U , tirandosi dietro la boccia compressa B_1 e lasciando fermo $\partial_0 K$; infine si allunghi il cilindro contratto K su K' e si riporti B_1 alla sua posizione originale. L'omeomorfismo finale φ_1 dell'isotopia porta L su L' e B su B . Poiché ogni omeomorfismo di una boccia su se stessa che conserva l'orientazione è isotopo all'identità, L e L' sono isotopi. \square

Lemma 2.8.9. Se una sfera S_r ammette un cilindro invertito K rispetto ad un link $L \subset B$, allora L è isotopo ad un link di ampiezza minore.

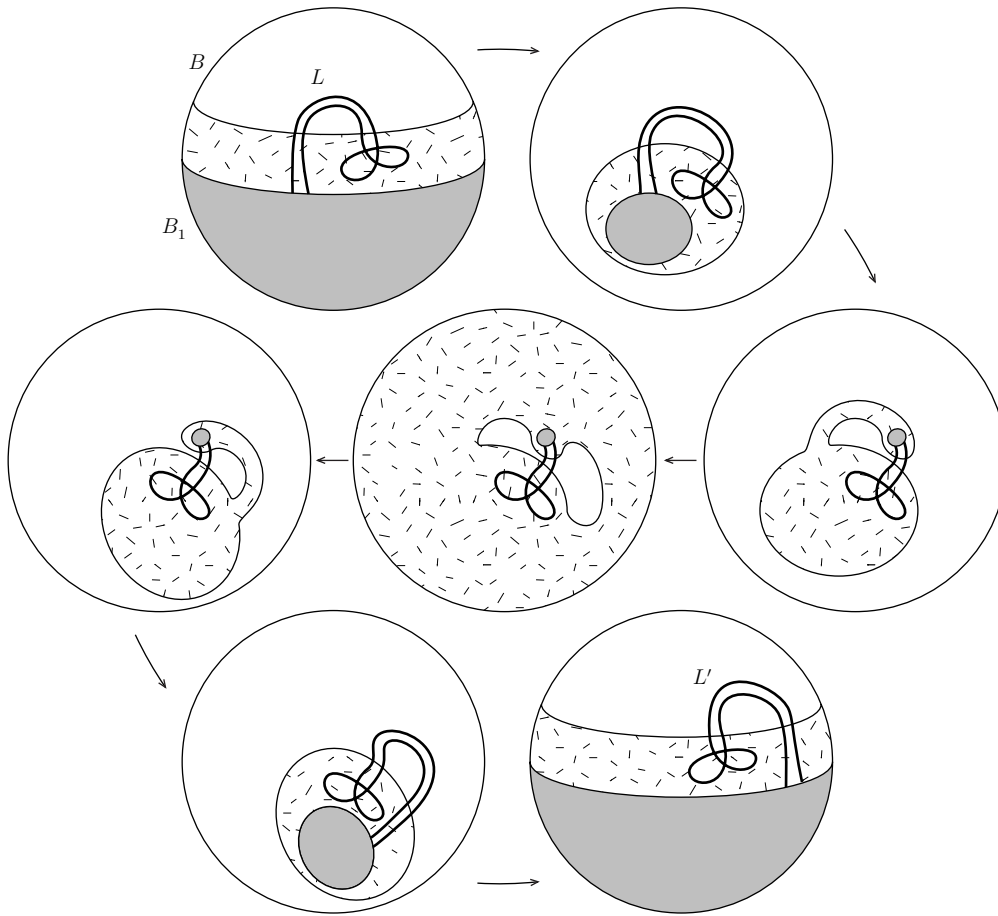


Figura 2.8: Visualizzazione in dimensione due dell'isotopia φ_t .

Dimostrazione. Siano P e C rispettivamente la periferia ed il nucleo di L e sia l un arco in C . Sia l_1 un sottoarco di l tale che il suo estremo superiore A sia un punto di massimo per L , il suo estremo inferiore stia su $\partial_0 K$ e non contenga altri punti di massimo. Quindi si costruisca un nuovo cilindro $K' = \mathcal{X}(B^2 \times I) \subset B$ con $\partial_0 K' = \partial_0 K$ nel modo seguente: un piccolo intorno di $\partial_0 K'$ coincide con un piccolo intorno di $\partial_0 K$; poi si comprime il cilindro fino a diventare un tubo molto sottile; il tubo faccia un'inversione di 180° e risalga lungo l_1 fino al livello del punto A ; da questo punto in poi il tubo salga strettamente fino al bordo di B . Sia $E = C \cap S_r$, l'insieme degli estremi di C ; si può assumere che $K' \cap C = E$. Unendo i punti di E con ∂B mediante archi del tipo $\mathcal{X}(\{p\} \times I)$, si ottiene un nuovo link $L' \subset B$ che ha lo stesso nucleo C e una nuova periferia P' ; ogni arco di P' è un arco inferiore e contiene un unico punto di minimo. Sia $S_{r'}$ una sfera trasversale posta immediatamente sotto la quota di A ; $S_{r'}$ ammette una coppia di dischi di

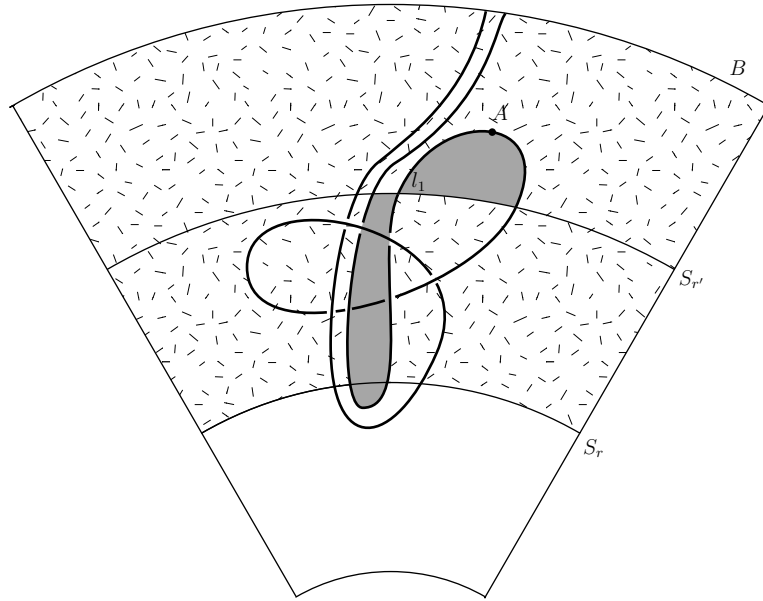


Figura 2.9: $S_{r'}$ ammette una coppia di dischi di compressione indipendenti.

compressione indipendenti: il disco superiore contiene A , mentre l'esistenza del disco inferiore segue dalla costruzione di K' (Figura 2.9).

Dal Lemma 2.8.5 segue che $w(L') \leq w(L)$. Per il Lemma 2.8.8 i link L e L' sono isotopi, mentre il Lemma 2.8.6 assicura l'esistenza di un'isotopia che diminuisca l'ampiezza di L' . \square

Conclusione

Definizione 2.8.10 (Gabai [4]). *Un link $L \subset B$ è detto in thin position se ha la minima ampiezza tra tutti i link isotopi.*

Teorema 2.8.11. *Per ogni link $L \subset B$ non banale esiste una sfera in B impermeabile che non ammette cilindri invertiti rispetto a L .*

Dimostrazione. Si sostituisca a L un link L' isotopo in *thin position*. Poiché anche L' è non banale, esso contiene almeno un punto di massimo A ; infatti l'eventualità che L' non abbia punti di massimo si realizza solo se tutti gli archi del link sono archi inferiori con un solo punto di minimo, ma in questo caso è facile trovare dischi che rendono banale il link; in realtà, la non banalità del link implica che gli archi del link debbano essere in qualche modo annodati tra loro. L'esistenza di un massimo consente anche di affermare che esistono un punto di massimo A_+ ed un punto di minimo A_- in L' tali che l'altezza di A_+ sia maggiore dell'altezza di A_- e non ci siano sfere singolari

tra la quota di A_+ e quella di A_- . Per giungere a tale conclusione si ragiona così: partendo dalla quota di A , si scenda fino a raggiungere la prima quota con un minimo, che deve esistere perché nell'arco contenente A c'è almeno un minimo a quota più bassa di A ; sia A_- tale minimo; quindi si risalga fino a raggiungere la prima quota con un massimo e sia A_+ tale massimo; è chiaro che per costruzione non ci sono altri punti di singolarità tra la quota di A_+ e quella di A_- .

Sia S_r una sfera trasversale tra i due punti; questa ammette un disco di compressione strettamente superiore contenente A_+ , infatti non possono esistere archi di L' che ostacolino la costruzione di questo disco, in quanto archi siffatti dovrebbero ammettere un minimo ad una quota compresa tra r e la quota di A_+ , contravvenendo alla costruzione fatta. Analogamente, esiste un disco di compressione strettamente inferiore contenente A_- .

Poiché L' è in *thin position*, il Lemma 2.8.6 garantisce che i due dischi di compressione non possano essere indipendenti, per cui S_r è impermeabile. Per lo stesso motivo, S_r non ammette cilindri invertiti, in virtù del Lemma 2.8.9. Ricordando infine che L è isotopo a L' e che l'impermeabilità si conserva per isotopia, si conclude che esiste una sfera che soddisfa le condizioni richieste. \square

Capitolo 3

Rivestimenti ramificati e riconoscimento di S^3

Questo Capitolo si inserisce come prosecuzione della Sezione 1.5 della quale riprende tutte le notazioni e le costruzioni.

3.1 Decomposizioni a manici ridotte

Si vuole stabilire sotto quali condizioni una generica coppia di permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$ determina una decomposizione a manici ridotta sulla 3-varietà M , rivestimento di S^3 ramificato sul grafo universale G , costruito a partire dalla monodromia

$$\omega : \pi_1(S^3 \setminus G) \rightarrow \Sigma_h.$$

Si supponga a tal scopo di restringere il campo alle sole coppie di permutazioni (σ, τ) che soddisfano le condizioni seguenti:

$$c(\sigma, \tau) = 1, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau]) = c(\sigma) - c(\sigma, \sigma^\tau) = c(\tau) - c(\tau, \tau^\sigma); \tag{3.2}$$

la prima condizione garantisce la connessione di $N(\sigma, \tau)$, mentre la seconda assicura che $\tilde{N}(\sigma, \tau)$ sia una 3-varietà chiusa (e quindi coincidente con $N(\sigma, \tau)$; si veda il Corollario 1.5.8).

Si farà vedere innanzitutto come possa essere costruita una decomposizione a manici di $N(\sigma, \tau)$, partendo proprio dalle permutazioni σ e τ ; tutte le considerazioni poggeranno sulla relazione esistente tra decomposizioni a manici e diagrammi di Heegaard; infatti si considereranno di nuovo la superficie \tilde{F} definita nella Sezione 1.5.3, lo spezzamento di Heegaard $(N(\sigma, \tau), \tilde{F})$

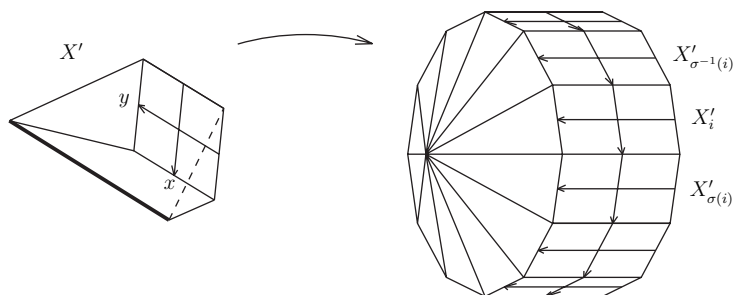


Figura 3.1: Incollando i prismi X' si ottengono gli 1-manici.

introdotto nel Teorema 1.5.6 ed il diagramma di Heegaard $(\tilde{F}; v, w)$ del Teorema 1.5.9.

Premettendo che in tutto quanto seguirà i ruoli di σ e τ possono essere scambiati, una decomposizione a manici $\rho = \rho(\sigma, \tau)$ di $N(\sigma, \tau)$ si ottiene in questo modo: sia t il tetraedro ottenuto tagliando S^3 lungo il complesso di spezzamento $S \cup T$ e lo si immagini suddiviso come nella Figura 1.9(b); il corpo di manici \tilde{X} che si ottiene incollando le h copie $\{X'_1, X'_2, \dots, X'_h\}$ di $X' \subset t$ ha come bordo la superficie chiusa, connessa ed orientabile \tilde{F} , di genere $g(\tilde{F}) = 1 + \frac{1}{2}(h - c[\sigma, \tau])$; una decomposizione a manici di \tilde{X} è quella costituita da un unico 0-manico su cui sono attaccati un numero di 1-manici pari al genere $g(\tilde{F})$; questa decomposizione potrebbe però non dipendere dalle permutazioni σ e τ , e quindi essere non adatta alla questione. Si consideri invece il diagramma di Heegaard $(\tilde{F}; v, w)$, in cui $v = (v_1, \dots, v_{c(\sigma)})$ e $w = (w_1, \dots, w_{c(\tau)})$ sono i sistemi di curve costruiti come sollevamenti dei generatori x e y di $\pi_1(S^3 \setminus G)$ a partire dalle permutazioni σ e τ ; considerando le curve v_i come sfere di costruzione di 1-manici e le curve w_i come sfere di incollamento di 2-manici ed eventualmente aggiungendo dei 3-manici, si ottiene la decomposizione a manici ρ cercata.

Ora, incollando tutte le copie $X'_i \subset t_i$ di X' i cui indici appartengono alla stessa orbita di σ , si ottiene un cilindro (Figura 3.1) la cui superficie laterale è una porzione di \tilde{F} (a rigore, di una componente del bordo ∂C del collare di \tilde{F} , ma l'abuso è giustificato dal fatto che tale componente è omeomorfa a \tilde{F}). All'interno del cilindro possono essere evidenziate tre zone, corrispondenti rispettivamente alle celle H, L_1 e L_2 di X' ; i cilindri così ottenuti (uno per ogni orbita di σ) andranno poi incollati tra loro lungo i dischi del bordo non appartenenti a \tilde{F} , secondo le regole fissate dalla permutazione τ ; in definitiva, tutte le copie di H andranno a costituire gli 1-manici di ρ , mentre le copie di L_1 e L_2 ne formeranno gli 0-manici.

Si consideri il quadrato F della Figura 1.10; come già visto nella Sezione 1.5.3, la superficie \tilde{F} si ottiene incollando h copie $\{F_1, F_2, \dots, F_h\}$ di F

$$\begin{aligned}
 h &= 17 \\
 \sigma &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12\ 13)(14\ 15\ 16\ 17) \\
 \tau &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 14)(7\ 8\ 9\ 15)(11\ 12\ 16)(6\ 10\ 13\ 17)
 \end{aligned}$$

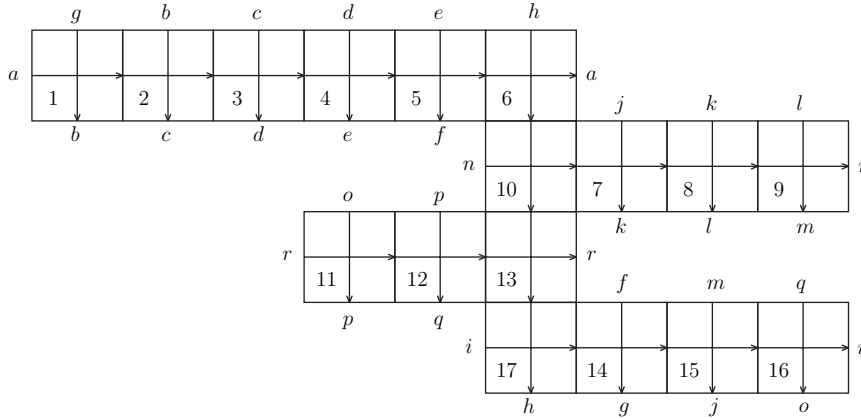


Figura 3.2: Esempio.

secondo le regole dettate dalle permutazioni σ e τ . Si parte da questa configurazione: si incollano tra loro i quadrati F_i seguendo le orbite di σ ; si ottengono in questo modo dei rettangoli in ciascuno dei quali i lati verticali vanno identificati tra loro; la curva (chiusa) orizzontale che attraversa ogni rettangolo appartiene al sistema v , ed è la sfera di costruzione di un 1-manico di ρ . Successivamente, tenendo conto della permutazione τ , si incollano i rettangoli lungo alcuni dei tratti orizzontali del loro bordo (Figura 3.2) in modo da ottenere una superficie planare che risulta connessa per l'ipotesi (3.1); gli incollamenti tra le altre coppie di lati, necessari per ricostruire \tilde{F} , restano soltanto indicati mediante coppie di lettere uguali; si osservi inoltre che gli archi che attraversano verticalmente ogni quadrato formano le curve (chiuso) w_i , ovvero le sfere di incollamento dei 2-manici di ρ .

Su ciascuna copia del quadrato F si supponga ora di tracciare le intersezioni con i prismi L_1, L_2 e H di X' (Figura 3.3); in questo modo restano ben evidenziate quali regioni di F sono bordo di uno 0-manico (quelle colorate) e quali invece sono bordo di un 1-manico (quelle bianche); non solo, ma all'interno delle regioni colorate è possibile distinguere i laghi (neri) ed i ponti (grigi); infatti questi ultimi non sono altro che l'ispessimento delle intersezioni tra le sfere di incollamento dei 2-manici ed il bordo degli 0-manici. Per quanto riguarda le isole, queste ovviamente non sono contenute nella superficie \tilde{F} in quanto giacciono all'interno del corpo di manici avente \tilde{F} come bordo; ciononostante, porzioni dei loro bordi sono visibili sul quadrato di Figura 3.3, essendo esse proprio gli archi che separano le regioni colorate da

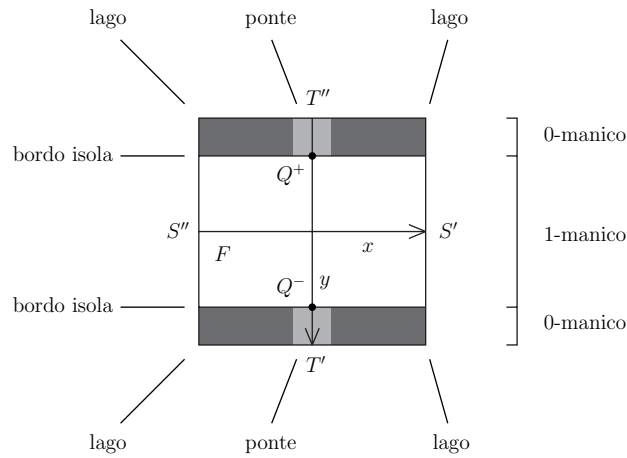


Figura 3.3: Isole, ponti e laghi sul quadrato F .

quelle bianche, cioè le curve in cui il bordo degli 1-manici interseca il bordo degli 0-manici.

A questo punto è possibile descrivere in termini delle permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$ la decomposizione a manici ρ costruita; innanzitutto sono semplici constatazioni i seguenti fatti:

- il numero degli 1-manici è pari a $c(\sigma)$;
- il numero dei 2-manici è pari a $c(\tau)$;
- il numero complessivo dei ponti è h ;
- il numero complessivo delle isole è $2c(\sigma)$.

Ricordando che gli 0-manici si ottengono incollando gli intorni L_1 e L_2 dei vertici v_1 e v_2 di Figura 1.9(b) e che i vertici v_1 e v_2 provengono entrambi dalla 0-cella A di Figura 1.4, allora il numero degli 0-manici coincide col numero delle controimmagini di A , già calcolato nel corso della dimostrazione della Proposizione 1.5.4; quindi,

- il numero degli 0-manici è pari a $c(\sigma, \sigma^\tau)$.

Meno immediato è invece stabilire qualche proprietà per i laghi; a riguardo sussiste il seguente

Lemma 3.1.1. *Ogni lago è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Si farà vedere che sul bordo di ogni 0-manico di ρ l'unione delle isole e dei ponti è costituita da un'unica componente connessa; una

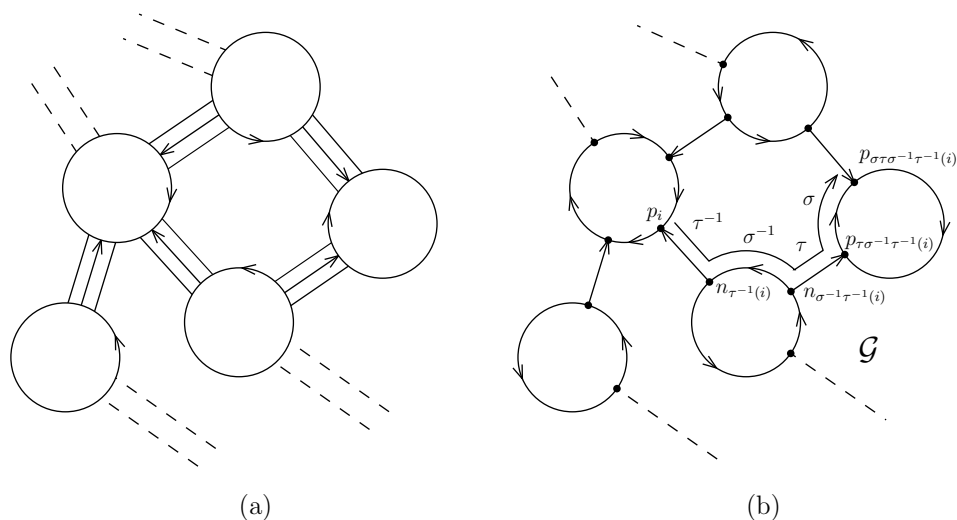


Figura 3.4: Rappresentazione di isole e ponti mediante un grafo.

volta mostrato ciò, è facile dedurre che non possono esistere curve chiuse contenute in un lago che non siano omotopicamente nulle; infatti, una curva siffatta sconnette il bordo dello 0-manico in due dischi, uno solo dei quali contiene l'unione delle isole e dei ponti.

Nella Figura 3.4(a) sono rappresentati ponti ed isole sul bordo di un generico 0-manico di ρ ; sui ponti è fissato il verso in cui vengono attraversati dalle curve del sistema w , mentre il bordo delle isole è orientato in modo coerente con l'orientazione delle curve v_i (si osservi, per inciso, che questo approccio consente di stabilire che i ponti adiacenti a ciascuna isola sono tutti orientati allo stesso modo rispetto all'isola—o tutti entranti o tutti uscenti). È possibile associare alla situazione appena descritta un grafo \mathcal{G} orientato (Figura 3.4(b)) in cui gli archi rettilinei e curvilinei rappresentano rispettivamente i ponti ed il bordo delle isole, mentre i nodi sono le loro intersezioni. Ogni nodo appartenente ad un'isola orientata in senso orario corrisponde al punto Q^+ della Figura 3.3, gli altri corrispondono al punto Q^- ; si denotano con p_i i nodi del primo tipo e con n_i gli altri, dove l'indice $i = 1, 2, \dots, h$ sta a specificare a quale copia del quadrato F appartengano i punti Q^+, Q^- corrispondenti.

Si vuole stabilire come ci si muova sul grafo quando nella Figura 3.2 ci si sposta da un quadrato all'altro secondo le permutazioni σ e τ ; fissato un nodo p_i (n_i), *spostarsi lungo σ* significa percorrere il bordo dell'isola in senso orario (antiorario) fino a raggiungere il nodo $p_{\sigma(i)}$ ($n_{\sigma(i)}$); fissato un nodo p_i , *spostarsi lungo σ^τ* significa attraversare il ponte adiacente in senso contrario, percorrere il bordo dell'isola in senso antiorario fino al nodo n successivo

e quindi attraversare di nuovo il ponte, questa volta concordemente al suo verso, per raggiungere il nodo $p_{\tau\sigma\tau^{-1}(i)}$.

In conclusione, spostandosi lungo σ e σ^τ si possono percorrere tutti i ponti e le isole che fanno parte di una stessa componente connessa; ma allora il numero delle componenti connesse di cui si compone l'unione di tutte le isole e di tutti i ponti è $c(\sigma, \sigma^\tau)$, cioè proprio il numero degli 0-manici che compongono la decomposizione ρ . Poiché non possono esistere 0-manici senza ponti né isole, questo implica che sul bordo di ogni 0-manico isole e ponti formano una sola componente connessa. \square

Teorema 3.1.2. *Siano $\sigma, \tau \in \Sigma_h$ due permutazioni che soddisfano le condizioni (3.1) e (3.2). Posto $v = [\sigma, \tau]$, se si verifica che:*

1. *ogni ciclo della decomposizione di σ ha ordine maggiore o uguale a 2;*
2. *$v^k(i) \neq \sigma^l(i)$, per ogni $k, l \in \mathbb{Z}, 0 < l < \lambda_i$, e per ogni $i = 1, 2, \dots, h$; λ_i rappresenta l'ordine del ciclo di σ il cui supporto contiene i ;*

allora la decomposizione a manici $\rho = \rho(\sigma, \tau)$ di $N(\sigma, \tau)$ è ridotta.

Dimostrazione. Bisogna mostrare che sotto le ipotesi 1. e 2., sono verificate le cinque condizioni che seguono dalla Definizione 2.1.2, ovvero che la decomposizione a manici ρ non ha 1-manici di valenza 0 o 1, che ogni lago è semplicemente connesso e che non esistono ponti di separazione né isole di separazione.

Si osservi innanzitutto che le intersezioni tra le curve del sistema v con quelle del sistema w , rappresentate dagli incroci interni a ciascuno dei quadrati nell'esempio di Figura 3.2, corrispondono alle intersezioni tra le sfere di costruzione degli 1-manici e le sfere di incollamento dei 2-manici; poiché la valenza di un 1-manico C può essere interpretata proprio come il numero di intersezioni che la sfera di costruzione di C ha con le sfere di incollamento dei 2-manici adiacenti a C , allora la valenza $v(C)$ coincide con il numero di incroci presenti sul bordo ∂C , ovvero col numero dei quadrati da incollare per ottenere ∂C , ovvero con l'ordine del ciclo della permutazione σ che genera l'1-manico C . L'ipotesi che non esistano cicli di ordine inferiore a 2 garantisce quindi che non ci siano 1-manici di valenza 1 o 0 (in realtà, la non esistenza di 1-manici di valenza 0 è verificata indipendentemente dall'ipotesi 1.).

Il Lemma 3.1.1 prova come ogni lago sia semplicemente connesso. Restano quindi da provare le due condizioni relative ai ponti ed alle isole di separazione.

I ragionamenti che seguiranno faranno ancora riferimento al grafo \mathcal{G} della Figura 3.4(b); quindi si assumeranno tutte le notazioni introdotte nel corso

della dimostrazione del Lemma precedente. Si fissi ora un lago sul bordo di un generico 0-manico della decomposizione ρ ; ciò equivale a scegliere una regione connessa del piano contenente il grafo \mathcal{G} delimitata da archi sia curvilinei che rettilinei; si consideri quindi un nodo p_i sul bordo di questa regione-lago (sicuramente ce n'è almeno uno) e si percorra tale bordo in senso antiorario; si può constatare che ciò avviene ripetendo un numero finito di volte la seguente sequenza:

- si attraversa il ponte adiacente al nodo p_i , in modo non concorde al verso fissato sul ponte, e si raggiunge il nodo $n_{\tau^{-1}(i)}$;
- ci si muove in senso orario lungo il bordo dell'isola finché non si incontra il nodo $n_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i))}$;
- si attraversa il ponte adiacente al nodo $n_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i))}$, in modo concorde al verso fissato sul ponte, e si raggiunge un nodo $p_{\tau(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i)))}$;
- ci si muove in senso orario lungo il bordo dell'isola finché non si incontra un altro nodo $p_{\sigma(\tau(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i))))}$.

Dal punto di vista delle permutazioni, questa sequenza di movimenti corrisponde quindi all'elemento $v = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in \Sigma_h$. Sia \bar{k} il più piccolo intero positivo per cui $v^{\bar{k}}(i) = i$; \bar{k} rappresenta il numero di volte che bisogna ripetere la sequenza di spostamenti per percorrere tutto il bordo del lago.

Come si ricorderà, un ponte si dice di separazione se esiste un lago che ne bagna entrambi lati; allora, se esistesse un ponte di separazione, ci sarebbe un lago tale che, percorrendo per intero le sue sponde, si attraverserebbe lo stesso ponte due volte in direzioni opposte. Ora, si supponga per assurdo che il nodo p_i considerato sopra appartenga ad un ponte di separazione; questo fatto implica che in effetti si ritorna al nodo p_i prima che sia stato completato il percorso del bordo del lago, ovvero prima delle \bar{k} sequenze di spostamenti; poiché per la proprietà di minimo di \bar{k} ,

$$\nexists k \in \mathbb{Z}, 0 < k < \bar{k} : v^k(i) = i,$$

allora l'unica possibilità è che

$$\exists k \in \mathbb{Z}, 0 < k < \bar{k} : v^k(i) = \sigma(i). \quad (3.3)$$

Quest'ultima affermazione nega l'ipotesi 2., e la contraddizione discende dall'aver assunto l'esistenza di ponti di separazione.

In modo analogo si procede per le isole di separazione; un'isola è di separazione se esiste un lago che la bagna su più tratti disgiunti, ovvero se

percorrendo le sponde di questo lago si passa più volte sull'isola. Si supponga che il nodo p_i appartenga ad un'isola di separazione e si affacci su un lago che bagna l'isola su più tratti disgiunti; poiché si deve tornare sull'isola prima che sia stato terminato il percorso del bordo del lago, si ha

$$\exists k, l \in \mathbb{Z}, 0 < k < \bar{k}, 0 < l < \lambda_i : v^k(i) = \sigma^l(i), \quad (3.4)$$

dove λ_i rappresenta l'ordine del ciclo di σ il cui supporto contiene i . Com'era facile aspettarsi, questa affermazione include la (3.3); infatti, se ci sono ponti di separazione, ci sono anche isole di separazione. Inoltre, contraddicendo nuovamente l'ipotesi 2., la (3.4) mostra che l'ipotesi di esistenza di isole di separazione è assurda. Il Teorema è così completamente dimostrato. \square

3.2 Riconoscimento di S^3

Si vuole ora interpretare l'algoritmo per il riconoscimento di S^3 descritto nella Sezione 2.3 in termini della rappresentazione delle 3-varietà come rivestimenti ramificati di S^3 .

Sia N una 3-varietà chiusa. Per il Corollario 1.5.11, esistono un intero $h \geq 1$ e due permutazioni $\sigma, \tau \in \Sigma_h$ tali che N è omeomorfa a $N(\sigma, \tau)$ e

$$\begin{aligned} c(\sigma, \tau) &= 1, \\ c(\sigma) &= c(\tau), \\ c(\sigma, \sigma^\tau) &= c(\tau, \tau^\sigma) = 1. \end{aligned}$$

In base a quanto osservato nella Sezione precedente, σ e τ inducono su N una decomposizione a manici $\bar{\rho}$ composta da uno 0-manico, $c(\sigma)$ 1-manici, $c(\sigma)$ 2-manici ed un 3-manico.

Si adottano le seguenti notazioni: posto $g = c(\sigma)$, si indicano con $\sigma = s_1 s_2 \cdots s_g$ e $\tau = t_1 t_2 \cdots t_g$ le decomposizioni in cicli delle permutazioni σ e τ ; $\lambda(s_k)$ è l'ordine di un ciclo s_k e $\text{supp } s_k$ il suo supporto; $\lambda_\sigma(i)$ è l'ordine del ciclo di σ il cui supporto contiene i .

Problema. *Come si può stabilire ragionando solo in termini delle permutazioni σ e τ se la 3-varietà chiusa N sia o meno omeomorfa alla sfera S^3 ?*

Innanzitutto si calcola il primo gruppo d'omologia $H_1(N)$; se questo non è banale, si conclude immediatamente che N non è una sfera; altrimenti si considera la boccia d'omologia (M, ρ) che si ottiene eliminando da N l'unico 3-manico della decomposizione $\bar{\rho}$. È chiaro che la decomposizione a manici ρ è ancora rappresentata dalla coppia (σ, τ) .

3.2.1 Riduzione delle decomposizioni a manici

Il primo passo dell'algoritmo di riconoscimento consiste nella riduzione della decomposizione a manici ρ . Si descrive in dettaglio ciascuno dei cinque movimenti di riduzione, facendo, in particolare, riferimento alla superficie \tilde{F} di genere g del diagramma di Heegaard $(\tilde{F}; v, w)$ associato alla coppia (σ, τ) ; si ricordi che \tilde{F} può essere vista come incollamento delle h copie $\{F_1, F_2, \dots, F_h\}$ del quadrato F (si vedano le Figure 3.2 e 3.3):

1. *Rimozione di un 1-manico di valenza 1 e del 2-manico adiacente.*

La presenza di un 1-manico di valenza 1 nella decomposizione ρ è rivelata dall'esistenza di un intero $i \in \{1, 2, \dots, h\}$ tale che $\lambda_\sigma(i) = 1$, ovvero di un ciclo in σ di ordine 1; questo significa che il quadrato F_i ha i lati verticali S' e S'' che non si incollano ad altri quadrati, ma che vanno identificati tra loro. La rimozione dell'1-manico e dell'unico 2-manico adiacente implica la perdita di una curva del sistema v e di una del sistema w ; sulla superficie \tilde{F} questo si ottiene eliminando il quadrato F_i e tutti quelli corrispondenti al supporto del ciclo t_k che contiene i (Figura 3.5(a)); ovviamente è poi necessario reincollare opportunamente i quadrati rimanenti.

È chiaro che topologicamente questa operazione equivale a ridurre di 1 il genere della superficie \tilde{F} ; ma in realtà potrebbe nascondere un altro effetto legato alla connessione: cosa garantisce che la superficie ottenuta, e quindi anche la 3-varietà ad essa associata, siano ancora connesse? Infatti l'operazione effettuata potrebbe andare oltre la semplice rimozione di un 1-manico e di un 2-manico come previsto dal movimento 1.; si supponga l'esistenza di un altro intero $i' \in \text{supp } t_k$ tale che $\lambda_\sigma(i') = 1$, ovvero di un altro 1-manico di valenza 1 incollato al 2-manico da eliminare; il movimento 1. riduce la valenza di questo 1-manico a 0, mentre l'operazione descritta sopra lo elimina del tutto, sconnettendo M' in due bocce d'omologia. Quindi tale operazione non traduce fedelmente il movimento 1. in termini di permutazioni; ma, piuttosto, coincide con l'applicazione del movimento 1. seguita da tanti movimenti 3. quanti sono gli 1-manici di valenza 0 generati dal movimento 1. (Figura 3.5(b)), ed è pertanto accettabile nell'ottica dell'intero processo di riduzione. D'altra parte, incollando copie del quadrato F , non sarebbe neanche possibile rappresentare 1-manici di valenza 0.

La nuova decomposizione a manici ρ' è rappresentata dalle permutazioni σ', τ' sull'insieme $\{1, 2, \dots, h\} \setminus \text{supp } t_k$, di cardinalità $h' = h - \lambda(t_k)$,

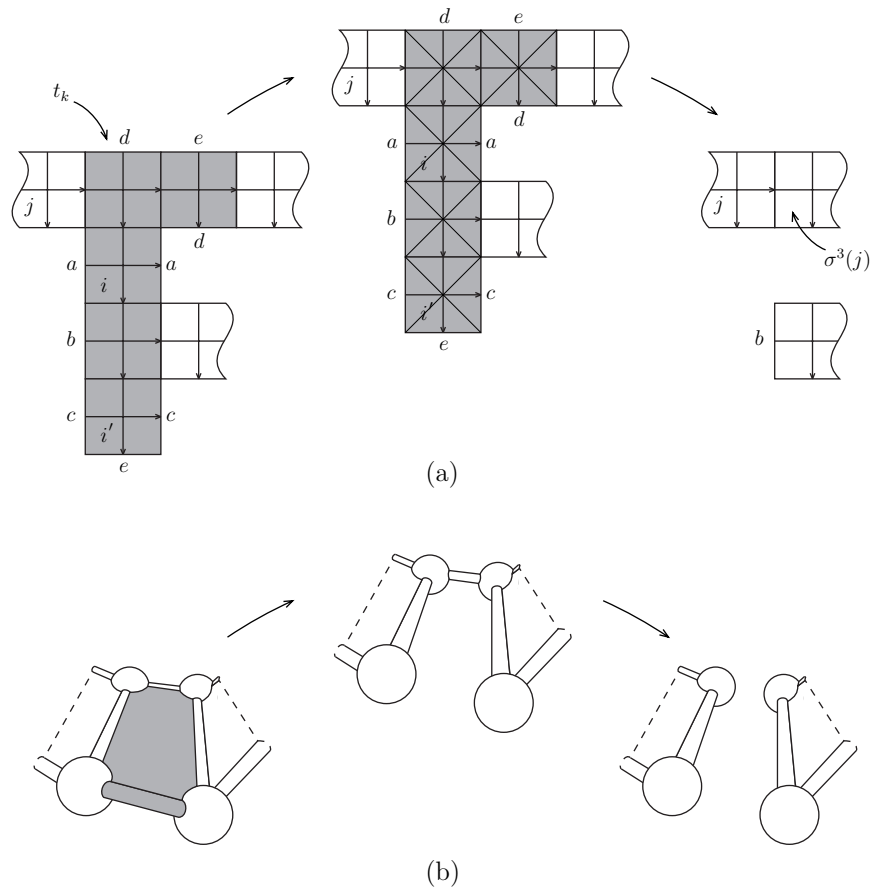


Figura 3.5: Rimozione di un 1-manico di valenza 1.

così definite:

$$\sigma'(j) = \sigma^l(j) \quad \text{se} \quad \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^{l-1}(j) \in \text{supp } t_k, \\ \sigma^l(j) \notin \text{supp } t_k;$$

$$\tau' = t_1 \cdots t_{k-1} t_{k+1} \cdots t_g.$$

A meno di un riordinamento degli indici, risulta $\sigma', \tau' \in \Sigma_{h'}$.

2. Rimozione di un ponte di separazione.

Topologicamente, il movimento 2. consiste nel trasformare lo 0-manico contenente il ponte di separazione nell'unione di due 0-manici e di un 1-manico e quindi nel rimuovere l'1-manico (di valenza 1) così generato, insieme al 2-manico adiacente; ci si riconduce quindi al movimento 1.

Ricordando la dimostrazione del Teorema 3.1.2, la presenza di un ponte di separazione è rivelata dall'esistenza di un intero $i \in \{1, 2, \dots, h\}$

tale che $v^n(i) = \sigma(i)$, per qualche intero n . La trasformazione dello 0-manico descritta sopra può essere realizzata in questo modo (Figura 3.6): si taglia la superficie \tilde{F} lungo il lato $T''_{i\tau^{-1}(i)}$ del quadrato F_i e si incolla un quadrato F_{h+1} , secondo le permutazioni $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in \Sigma_{h+1}$ così definite:

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{s}_{g+1}, \quad \text{con} \quad \bar{s}_{g+1} = \begin{pmatrix} h+1 \\ h+1 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\tau} = t_1 t_2 \cdots \bar{t}_k \cdots t_g,$$

$$\text{con} \quad \bar{t}_k = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & t_k^{-1}(i) & \cdots & l_m & h+1 \\ t_k(l_1) & t_k(l_2) & \cdots & h+1 & \cdots & t_k(l_m) & i \end{pmatrix},$$

dove si è assunto che $i \in \text{supp } t_k = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$.

Quindi si procede all'eliminazione dell'1-manico di valenza 1 e del relativo 2-manico come visto in 1., ottenendo, in definitiva, le permutazioni σ', τ' sull'insieme $\{1, 2, \dots, h\} \setminus \text{supp } t_k$ definite analogamente; parimenti valgono le considerazioni sugli 1-manici di valenza 0.

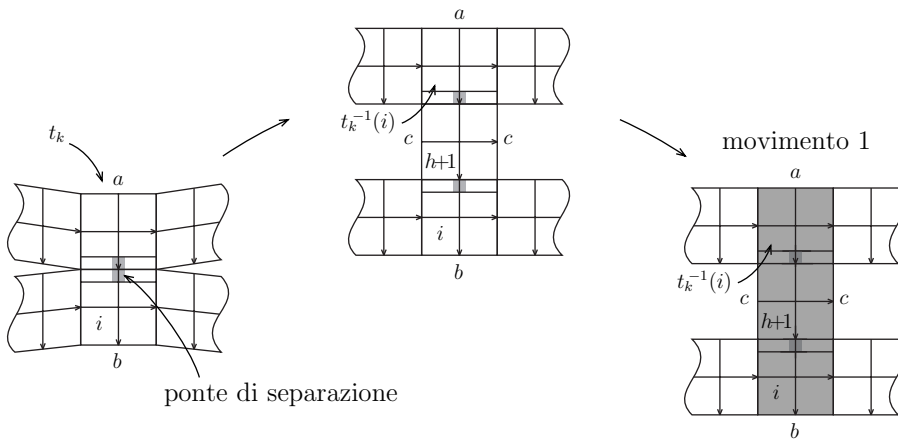


Figura 3.6: Rimozione di un ponte di separazione.

3. Rimozione di un 1-manico di valenza 0.

La decomposizione a manici ρ non contiene 1-manici di valenza 0; questi potrebbero tuttavia comparire a seguito dei movimenti 1., 2. e 5.; ma, dal punto di vista delle permutazioni, le modifiche alla decomposizione a manici che derivano dalla rimozione di 1-manici di valenza 0 sono già incluse nelle permutazioni σ', τ' definite in 1., 2. e 5., per cui non c'è da specificare altro.

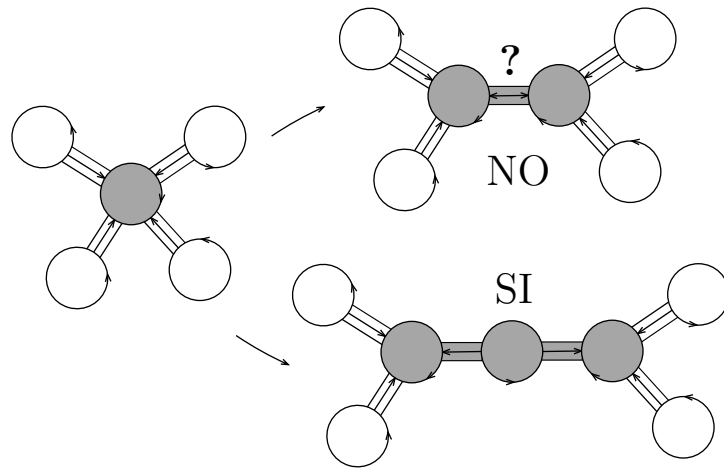


Figura 3.7: Problemi di orientabilità nel movimento 5.

4. *Taglio di uno 0-manico.*

Il movimento consiste nel tagliare uno 0-manico lungo un disco propriamente immerso, al fine di eliminare un lago non semplicemente connesso. Per il Lemma 3.1.1, la decomposizione a manici ρ non contiene laghi non semplicemente connessi; né è possibile che nel corso del procedimento di riduzione compaiano tali laghi poiché nessuno degli altri quattro movimenti ne genera. Quindi, questo movimento non viene mai applicato nel procedimento di riduzione di ρ .

5. *Rimozione di un'isola di separazione.*

Il movimento, così come è stato definito nel Capitolo 2 non è adatto ad essere tradotto in termini di permutazioni; esso prevede la sostituzione dell'1-manico corrispondente ad un'isola di separazione con due 1-manici ed un 2-manico, generando in questo modo dei problemi di orientabilità del grafo associato ai sistemi di curve v e w (Figura 3.7). È possibile però modificare il movimento in modo che, pur rimanendo topologicamente equivalente, sia adattabile alle permutazioni; è sufficiente sostituire allo stesso 1-manico tre 1-manici e due 2-manici (Figura 3.8). Quindi si decompone lo 0-manico contenente l'isola di separazione in tre 0-manici e due 1-manici e si utilizza il movimento 1. per eliminare gli 1-manici di valenza 1 generati.

Interpretando il tutto con le permutazioni (Figura 3.9), sia s_k il ciclo di σ corrispondente all'1-manico C di ρ contenente l'isola di separazione e siano F_i e F_j , con $i, j \in \text{supp } s_k$, due quadrati tali che $F_i \cup F_{\sigma(i)}$ e $F_j \cup F_{\sigma(j)}$ contengano due sponde disgiunte dell'isola di

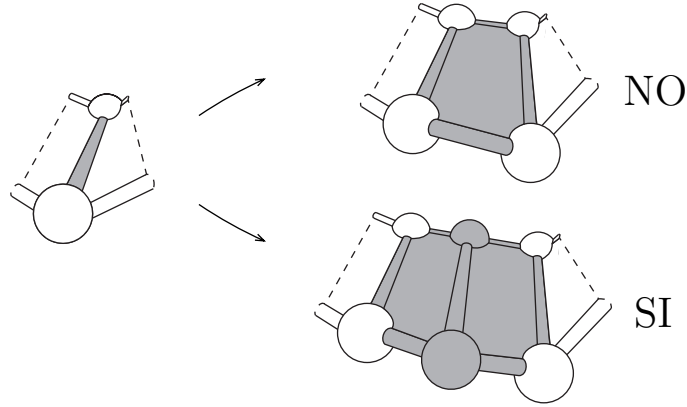


Figura 3.8: Movimento 5. modificato.

separazione bagnate dallo stesso lago; è chiaro che, non potendo esistere ponti di separazione, deve essere $i \neq \sigma^{\pm 1}(j)$. La trasformazione dell'1-manico C nei tre 1-manici C_1, C_2, C_3 e nei due 2-manici P_1, P_2 si realizza tagliando la superficie \tilde{F} lungo i lati verticali $S'_{i\sigma(i)} \equiv S''_{\sigma(i)i}$ e $S'_{j\sigma(j)} \equiv S''_{\sigma(j)j}$ lungo i quali sono incollate rispettivamente le coppie di quadrati $(F_i, F_{\sigma(i)})$ e $(F_j, F_{\sigma(j)})$; quindi si incollano altri quattro quadrati $F_{h+1}, F_{h+2}, F_{h+3}, F_{h+4}$ al fine di generare altri due 2-manici ed un 1-manico. Le regole di incollamento sono assegnate dalle permutazioni $\bar{\sigma}, \bar{\tau} \in \Sigma_{h+4}$ così definite:

$$\bar{\sigma} = s_1 s_2 \cdots \bar{s}_k \bar{s}'_k \cdots s_g \bar{s}_{g+1}$$

con

$$\bar{s}_k = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & i & \cdots & l_m & h+1 \\ s_k(l_1) & s_k(l_2) & \cdots & h+1 & \cdots & s_k(l_m) & s_k(j) \end{pmatrix},$$

$$\bar{s}'_k = \begin{pmatrix} l_{m+1} & l_{m+2} & \cdots & j & \cdots & l_{m+n} & h+2 \\ s_k(l_{m+1}) & s_k(l_{m+2}) & \cdots & h+2 & \cdots & s_k(l_{m+n}) & s_k(i) \end{pmatrix},$$

$$\bar{s}_{g+1} = \begin{pmatrix} h+3 & h+4 \\ h+4 & h+3 \end{pmatrix},$$

dove si è assunto che $i, j \in \text{supp } s_k = \{l_1, l_2, \dots, l_m, l_{m+1}, \dots, l_{m+n}\}$;

$$\bar{\tau} = t_1 \cdots t_g \bar{t}_{g+1} \bar{t}_{g+2},$$

con

$$\bar{t}_{g+1} = \begin{pmatrix} h+1 & h+3 \\ h+3 & h+1 \end{pmatrix}, \quad \bar{t}_{g+2} = \begin{pmatrix} h+2 & h+4 \\ h+4 & h+2 \end{pmatrix}.$$

A questo punto, si procede alla rimozione dei ponti di separazione così generati, mediante il movimento 2., ovvero si aggiungono prima due ulteriori quadrati F_{h+5}, F_{h+6} , ridefinendo $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ in questo modo:

$$\bar{\sigma} = s_1 s_2 \cdots \bar{s}_k \bar{s}'_k \cdots s_g \bar{s}_{g+1} \bar{s}_{g+2} \bar{s}_{g+3},$$

con

$$\bar{s}_{g+2} = \begin{pmatrix} h+5 \\ h+5 \end{pmatrix}, \quad \bar{s}_{g+3} = \begin{pmatrix} h+6 \\ h+6 \end{pmatrix};$$

e

$$\bar{\tau} = t_1 \cdots t_g \bar{t}'_{g+1} \bar{t}'_{g+2},$$

con

$$\bar{t}'_{g+1} = \begin{pmatrix} h+1 & h+3 & h+5 \\ h+3 & h+5 & h+1 \end{pmatrix}, \quad \bar{t}'_{g+2} = \begin{pmatrix} h+2 & h+4 & h+6 \\ h+4 & h+6 & h+2 \end{pmatrix};$$

quindi si eliminano tutti i quadrati corrispondenti ai supporti di \bar{t}'_{g+1} e \bar{t}'_{g+2} , ristabilendo l'insieme iniziale dei quadrati $\{F_1, F_2, \dots, F_h\}$; in definitiva, si ottengono le permutazioni $\sigma', \tau' \in \Sigma_h$ definite:

$$\begin{aligned} \sigma' &= s_1 s_2 \cdots \bar{s}_k \bar{s}'_k \cdots s_g, \\ \tau' &= \tau. \end{aligned}$$

3.2.2 Divisione lungo una sfera 2-normale

Il secondo passo dell'algoritmo di riconoscimento consiste nel tagliare la boccia d'omologia M , la cui decomposizione a manici ρ è ora ridotta, lungo una sfera 2-normale non parallela al bordo (rispetto a ρ). Si vuole innanzitutto determinare un algoritmo per la ricerca delle sfere 2-normali non parallele al bordo in termini delle permutazioni σ, τ che rappresentano M e, quindi, stabilire come il taglio di M lungo una di queste superfici altera le permutazioni stesse.

Ricerca di una sfera 2-normale non parallela al bordo

Si consideri nuovamente l'algoritmo di Haken descritto nella Sezione 1.4.2; esso si fonda sul fatto che ogni superficie 2-normale S contenuta in (M, ρ) è univocamente determinata, a meno di isotopie che conservano la decomposizione a manici, dai dischi elementari che la compongono; poiché i dischi elementari sono le intersezioni di S con gli 0-manici, è possibile quindi rappresentare la superficie 2-normale S tenendo conto solo delle sue intersezioni

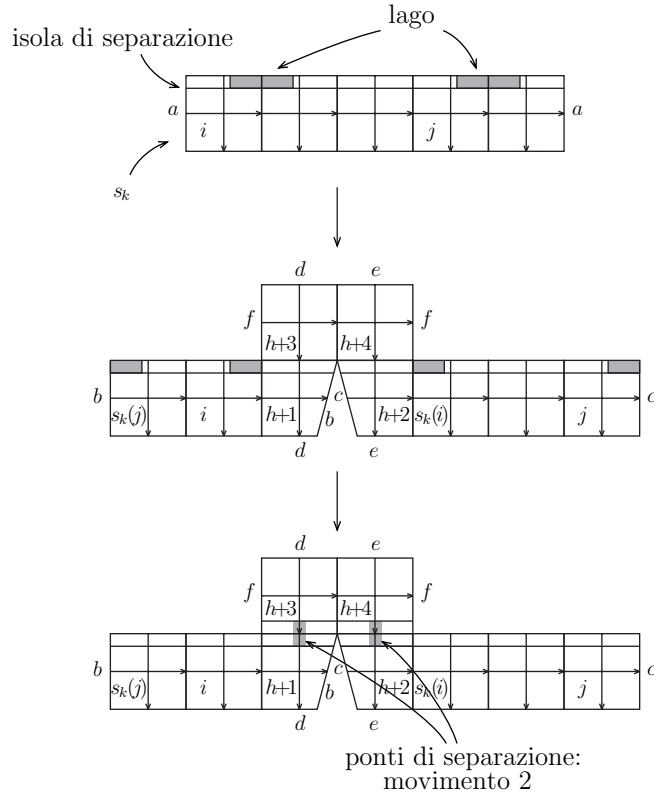


Figura 3.9: Rimozione di un'isola di separazione.

con gli 0-manici; in particolare, ogni classe di equivalenza di dischi elementari è individuata in modo univoco dal bordo di uno dei suoi rappresentanti e tale bordo è contenuto nell'unione delle isole e dei ponti; questo consente di ridurre lo studio dei dischi elementari, e quindi delle superfici 2-normali, allo studio dei cammini sul grafo \mathcal{G} di Figura 3.4 che rappresenta proprio i bordi delle isole ed i ponti sul bordo dello 0-manico.

Siano $\sigma = s_1 s_2 \cdots s_g$ e $\tau = t_1 t_2 \cdots t_{g'}$ due permutazioni in Σ_h che rappresentano la decomposizione a manici ridotta ρ sulla boccia d'omologia M ; sia \mathcal{G} il grafo orientato associato alle permutazioni σ, τ ; siano p_1, p_2, \dots, p_h i nodi di \mathcal{G} appartenenti alle isole con bordo orientato in senso orario e n_1, n_2, \dots, n_h i nodi di \mathcal{G} appartenenti a quelle con bordo orientato in senso antiorario. Fissati $i, j \in \text{supp } s_k$, con $i \neq j$, si indicano con $p_{i,j}$ e $n_{i,j}$ le coppie non ordinate di nodi $\{p_i, p_j\}$ e $\{n_i, n_j\}$, rispettivamente; ciascuna coppia $\{p_i, p_j\}$ rappresenta un modo di attraversare l'isola a cui appartengono i due nodi, in quanto stabilisce un legame tra il ponte collegato al nodo p_i e quello collegato al nodo p_j ; in definitiva, ogni coppia individua univocamente la classe di equivalenza degli archi propriamente immersi nell'isola congiungenti i punti p_i e p_j .

Discorso analogo vale per le coppie $\{n_i, n_j\}$.

È chiaro che il bordo di ciascun disco elementare E può essere rappresentato mediante una sequenza di archi $p_{i,j}$ e $n_{k,l}$; fissato un nodo di \mathcal{G} contenuto nel bordo del disco E , è sufficiente elencare tutti gli archi $p_{i,j}$ e $n_{k,l}$ che si incontrano percorrendo ∂E in un verso finché non si ritorna al nodo fissato. Il comportamento di ∂E all'interno dei ponti è vincolato alla struttura prodotto dell'1-manico corrispondente, secondo la definizione di superficie 2-normale, per cui le intersezioni di ∂E con le isole determinano anche le intersezioni con i ponti. In realtà, si riesce a caratterizzare ulteriormente queste sequenze di archi; vale cioè il seguente

Lemma 3.2.1. *Il bordo di ogni disco elementare può essere rappresentato da una sequenza di archi della forma*

$$\begin{aligned} n_{i_1, \sigma^{a_1}(i_1)} p_{\tau \sigma^{a_1}(i_1), \sigma^{b_1} \tau \sigma^{a_1}(i_1)} n_{i_2, \sigma^{a_2}(i_2)} p_{\tau \sigma^{a_2}(i_2), \sigma^{b_2} \tau \sigma^{a_2}(i_2)} \cdots \\ \cdots n_{i_n, \sigma^{a_n}(i_n)} p_{\tau \sigma^{a_n}(i_n), \sigma^{b_n} \tau \sigma^{a_n}(i_n)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove

$$\begin{aligned} \tau(i_1) &= \sigma^{b_n} \tau \sigma^{a_n}(i_n), \\ \tau(i_{k+1}) &= \sigma^{b_k} \tau \sigma^{a_k}(i_k), & 1 \leq k < n, \\ 0 < a_k &< \lambda_\sigma(i_k), & 1 \leq k \leq n, \\ 0 < b_k &< \lambda_\sigma(\tau \sigma^{a_k}(i_k)), & 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il Lemma afferma che percorrendo il bordo di un disco elementare si attraversano in successione un'isola con bordo orientato in senso antiorario, un ponte, un'isola con bordo orientato in senso orario, un altro ponte e poi ancora un'isola con bordo orientato in senso antiorario, e così via.

Si farà vedere innanzitutto che non esistono dischi elementari che non possono avere una rappresentazione con una sequenza di questo tipo; affermare il contrario significa ammettere l'esistenza di un disco elementare rappresentato da una sequenza di archi con almeno una delle seguenti proprietà:

1. ci sono due (o più) archi $n_{i,j}, n_{k,l}$ consecutivi;
2. ci sono due (o più) archi $p_{i,j}, p_{k,l}$ consecutivi;
3. non ci sono archi $n_{i,j}$;
4. non ci sono archi $p_{i,j}$;
5. l'ultimo termine è un arco $n_{i,j}$.

Nessuna di queste caratteristiche può essere effettivamente posseduta da una sequenza che rappresenti un disco elementare di una superficie 2-normale. Le prime due implicano la presenza nell'intersezione tra le isole ed il bordo del disco di un *ritorno* (si riveda la Definizione 1.4.1); se valgono la 3. o la 4., si ricade in uno dei casi precedenti, a meno che si abbia una sequenza costituita da un solo arco $p_{i,j}$ o da un solo arco $n_{i,j}$, rispettivamente; ma questa ipotesi è ancora impossibile in quanto corrisponderebbe ad un disco avente il bordo non chiuso. Infine, la sequenza non può terminare con un arco $n_{i,j}$, poiché i ponti collegati ai nodi n_i e n_j arrivano sicuramente su un'isola con nodi p_k , e, quindi, si avrebbe ancora la rappresentazione di un disco avente il bordo non chiuso.

Per quanto riguarda gli indici presenti nella rappresentazione (3.5), questi esprimono il fatto che sul grafo \mathcal{G} ci si muove rispettando le permutazioni σ e τ . \square

Osservazione. I dischi elementari paralleli al bordo rispetto a ρ si ottengono ponendo nella (3.5) $a_k = \lambda_\sigma(i_k) - 1$ e $b_k = 1$, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$; infatti i bordi di questi dischi sono *paralleli* alle sponde dei laghi che, come si ricorderà, possono essere percorse muovendosi lungo la permutazione $v = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$; a meno della sostituzione $i_k = \tau^{-1}(j_k)$ e della relazione $-1 \equiv \lambda_\sigma(i_k) - 1 \pmod{\lambda_\sigma(i_k)}$, la rappresentazione (3.5) appare effettivamente composta da sequenze

$$\cdots n_{\tau^{-1}(j_k), \sigma^{-1}\tau^{-1}(j_k)} p_{\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(j_k), \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(j_k)} \cdots$$

che testimoniano proprio come dal nodo p_{j_k} si passi successivamente ai nodi $n_{\tau^{-1}(j_k)}$, $n_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(j_k)}$, $p_{\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(j_k)}$ e $p_{\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}(j_k)}$.

Si vogliono ora determinare tutte le classi d'equivalenza dei dischi elementari contenuti nella boccia d'omologia M rispetto alla decomposizione a manici ρ ; tenendo conto del Lemma 3.2.1, si potrebbero costruire in modo combinatorio tutte le possibili sequenze del tipo (3.5), con l'unico vincolo di non inserire ciascun arco più di due volte, visto che dev'essere soddisfatta l'ipotesi di 2-normalità; si ottiene così un numero finito di sequenze in quanto anche gli archi $p_{i,j}$ e $n_{i,j}$ sono in numero finito.

È lecito chiedersi a questo punto se ognuna di queste sequenze rappresenta il bordo di un disco elementare, ovvero se vale anche il viceversa del Lemma 3.2.1; la risposta è ovviamente negativa, visto che in generale potrebbero verificarsi i seguenti casi inammissibili:

1. sequenze con più di due archi che hanno per estremo uno stesso nodo p_i o n_i (l'ipotesi di non avere più di due copie di uno stesso arco non esclude che archi diversi abbiano estremi in comune);

2. sequenze con archi che si *intersecano*, ovvero contenenti una coppia di archi $p_{i,j}, p_{k,l}$, oppure $n_{i,j}, n_{k,l}$, tali che

$$i \xrightarrow{\sigma^a} k \xrightarrow{\sigma^b} j \xrightarrow{\sigma^c} l \quad \text{oppure} \quad i \xrightarrow{\sigma^a} l \xrightarrow{\sigma^b} j \xrightarrow{\sigma^c} k$$

con

$$a, b, c > 0, \quad a + b + c < \lambda_\sigma(i);$$

3. sequenze di archi che pur non intersecandosi all'interno delle isole presuppongono che il bordo del disco elementare che rappresentano abbia delle autointersezioni all'interno dei ponti. Questo si verifica, per esempio, quando nella rappresentazione (3.5) compaiono contemporaneamente delle sottosequenze

$$\cdots n_{\sigma^{-a}(i),i} p_{\tau(i),\sigma^b\tau(i)} \cdots \quad \text{e} \quad \cdots p_{\sigma^{-b'}\tau(i),\tau(i)} n_{i,\sigma^{a'}(i)} \cdots,$$

con $0 < a, a' < \lambda_\sigma(i)$ e $0 < b, b' < \lambda_\sigma(\tau(i))$, tali che

$$a > \lambda_\sigma(i) - a' \quad \text{e} \quad b > \lambda_\sigma(\tau(i)) - b',$$

oppure

$$a < \lambda_\sigma(i) - a' \quad \text{e} \quad b < \lambda_\sigma(\tau(i)) - b'.$$

La particolarità di questo caso sta nel fatto che le due isole considerate sono collegate proprio dal ponte $\{n_i, p_{\tau(i)}\}$; la sua naturale generalizzazione allora è questa: esistono delle sottosequenze

$$\cdots n_{\sigma^{-a}(i),i} \cdots p_{j,\sigma^b(j)} \cdots \quad \text{e} \quad \cdots p_{\sigma^{-b'}(j),j} \cdots n_{i,\sigma^{a'}(i)} \cdots,$$

oppure

$$\cdots n_{\sigma^{-a}(i),i} \cdots n_{j,\sigma^b(j)} \cdots \quad \text{e} \quad \cdots n_{\sigma^{-b'}(j),j} \cdots n_{i,\sigma^{a'}(i)} \cdots,$$

oppure

$$\cdots p_{\sigma^{-a}(i),i} \cdots p_{j,\sigma^b(j)} \cdots \quad \text{e} \quad \cdots p_{\sigma^{-b'}(j),j} \cdots p_{i,\sigma^{a'}(i)} \cdots,$$

con le stesse condizioni sugli esponenti a, a', b, b' viste sopra.

Si osservi che la presenza di sottosequenze siffatte rivela l'esistenza di un'intersezione sul bordo del disco elementare, sia che questa appartenga al tipo descritto nel punto 2., sia che appartenga al tipo descritto inizialmente in questo punto 3.; essa consente però di svelare anche tutte quelle intersezioni che non ricadono in questi due casi.

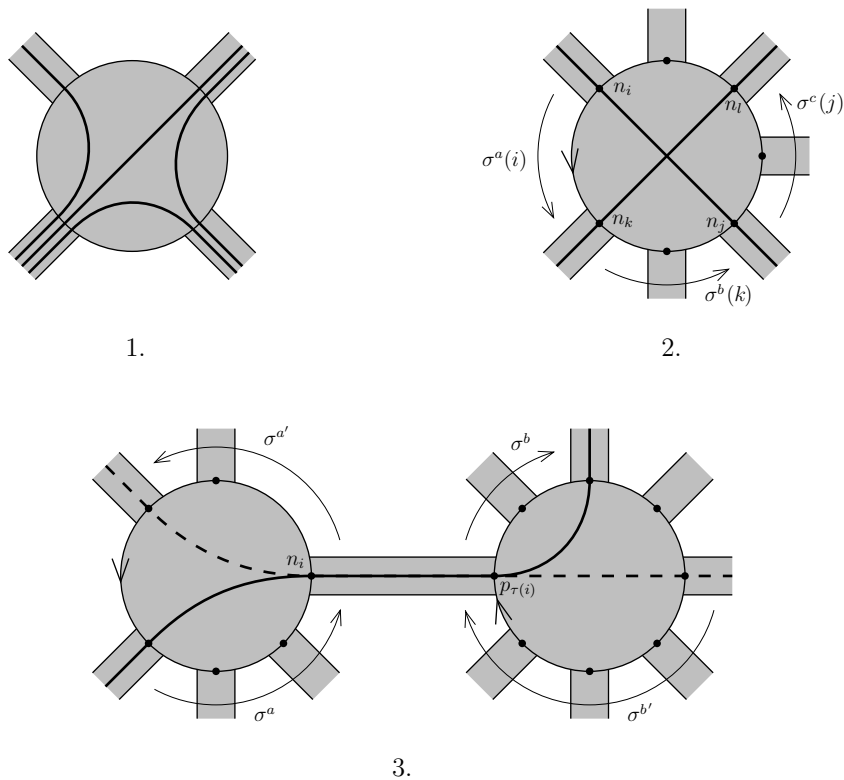


Figura 3.10: Casi inammissibili nella rappresentazione dei dischi elementari.

In definitiva, dopo aver eliminato tutte le sequenze che presentano le patologie appena descritte, quelle che rimangono sono proprio i rappresentanti E_1, E_2, \dots, E_n delle classi di equivalenza dei dischi elementari. Poiché una superficie 2-normale S può essere rappresentata dal vettore $x(S) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, in cui x^i esprime il numero di copie del disco E_i necessarie per ricostruire S , è sufficiente imporre le condizioni di compatibilità descritte nella Sezione 1.4 per definire un sistema di equazioni lineari diofantee $S(\rho)$ e da questo dedurre le superfici fondamentali. Le superfici fondamentali corrispondono alle soluzioni fondamentali ammissibili del sistema $S(\rho)$, ovvero a quelle soluzioni che non verificano condizioni analoghe ai casi 1., 2. e 3. descritti precedentemente; la verifica è immediata non appena si elencano tutti gli archi $p_{i,j}$ e $n_{i,j}$ che compongono i bordi dei dischi elementari che compaiono nella soluzione.

Come si può individuare una sfera 2-normale non parallela al bordo (rispetto a ρ) tra le superfici fondamentali? Presa una superficie fondamentale S , si calcola la sua caratteristica di Eulero (sfruttando ad esempio la poligonazione indotta sulla superficie dalle intersezioni con i manici di ρ); quindi,

se $\chi(S) = 2$ cioè se S è una sfera, si controlla che i suoi dischi elementari non siano tutti paralleli al bordo, secondo il criterio stabilito nell'Osservazione di Pagina 83.

Taglio della boccia d'omologia lungo una sfera 2-normale non parallela al bordo

Una volta individuata una sfera 2-normale S non parallela al bordo (rispetto alla decomposizione a manici ridotta ρ), l'algoritmo di riconoscimento prevede che si tagli la boccia d'omologia M lungo questa sfera; come già osservato nella Sezione 2.2, l'operazione sconnette M in due 3-varietà: M_1 , omologa a B^3 , e M' , omologa a $S^2 \times I$. Topologicamente, il taglio di M lungo S trasforma ogni i -manico di ρ che interseca S in due o più i -manici; allora anche la superficie \tilde{F} che delimita l'unione degli 0-manici e degli 1-manici viene spezzata in due componenti connesse con bordo; incollando su ciascuno di questi bordi una copia dell'intersezione di S con gli 0-manici e gli 1-manici di ρ , si ottengono due superfici chiuse \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 che delimitano ancora l'unione degli 0-manici e degli 1-manici di M_1 e M' , rispettivamente.

La superficie \tilde{F} definisce insieme alle sfere di costruzione v_i degli 1-manici ed alle sfere di incollamento w_i dei 2-manici un diagramma di Heegaard $(\tilde{F}; v, w)$ che rappresenta univocamente M ; per descrivere le due 3-varietà ottenute tagliando M lungo S , è sufficiente definire come sono fatti i diagrammi di Heegaard $(\tilde{F}_1; v^{(1)}, w^{(1)})$ e $(\tilde{F}_2; v^{(2)}, w^{(2)})$ associati alle decomposizioni a manici ereditate da M_1 e M' .

Il fatto di poter restringere l'analisi del taglio alla superficie \tilde{F} , consente di tradurre l'operazione completamente in termini delle permutazioni $\sigma = s_1 s_2 \cdots s_g$ e $\tau = t_1 t_2 \cdots t_{g'}$ di Σ_h associate alla boccia d'omologia (M, ρ) . Poiché la sfera S è tutta contenuta all'interno dell'unione degli 0-manici, degli 1-manici e dei 2-manici, le intersezioni $\tilde{F} \cap S$ avvengono nelle strisce in cui i 2-manici si incollano agli 0-manici ed agli 1-manici; essendo S anche 2-normale, le suddette intersezioni coincidono con alcune delle sfere di incollamento dei 2-manici e possono, quindi, essere assimilate alle curve del sistema w . Rappresentando \tilde{F} come incollamento di h copie $\{F_1, F_2, \dots, F_h\}$ del quadrato F , il taglio di \tilde{F} lungo la curva w_m equivale al taglio in verticale di tutti i quadrati F_j tali che $j \in \text{supp } t_m$ (Figura 3.11); il quadrato F_j viene sostituito dalla coppia di quadrati $F_j, F_{j'}$ mentre il ciclo t_m diventa la permutazione $\bar{t}_m \bar{t}'_m$, dove

$$\bar{t}_m = t_m, \quad \bar{t}'_m(i) = (t_m(i))'.$$

Qui la notazione va intesa in questo modo: se $t_m = (2, 3, 7)$, allora $\bar{t}_m = (2, 3, 7)$ e $\bar{t}'_m = (2', 3', 7')$.

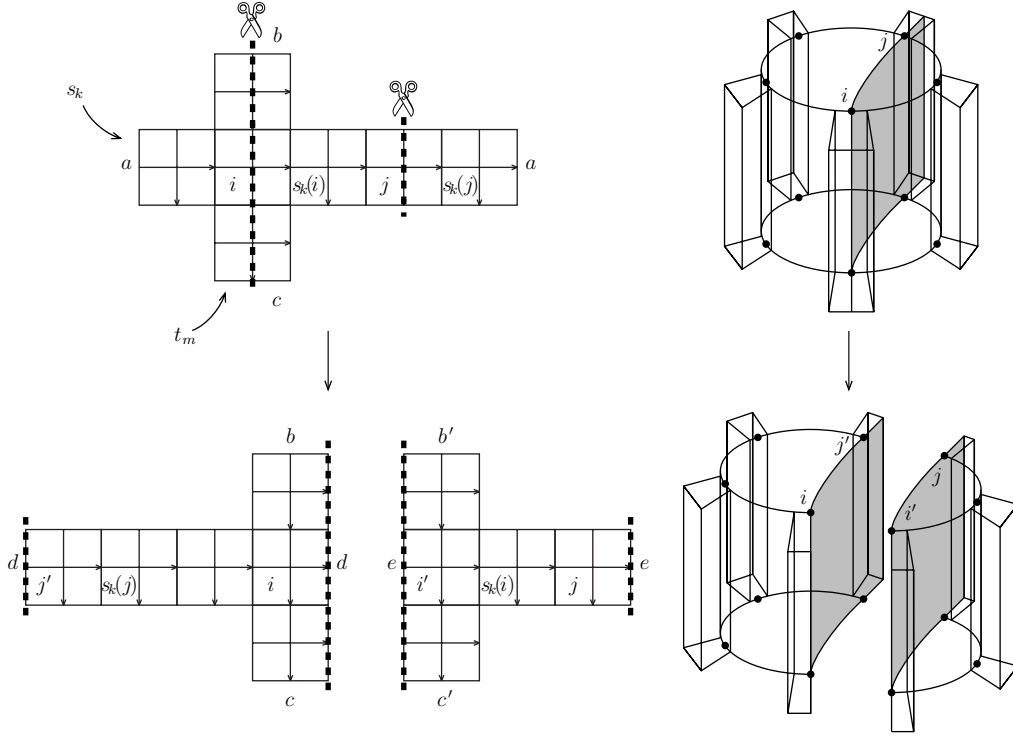


Figura 3.11: Divisione lungo una sfera 2-normale non parallela al bordo.

Il taglio di un 1-manico $I \times B^2$ lungo un quadrilatero $I \times l$, dove è un arco che congiunge i punti $p_i, p_j \in \partial B^2$, produce la trasformazione del ciclo s_k tale che $i, j \in \text{supp } s_k$ nella permutazione $\bar{s}_k \bar{s}'_k$ così definita

$$\bar{s}_k = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & i & \dots & l_m & j' \\ s_k(l_1) & s_k(l_2) & \dots & j' & \dots & s_k(l_m) & s_k(j) \end{pmatrix},$$

$$\bar{s}'_k = \begin{pmatrix} l_{m+1} & l_{m+2} & \dots & j & \dots & l_{m+n} & i' \\ s_k(l_{m+1}) & s_k(l_{m+2}) & \dots & i' & \dots & s_k(l_{m+n}) & s_k(i) \end{pmatrix},$$

dove si è assunto che $\text{supp } s_k = \{l_1, l_2, \dots, l_m, l_{m+1}, \dots, l_{m+n}\}$.

In questo modo si è descritto come modificare i cicli delle permutazioni σ, τ interessati dalle operazioni di taglio e quindi come ottenere le permutazioni $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ che rappresentano le superfici \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 ; chiaramente ci si aspetta che $c(\bar{\sigma}, \bar{\tau}) = 2$, perché la 3-varietà $M_1 \cup M'$ ha due componenti connesse; in particolare esisteranno delle permutazioni $\sigma_1, \sigma', \tau_1, \tau'$ tali che

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \sigma', \quad \bar{\tau} = \tau_1 \tau',$$

con $c(\sigma_1, \tau_1) = 1$ e $c(\sigma', \tau') = 1$.

Resta infine da produrre il movimento di perforazione, ovvero l'eliminazione di un 2-manico *bicolore* (si veda la Sezione 2.2) dalla 3-varietà M' . Innanzitutto, per stabilire quale delle due 3-varietà sia M' , è sufficiente calcolare la caratteristica di Eulero del bordo di entrambe; quindi, si considerano in M' due sfere 2-normali parallele al bordo non equivalenti (o meglio contenenti dischi elementari non equivalenti) e le si rappresenta nella forma (3.5); un 2-manico bicolore è quello che genera un ponte avente per estremo un nodo p_i che compare in entrambe le rappresentazioni. Una volta individuato il 2-manico P , lo si toglie via da M' , ottenendo un'altra boccia d'omologia M_2 , in cui \tilde{F}_2 è ancora la superficie che delimita l'unione degli 0-manici e degli 1-manici. Le permutazioni σ', τ' sono diventate σ_2, τ_2 conseguentemente all'eliminazione di P : τ_2 si ottiene da τ' cancellando il ciclo t corrispondente alla curva di incollamento di P ; σ_2 si ottiene da σ' definendo

$$\sigma_2(j) = (\sigma')^l(j)$$

se

$$\sigma'(j), (\sigma')^2(j), \dots, (\sigma')^{l-1}(j) \in \text{supp } t, \quad (\sigma')^l(j) \notin \text{supp } t.$$

Bibliografia

- [1] J. Birman e H. Hilden, *The homeomorphism problem for S^3* , Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), no. 5, 1006–1009.
- [2] R.D. Edwards e R.C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. of Math. **93** (1971), no. 2, 63–88.
- [3] A. T. Fomenko e S. V. Matveev, *Algorithmic and computer methods for three-manifolds*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [4] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds III*, J. Differential Geom. **26** (1987), 479–536.
- [5] W. Haken, *Theorie der Normalflächen*, Acta Math. **105** (1961), 245–375.
- [6] G. Hemion, *The classification of knots and 3-dimensional spaces*, Oxford Univ. Press, 1992.
- [7] J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Stud., no. 86, Princeton Univ. Press, 1976.
- [8] T. Homma, M. Ochiai e M. Takahashi, *An algorithm for recognizing of S^3 in 3-manifolds with Heegaard splitting of genus two*, Osaka J. Math. **17** (1980), 625–648.
- [9] W. Jaco e U. Oertel, *An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold*, Topology **23** (1984), 195–209.
- [10] K. Johannson, *Classification problems in low-dimensional topology, geometric and algebraic topology*, no. 18, Banach Center Publ., 1986.
- [11] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Harcourt, Brace, and World, 1967.
- [12] S. V. Matveev, *The J. H. Rubinstein - A. Thompson algorithm for the recognition of S^3* , Preprint, Novembre 1994.

- [13] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds*, Ann. of Math. **55** (1952), 96–114.
- [14] J. M. Montesinos, *Representing 3-manifolds by a universal branching set*, Proc. Camb. Phil. Soc. **94** (1983), 109–123.
- [15] C. P. Rourke e B. J. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Ergeb. der Math. u. ihrer Grenz., no. 69, Springer, 1972.
- [16] J. H. Rubinstein, *The solution to the recognition problem for S^3* , Lectures, Haifa, Israel, Maggio 1992.
- [17] H. Schubert, *Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen*, Math. Z. **76** (1961), 116–148.
- [18] A. Thompson, *Thin position and the recognition problem for S^3* , Math. Res. Lett. **1** (1994), 613–630.
- [19] ———, *Algorithmic recognition of 3-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1998), 57–66.
- [20] I. A. Volodin, V. E. Kusnezov e A. T. Fomenko, *On a problem of algorithmic recognition of the standard 3-sphere*, Usp. Math. Nauk **29** (1974), no. 5, 71–168.
- [21] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968), 56–88.