

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Dipartimento di Matematica e Fisica

Corso di Laurea in Matematica



Gruppi di trecce

Tesi di Laurea Sperimentale
in Geometria

Laureanda

Valentina Girolimetti

Relatore

Riccardo Piergallini

Anno Accademico 2000 – 2001

Indice

1	Preliminari	8
1.1	Presentazioni di gruppi	8
1.1.1	Definizioni	8
1.1.2	Il metodo di Reidemeister-Schreier	13
1.2	Richiami di topologia generale	16
1.2.1	Rivestimenti e gruppo fondamentale	16
1.2.2	Complessi cellulari	19
1.2.3	Gruppi di omotopia di ordine superiore	27
1.2.4	Fibrati localmente banali	27
2	I gruppi B_n e P_n	29
2.1	Le trecce	30
2.1.1	Il gruppo geometrico delle trecce B_n	30
2.1.2	Spazio delle configurazioni	33
2.1.3	Gli spazi $B_{0,n}$ e $F_{0,n}$	37
2.2	La presentazione di B_n	39
2.2.1	Una decomposizione cellulare per $B_{0,n}$	39

2.2.2	Il teorema di Artin	41
2.3	La presentazione a bande per B_n	47
2.4	La presentazione per P_n	49
2.5	Conclusioni	62
3	I problemi della parola e del coniugio in B_n	68
3.1	La soluzione di Artin	70
3.2	Gli algoritmi di Garside	72
3.2.1	Il problema della parola	72
3.2.2	L'algoritmo di Garside per il problema della parola	77
3.2.3	Il problema del coniugio	78
3.2.4	L'algoritmo per il problema del coniugio	82
3.3	Il contributo di Elrifai e Morton	83
3.3.1	L'insieme delle trecce positive	83
3.3.2	L'algoritmo di Elrifai-Morton	90
3.3.3	Il super summit set	91
3.3.4	L'algoritmo	93
3.4	Gli algoritmi per la presentazione a bande	93
3.4.1	Il problema della parola per la presentazione a bande	96
3.4.2	L'algoritmo di Birman per il problema della parola	99
3.4.3	Il problema del coniugio per la presentazione a bande	100
3.4.4	Gli algoritmi di Birman per il problema del coniugio	101
3.5	Gli algoritmi FullHRed e GreedyHRed	101
3.5.1	L'algoritmo FullHRed	106

3.5.2	L'algoritmo GreedyHRed	106
3.6	Osservazioni finali	107
	Bibliografia	109

Introduzione

Nel 1926 il matematico E. Artin introdusse in [1], in modo puramente geometrico, il concetto di *treccia* in R^3 . Nell'articolo [2], alcuni anni più tardi, espose una trattazione più sistematica definendo una treccia come un'insieme di n curve nello spazio che congiungono n punti fissati in un piano orizzontale agli stessi n punti in un piano orizzontale sottostante. Nel corso degli anni, poi, lo studio delle trecce è stato affrontato da diversi matematici, ad esempio J. S. Birman in [4], [5], R. H. Fox e L. Neuwirth in [14], W. Magnus in [18], e analizzato dal punto di vista sia algebrico sia topologico. Si può introdurre, infatti, il gruppo B_n in diversi modi: se consideriamo lo spazio delle configurazioni del piano in cui identifichiamo le n -uple dei punti che differiscono per una permutazione, le trecce sono, ad esempio, cappi nel suo gruppo fondamentale.

Studiando le trecce attraverso le loro proiezioni in un piano opportuno, ognuna di queste appare come un insieme di curve in una striscia che si incrociano a certi livelli. Denotando con σ_i l'incrocio in cui la proiezione dell' i -esima stringa, (assumendo di guardare le trecce dal basso verso l'alto), passa davanti alla stringa $i + 1$ e con σ_i^{-1} l'incrocio opposto, Artin diede in [2]

una presentazione del gruppo in termini di questi generatori. Dimostriamo nel capitolo 2 il teorema 2.2.1 sulla presentazione di B_n seguendo, però, un approccio diverso da quello di Artin, sviluppando, cioè, la dimostrazione in [14] che si basa sulla teoria dell'omotopia e, in particolare, del gruppo fondamentale.

Indicando rispettivamente con P e Q gli insiemi dei punti fissati nei due piani, detti *punti iniziali* e *finali* della treccia, possiamo associare ad ogni elemento in B_n una permutazione $\mu \in \Sigma_n$ considerando a quale punto di Q la stringa i congiunge l' i -esimo punto dell'insieme P . In [2] Artin diede anche una presentazione del cosiddetto *gruppo delle trecce pure* P_n definito come il sottogruppo di B_n delle trecce la cui permutazione associata è l'identità. La presentazione di Artin risulta però diversa da quelle proposte da Birman in [4] e da Magnus in [18]. Un primo scopo del nostro lavoro è stato, dunque, quello di dimostrare il teorema 2.4.1 in modo tale da eliminare ogni dubbio relativo ai teoremi di presentazione enunciati da Artin, Birman e Magnus, visto che mai ne è stata pubblicata una dimostrazione dettagliata ma soltanto sono stati indicati, data la complessità dei calcoli, i procedimenti da seguire per ottenere la presentazione suddetta. In [5], Birman, insieme ad una versione corretta del teorema di presentazione pubblicata in una errata corregge successiva, afferma che l'enunciato di Artin è errato nel caso $\epsilon = -1$: il nostro lavoro ci permetterà di stabilire quali enunciati siano corretti e quali errati.

Considerata l'importanza e le applicazioni delle trecce in diversi campi

della matematica, la parte successiva del nostro studio ha riguardato, in particolare, l'analisi di B_n . Quando, infatti, conosciamo una presentazione per un gruppo possiamo domandarci, a partire da due generiche parole nei generatori, se rappresentano o meno lo stesso elemento del gruppo oppure se sono elementi coniugati: queste due questioni prendono il nome, rispettivamente, di *problema della parola* e *problema del coniugio*. Tali problemi non sono sempre risolvibili e, come avremo modo di vedere in seguito, non è detto che lo siano per tutte le presentazioni. Il capitolo 3 sarà dedicato all'analisi delle soluzioni note sinora.

Il problema della parola era stato risolto già da Artin in [2] anche se le sue argomentazioni non forniscono un algoritmo efficiente nella pratica per sapere se due parole sono o meno equivalenti nel gruppo: si congettura che sia esponenziale nella lunghezza delle parole.

In [15] F. Garside fornisce una soluzione per il problema della parola dimostrando che ogni treccia è riconducibile in una forma speciale del tipo ΔP dove Δ è la cosiddetta *treccia fondamentale* da lui introdotta e P una treccia positiva: tale *forma normale* è uguale per tutte le parole nei generatori che definiscono lo stesso elemento in B_n per cui permettere di risolvere il problema della parola. Il problema del coniugio è, invece, risolto da Garside definendo, a partire dalle proprietà di Δ , un invariante delle classi, questa volta, di coniugio. I suoi algoritmi risultano di complessità $\mathcal{O}(L(W) \log L(W))$ dove $L(W)$ è lunghezza delle parole in input.

Gli algoritmi di E. Elrifai e H. Morton in [11] si basano su quelli di Garside:

il loro contributo è consistito nel migliorare l'espressione della forma normale sopra definita e l'efficienza dell'algoritmo per il problema del coniugio.

Analogamente, in [4], sono presentati due algoritmi che sono, sostanzialmente, l'adattamento ad una differente presentazione del gruppo delle trecce di quelli in [15]: questa nuova presentazione introdotta per B_n , i cui generatori sono particolari parole nei generatori standard di Artin, porta a migliorare il costo computazionale dell'algoritmo di Garside.

Infine analizzeremo il metodo di Dehornoy per il problema della parola che si differenzia da tutti gli altri per l'approccio seguito.

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo riassumerò concetti basilari e teoremi fondamentali di topologia e algebra i cui approfondimenti si potranno reperire nei testi classici cui farò riferimento.

1.1 Presentazioni di gruppi

1.1.1 Definizioni

Dato un gruppo G usiamo la notazione a^{-1} e 1 per indicare, rispettivamente, l'inverso di un elemento $a \in G$ e l'elemento neutro del gruppo. Se N è un sottogruppo di G , la notazione $N \trianglelefteq G$ significa che N è normale in G , G/N indica il gruppo quoziente e $\pi : G \rightarrow G/N$ l'omomorfismo t.c. $\pi(a) = aN$, detto *proiezione canonica* sul quoziente. Enunciamo due teoremi fondamentali di teoria dei gruppi che useremo in seguito:

Teorema 1.1.1. *Siano G e G' gruppi, $N \trianglelefteq G$, $\varphi : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi e $\pi : G \rightarrow G/N$ la proiezione sul quoziente. Allora esiste un unico omomorfismo $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow G'$ t.c. $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$ se e solo se $N \subseteq \text{Ker}\varphi$.*

Inoltre si ha che:

1. $\text{ImKer}\bar{\varphi} = \text{Ker}\varphi/N$;
2. $\text{ImIm}\bar{\varphi} = \text{Im}\varphi$.

In particolare osserviamo che $\bar{\varphi}$ esiste ed è iniettivo se e solo se $N = \text{Ker}\varphi$. In tal caso $G/\text{Ker}\varphi \cong \text{Im}\varphi$ e questo risultato è quello che va sotto il nome di *primo teorema di isomorfismo*:

Corollario 1.1.1. *Siano G e L gruppi e $\varphi : G \rightarrow L$ un omomorfismo. Allora φ si fattorizza in $i \circ \psi \circ \pi$ dove i è un monomorfismo, ψ un isomorfismo e π un epimorfismo, come mostrato nel seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & L \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ G/\text{Ker}\varphi & \xrightarrow[\psi]{\cong} & \text{Im}\varphi \end{array}$$

Consideriamo l'insieme $X = \{x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots\}$. Chiamiamo *parola* su X una successione finita $x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, $\epsilon_i = \pm 1$, e indichiamo con $S(X)$ l'insieme di tutte le parole su X . Introduciamo la seguente operazione di concatenazione in $S(X)$:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$$

$\forall \alpha, \beta \in S(X)$. Due parole α e β si dicono equivalenti ($\alpha \cong \beta$) se e solo se β può essere ottenuta da α mediante un numero finito di inserzioni o

eliminazioni di sottoparole della forma $x_i^{-1}x_i$ e $x_ix_i^{-1}$. La relazione \cong è una relazione di equivalenza compositiva in $S(X)$ t.c. l'insieme quoziente $S(X)/\cong$ risulta un gruppo.

Definizione 1.1.1. *Chiamiamo gruppo libero sui generatori x_1, \dots, x_n il gruppo quoziente $F(X) = S(X)/\cong$.*

Poiché si dimostra che un gruppo libero su n generatori è unico a meno di isomorfismi useremo, per indicarlo, la notazione:

$$F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

Proposizione 1.1.1 (Proprietà di rappresentazione). *Siano G un gruppo e F_n gruppo libero sull'insieme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ogni applicazione $f : X \rightarrow G$ si estende in modo unico ad un omomorfismo di gruppi $\varphi : F_n \rightarrow G$.*

Sia $\{r_1, \dots, r_k\}$ un insieme finito di parole in $S(X)$ e indichiamo con

$$\langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k \rangle \tag{1.1}$$

il gruppo $\langle x_1, \dots, x_n \rangle / \langle r_1, \dots, r_k \rangle$ dove $\langle r_1, \dots, r_k \rangle$ indica il più piccolo sottogruppo normale contenente $\{r_1, \dots, r_k\}$.

Definizione 1.1.2. *Sia G un gruppo finito. Diciamo che (1.1) è una presentazione finita di G se esiste un isomorfismo f tra i due gruppi. In tal caso $\{x_1, \dots, x_n\}$ è detto un insieme di generatori per G e $\{r_1, \dots, r_k\}$ un insieme di relazioni.*

Osserviamo che a volte potremo indicare le relazioni anche con $r_i = 1$ o nella forma $a = b$ con $a, b \in \text{Im}nS(\{x_1, \dots, x_n\})$ t.c. $ab^{-1} = r_i$ per qualche $i = 1, \dots, k$. Se A e B sono due parole nei generatori o loro inversi, $A \equiv B$ significa che A e B sono identiche, $A = B$ che l'una può essere trasformata nell'altra con l'uso delle relazioni, $A \cong B$ che le due parole sono uguali a meno delle relazioni banali e $A \sim B$ che sono coniugate. Infine diciamo *positiva* una parola espressa in termini di generatori tutti positivi. Vediamo alcuni esempi di presentazioni:

Esempio 1.1.1. *Il gruppo nullo O ammette la presentazione banale con nessun generatore e nessuna relazione:*

$$O \cong \langle \ \rangle$$

Esempio 1.1.2. *Una presentazione per il gruppo Z degli interi è data da un solo generatore e nessuna relazione:*

$$Z \cong \langle x \rangle$$

Esempio 1.1.3. *Un'altra presentazione per Z è data da:*

$$Z \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1, x_2^{-1}, x_3 x_1^{-1} \rangle$$

Gli esempi precedenti mostrano che un gruppo può essere presentato in diversi modi e, soprattutto, che non sempre è facile riconoscere, a partire da una presentazione arbitraria, il gruppo che rappresenta (come nell' 1.1.3). Chiamiamo *problema dell'isomorfismo* quello di stabilire in un numero finito di passi, a partire da una presentazione per un gruppo G , se una presentazione

arbitraria G' è isomorfa o meno a quella di partenza. Tale problema, decisamente più difficile di quello *della parola* e *del coniugio* che, relativamente al gruppo delle trecce (definito nel 2), analizzeremo nel corso di questa tesi, è noto non essere risolvibile algebricamente. Ad esempio è stato dimostrato che è irrisolvibile addirittura per le presentazioni del gruppo nullo.

Sia, ora, $G = \langle x_1, \dots, x_m | y_1, \dots, y_n \rangle$ un gruppo finitamente presentato. Introduciamo alcune trasformazioni, dette *trasformazioni di Tietze*, sulle presentazioni:

1. se y è derivabile da y_1, \dots, y_n aggiungiamo y alle relazioni;
2. se qualche relazione y_i , $i = 1, \dots, n$, è conseguenza delle altre eliminiamo y_i dalle relazioni;
3. se $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ è una parola nei generatori aggiungiamo il simbolo x_j , $j \neq 1, 2, \dots, m$, all'insieme dei generatori e $x_j = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ all'insieme delle relazioni;
4. se qualche relazione è del tipo x_jX dove X è una parola nei generatori $\{x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_m\}$, (il simbolo \widehat{x} significa che abbiamo tolto dall'insieme x), allora eliminiamo x_j dai generatori, x_jX dalle relazioni e rimpiazziamo x_j con X^{-1} nelle relazioni rimanenti.

Se partiamo da una presentazione finita di un gruppo G e applichiamo un numero finito di tali trasformazioni ne otteniamo una equivalente. Vale anche il viceversa e dunque:

Teorema 1.1.2 (di Tietze). *Due presentazioni finite*

$$G = \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

$$G' = \langle b_1, \dots, b_n \mid s_1, \dots, s_l \rangle$$

sono equivalenti se e solo se possono essere ottenute l'una dall'altra usando un numero finito di trasformazioni di Tietze.

Il teorema 1.1.2 afferma che ogni presentazione per un gruppo G può essere ottenuta mediante una serie finita di trasformazioni particolari da ogni altra presentazione ma non fornisce un procedimento costruttivo per decidere se due presentazioni arbitrarie sono isomorfe. Nel capitolo 2 utilizzeremo il teorema di Tietze per costruire una presentazione del gruppo delle trecce equivalente a quella di Artin descritta nel paragrafo 2.2.2. Analizzeremo, poi, due diverse presentazioni per il gruppo delle trecce pure definito in 2.1.1 usando argomentazioni geometriche per dimostrarne l'equivalenza.

1.1.2 Il metodo di Reidemeister-Schreier

Dato un gruppo G di cui conosciamo una presentazione è possibile calcolare una presentazione per un sottogruppo H mediante il cosiddetto *metodo di Reidemeister-Schreier*. Useremo tale metodo nel capitolo 2.

Assumiamo $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$, H sottogruppo di G e descriviamo brevemente tale algoritmo rimandando a [18] per i relativi approfondimenti e le dimostrazioni mancanti.

Definizione 1.1.3. Sia H il sottogruppo generato dalle parole $P_i(a_\nu)$, con $i = 1, \dots, l$ e $\nu = 1, \dots, n$. Se $U(a_\nu)$ e $V(P_i(a_\nu))$ definiscono lo stesso elemento di H , un'applicazione $\tau : S(\{a_1, \dots, a_n\}) \rightarrow S(\{s_1, \dots, s_m\})$ tale che

$$\tau(U(a_\nu)) = V(s_i)$$

è detto processo di riscrittura per H rispetto a $P_i(a_\nu)$.

Teorema 1.1.3. Se $P_i(a_\nu)$ sono generatori per H e τ un processo di riscrittura rispetto a $P_i(a_\nu)$ allora si ottiene una presentazione per il sottogruppo mediante l'applicazione $s_i \mapsto P_i(a_\nu)$ avente generatori s_i e relazioni:

1. $s_i = \tau(P_i(a_\nu))$,
2. $\tau(U) = \tau(U^*)$,
3. $\tau(U_1 \cdot U_2) = \tau(U_1)\tau(U_2)$,
4. $\tau(Wr_\mu W^{-1}) = 1$,

dove $U(a_\nu) \cong U^*(a_\nu)$, $U_1(a_\nu)$ e $U_2(a_\nu)$ parole in H e W nei generatori a_ν , $\nu = 1, \dots, n$.

L'algoritmo implicitamente descritto nel teorema 1.1.3 si può semplificare molto mediante un'opportuna scelta dei generatori e del processo τ . A tale scopo introduciamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.1.4. Chiamiamo funzione rappresentante dei laterali destri per G modulo un sottogruppo H l'applicazione ρ di G in un insieme completo L di rappresentanti per i laterali di H tale che

$$\rho(W(a_\nu)) = \overline{W}(a_\nu)$$

dove $\overline{W}(a_\nu)$ è il rappresentante del laterale di $W(a_\nu)$.

Definizione 1.1.5. Sia $U = a_{\nu_1}^{\epsilon_1} a_{\nu_2}^{\epsilon_2} \dots a_{\nu_r}^{\epsilon_r} \text{Imn}H$, $\epsilon = \pm 1$. L'elemento

$$W_j = a_{\nu_1}^{\epsilon_1} a_{\nu_2}^{\epsilon_2} \dots a_{\nu_{j-1}}^{\epsilon_{j-1}},$$

$j \leq r$, è detto $(j - 1)$ -segmento iniziale di U .

Usando le funzioni rappresentanti si hanno i seguenti risultati per la scelta dei generatori di H e il processo di riscrittura:

Teorema 1.1.4. Siano ρ una funzione rappresentante per G modulo H e L un insieme completo di rappresentanti. Allora il sottogruppo H è generato dagli elementi

$$s_{K, a_\nu} = K a_\nu \cdot (\overline{K a_\nu})^{-1}$$

dove $K \text{Imn}L$ e a_ν è un generatore di G , $\nu = 1, \dots, n$.

Corollario 1.1.2. Sia $U = a_{\nu_1}^{\epsilon_1} a_{\nu_2}^{\epsilon_2} \dots a_{\nu_r}^{\epsilon_r} \text{Imn}H$, $\epsilon = \pm 1$. Se τ è un'applicazione tale che

$$\tau(U) = s_{K_1, a_{\nu_1}}^{\epsilon_1} s_{K_2, a_{\nu_2}}^{\epsilon_2} \dots s_{K_r, a_{\nu_r}}^{\epsilon_r}$$

dove K_j è il rappresentante del segmento iniziale di U fino a $a_{\nu_{j-1}}^{\epsilon_{j-1}}$ se $\epsilon_j = 1$ e dello stesso fino a $a_{\nu_j}^{\epsilon_j}$ se $\epsilon_j = -1$, allora τ è un processo di riscrittura (detto di Reidemeister) per H .

In conclusione otteniamo il seguente:

Teorema 1.1.5 (di Reidemeister). Sia τ un processo di riscrittura di Reidemeister per il gruppo $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$. Allora il sottogruppo H ha

presentazione

$$\langle s_{K,a_\nu}, \dots | s_{K,a_\nu} = \tau(Ka_\nu \cdot (\overline{Ka_\nu})^{-1}), \dots, \tau(KR_\mu K^{-1}), \dots \rangle$$

mediante l'applicazione tale che $s_{K,a_\nu} \mapsto Ka_\nu \cdot (\overline{Ka_\nu})^{-1}$, dove gli a_ν sono tutti i generatori di G , le r_μ tutte le sue relazioni e K varia tra tutti i rappresentanti.

Definizione 1.1.6. Una funzione rappresentante in cui ogni segmento iniziale è ancora un rappresentante si chiama funzione di Schreier e il sistema di rappresentanti sistema di rappresentanti di Schreier.

Se un processo di riscrittura τ usa un tale sistema (detto processo di Schreier) anche le relazioni del teorema 1.1.3 si semplificano molto:

Teorema 1.1.6 (di Schreier). Se τ è un processo di Schreier il sottogruppo H può essere presentato come

$$\langle s_{K,a_\nu}, \dots | s_{M,a_\lambda}, \dots, \tau(Kr_\mu K^{-1}), \dots \rangle$$

dove K e M variano tra tutti i rappresentanti, a_ν e r_μ sono rispettivamente i generatori e le relazioni del gruppo G e a_λ un generatore tale che $Ma_\lambda \cong (\overline{Ma_\lambda})^{-1}$.

1.2 Richiami di topologia generale

1.2.1 Rivestimenti e gruppo fondamentale

Definizione 1.2.1. Siano dati X e Y spazi topologici. Un'applicazione continua $p : X \rightarrow Y$ è un rivestimento se e solo se per ogni $y \in Y \exists V \subset Y$ intorno aperto di y t.c.:

1. $p^{-1}(V) = U = \sqcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$, U_i aperti in X ,
2. $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ è un omeomorfismo per ogni $i \in I$.

Se X è semplicemente connesso il rivestimento p è detto universale.

Un caso speciale di rivestimento che vedremo anche in seguito si ha quando sullo spazio X è definita un'azione di un gruppo G . Infatti:

Proposizione 1.2.1. *Siano G un gruppo finito e X un G -spazio. Allora $\pi : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento (detto anche rivestimento regolare).*

Esempio 1.2.1. *Se consideriamo l'azione di Z_2 che identifica i punti diametralmente opposti di S^2 otteniamo il rivestimento del piano proiettivo P^2 seguente:*

$$p : S^2 \rightarrow S^2/Z_2 \cong P^2$$

Fissiamo un punto x_0 nello spazio topologico X . Chiamiamo *cammino* in X un'applicazione continua $\alpha : I \rightarrow X$ e *cappio basato* in x_0 un cammino t.c. $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Si definisce, inoltre, la concatenazione di due cappi α e β come il cappio

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{se } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Ci sarà utile nel corso della dimostrazione 2.2.1 la seguente proprietà dei cammini:

Proposizione 1.2.2 (di unicità dei sollevamenti). $\forall \alpha : I \rightarrow Y$ continua e $\forall x_0$ t.c. $p(x_0) = y_0 = \alpha(0) \exists! \tilde{\alpha} : I \rightarrow X$ t.c. $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ e $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Indichiamo con $\Omega_1(X, x_0) = \Omega_1$ l'insieme dei cappi basati in x_0 e consideriamo la relazione così definita:

$$\alpha \simeq_{x_0} \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \exists H : I \times I \rightarrow X \text{ t.c.} \\ h_0 = \alpha, h_1 = \beta, h_t(0) = h_t(1) = x_0 \end{cases}$$

Questa relazione risulta di equivalenza in Ω_1 e l'operazione di concatenazione ben definita sulle classi di equivalenza: è facile verificare che l'insieme quoziente diviene un gruppo rispetto a tale operazione.

Definizione 1.2.2. Il gruppo $\Omega_1 / \simeq_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(X, x_0)$ si dice gruppo fondamentale di X con punto base x_0 .

Osserviamo che se X è uno spazio topologico connesso per archi, $\pi_1(X)$ è indipendente dalla scelta del punto base. Sussiste il seguente risultato per il calcolo del gruppo fondamentale:

Teorema 1.2.1 (di Seifert-Van Kampen). Sia X uno spazio topologico tale che $X = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 aperti in X , $X_1 \cap X_2$ connesso per archi, $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \langle j_{1*}([\alpha]) \cdot j_{2*}([\alpha])^{-1} \rangle$$

dove $j_i : (X_1 \cap X_2) \hookrightarrow X_i$ sono le inclusioni per $i = 1, 2$ e il simbolo $*$ indica il prodotto libero di gruppi.

1.2.2 Complessi cellulari

In questo paragrafo introdurremo le nozioni basilari relative ai complessi cellulari che useremo nel corso del capitolo 2. Una trattazione sistematica dell'argomento può essere reperita in [16].

Definizione 1.2.3. *Una n -cella (chiusa) è uno spazio topologico C^n omeomorfo a B^n . Se $h : B^n \rightarrow C^n$ è un tale omeomorfismo, $h(S^{n-1}) = \partial C^n$ è detto bordo della n -cella C^n .*

Definizione 1.2.4 (incollamento). *Siano X uno spazio topologico compatto e $f : \partial C^n \rightarrow X$ un'applicazione continua. Lo spazio*

$$\overline{X} = C^n \sqcup_f X \stackrel{\text{def}}{=} C^n \sqcup X /_{y \sim f(y)} \quad \forall y \in \partial C^n$$

si dice ottenuto da X mediante l'incollamento di una n -cella. f si chiama anche applicazione di incollamento.

Se consideriamo la proiezione $\pi : (C^n \sqcup X) \rightarrow \overline{X}$ allora $\pi|_{C^n} = \varphi$ è detta *applicazione caratteristica*.

Definizione 1.2.5 (complesso cellulare). *Uno spazio topologico X è un complesso cellulare finito di dimensione m se e solo se esiste*

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_m = X$$

dove lo spazio $X_0 = C_1^0 \sqcup \dots \sqcup C_{n_0}^0$, $n_0 \geq 1$, è uno spazio finito e discreto, $X_i = C_1^i \sqcup \dots \sqcup C_{n_i}^i \sqcup_{f_1^i \sqcup \dots \sqcup f_{n_i}^i} X_{i-1}$ e $n_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m-1$ e $X_m = C_1^m \sqcup \dots \sqcup C_{n_m}^m \sqcup_{f_1^m \sqcup \dots \sqcup f_{n_m}^m} X_{m-1}$, $n_m \geq 1$. X_i si dice anche i -scheletro.

Osserviamo che lo 0-scheletro è uno spazio discreto con n_0 vertici, l'1-scheletro è un grafo con n_1 spigoli e ogni i -scheletro X_i è un complesso cellulare di dimensione i . La figura seguente è un esempio di 1-scheletro:

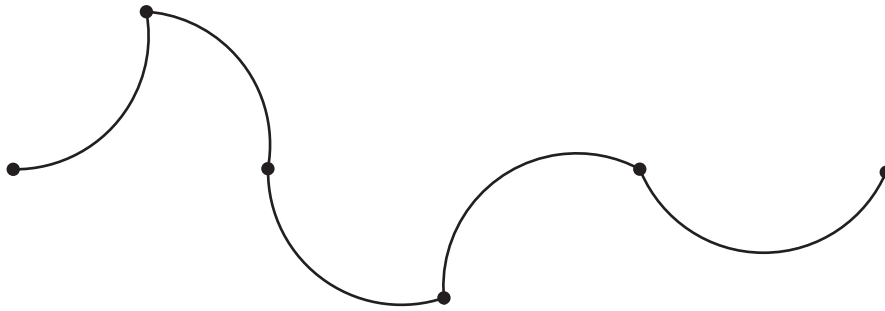


Figura 1.1: 1-scheletro.

Definizione 1.2.6. Se X è un complesso cellulare e $A \subset X$ diciamo che A è un sottocomplesso se è unione di celle di X .

Allora le i -celle di A sono i -celle di X e l' i -scheletro X_i è un sottocomplesso di X .

Definizione 1.2.7. Si dice regolare una decomposizione cellulare finita $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_m = X$ tale che:

1. le applicazioni caratteristiche $\varphi : C^n \rightarrow X$ sono immersioni,

$$2. C_{n_1}^i \cap C_{n_2}^j = \begin{cases} \emptyset \\ C_{n_3}^k & k < i, j \end{cases}$$

Definizione 1.2.8. *Siano X e Y due complessi cellulari. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta cellulare se manda l' i -scheletro di X nell' i -scheletro di Y .*

Proposizione 1.2.3. *Una varietà M differenziabile, connessa, compatta ammette una decomposizione cellulare.*

Esempio 1.2.2. 1) *La sfera S^n è un complesso cellulare con le due celle C_1^0 e $C_1^n = S^n - C_1^0$ mostrate nella figura ??.*

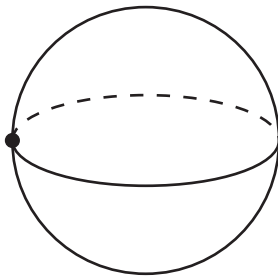


Figura 1.2: La sfera S^2 .

L'applicazione di incollamento f è in questo caso la funzione costante.

2) *Consideriamo $X_0 = S^0$ e costruiamo, come mostrato nella figura ??, aggiungendo due celle per ogni dimensione, $X_1 = S^0 \cup C_1^1 \cup C_2^1$, $X_2 = X_1 \cup C_1^2 \cup C_2^2, \dots$, $X_n = X_{n-1} \cup C_1^n \cup C_2^n$. Osserviamo che ad ogni passo incolliamo due sfere della stessa dimensione per cui otteniamo la decomposizione per S^n seguente:*

$$S^n = C_1^0 \cup C_2^0 \cup C_1^1 \cup \dots \cup C_1^n \cup C_2^n.$$

La figura ?? mostra tale decomposizione per S^2 .

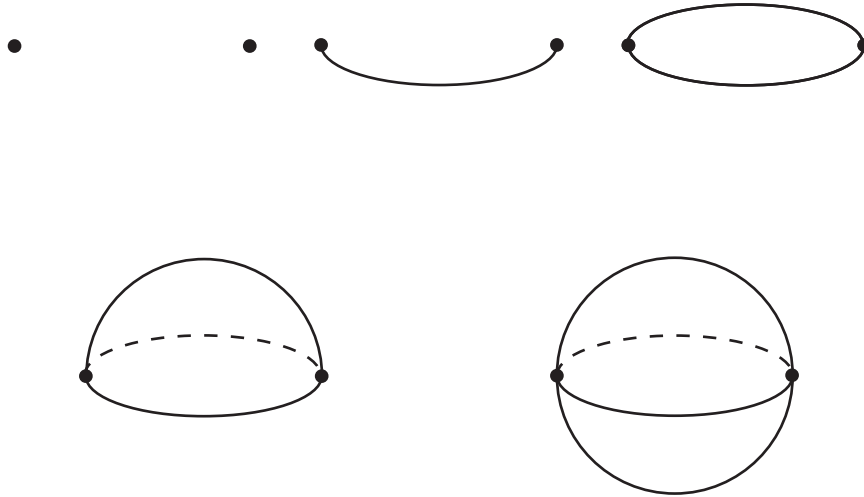


Figura 1.3: Decomposizione cellulare

Esempio 1.2.3. Sia S^2 la sfera con la decomposizione ottenuta in 1.2.2 e identifichiamo P^2 con S^2/Z_2 come nell'esempio 1.2.1. Poiché l'azione di Z_2 identifica i punti della sfera diametralmente opposti otteniamo per P^2 la seguente decomposizione:

$$P^2 = C^0 \cup C^1 \cup C^2.$$

Esempio 1.2.4. Consideriamo in R^{2n} i semispazi $x_i < x_j$, $i, j = 1, \dots, 2n$ e identifichiamo $S^{2n} = R^{2n} \cup \text{Imnfty}$. Prendiamo in S^{2n} la chiusura di tutte le possibili intersezioni dei semispazi del tipo $x_i \leq x_j$: poiché ciascun $x_i \leq x_j$ è un convesso dello spazio euclideo, abbiamo, in S^{2n} , dei sottospazi convessi e

dunque delle $2n$ -celle. Useremo la notazione $\lambda^{2n} = \{i_1 < \dots < \dots < \dots < i_n\}$ per indicare le $2n$ -celle dove $i_j < i_{j+1}$ significa che i punti $p_j = (x_j, y_j)$ e $p_{j+1} = (x_{j+1}, y_{j+1})$ sono tali che $x_j < x_{j+1}$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \text{Im}nR^{2n}$. Consideriamo, ora, il bordo dei semispazi che sarà del tipo $x_i = x_j$ ottenendo così dei cerchi massimi in S^{2n} . Indichiamo con $\lambda_{i_j}^{2n-1} = \{i_1 < \dots < i_j \doteq i_{j+1} < \dots < i_n\}$ tali $(2n-1)$ -celle del bordo dove il simbolo \doteq significa che i punti $p_j = (x_j, y_j)$ e $p_{j+1} = (x_{j+1}, y_{j+1})$ hanno la stessa ascissa $x_j = x_{j+1}$ ma ordinate tali che $y_j < y_{j+1}$. Analogamente possiamo procedere in questo modo e ottenere le $(2n-2)$ -celle sul bordo delle λ^{2n} rimpiazzando due simboli $<$ con due \doteq o un $<$ con un simbolo $=$ dove con $i_j = i_{j+1}$ intendiamo che i punti p_j e p_{j+1} sono uguali. Osserviamo che le $(2n-2)$ -celle del tipo $\lambda^{2n-2} = \{i_1 < \dots < i_j \doteq i_{j+1} < \dots < i_k \doteq i_{k+1} < \dots < i_n\}$ appartengono al bordo di $\lambda_{i_j}^{2n-1}$ e $\lambda_{i_k}^{2n-1}$. Procedendo così per definire le celle di dimensione $k < 2n-2$ arriviamo alla cella $\lambda^0 = \{i_1 = \dots = i_j = i_{j+1} = \dots = i_n\}$ che rappresenta una sfera S^2 e che prendiamo con la decomposizione cellulare $S^2 = C_1^2 \cup C_1^0 = C^2 \cup \{\text{Im}n\text{fty}\}$ dell'esempio 1.2.2. Abbiamo così ottenuto la decomposizione cellulare, che chiameremo decomposizione convessa, $\mathcal{C} = \{\lambda^i\}$.

Osservazione 1.2.1. La dimensione delle celle è $\Sigma - (\alpha + 2\beta)$ dove α è il numero delle occorrenze del simbolo \doteq e β quello del simbolo di uguaglianza.

Ad esempio, in S^6 , il bordo della cella di dimensione 5, $\lambda^5 = \{1 < 2 \doteq 3\}$, consiste delle 4-celle $\lambda_1^4 = \{1 \doteq 2 \doteq 3\}$, $\lambda_2^4 = \{2 \doteq 1 \doteq 3\}$, $\lambda_3^4 = \{1 < 2 = 3\}$,

delle 3-celle $\lambda_1^3 = \{1 = 2 \doteq 3\}$, $\lambda_2^3 = \{1 \doteq 2 = 3\}$, $\lambda_3^3 = \{2 \doteq 1 = 3\}$ e ovviamente delle due celle di base S^2 e Imnfty .

Nel corso della dimostrazione del teorema 2.2.1 useremo in modo sostanziale il concetto di decomposizione cellulare duale. Se M è una n -varietà ed X un suo complesso cellulare regolare finito, (la cui esistenza è assicurata dalla proposizione 1.2.3), con decomposizione $\mathcal{C} = \{C_j^i\}$, esiste una decomposizione $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{C}_j^{n-i}\}$, detta *duale di \mathcal{C}* , tale che ad ogni i -cella C_j^i di \mathcal{C} corrisponde una cella \tilde{C}_j^{n-i} (duale di C_j^i) in $\tilde{\mathcal{C}}$, di codimensione i e che interseca trasversalmente C_j^i in un punto. In particolare $C_j^i \subset C_k^{i+1} \Leftrightarrow \tilde{C}_k^{n-i-1} \subset \tilde{C}_j^{n-i}$. Dunque abbiamo la seguente situazione:

- (i) una 0-cella \tilde{C}^0 in $\tilde{\mathcal{C}}$ per ogni n -cella C^m in \mathcal{C} ;
- (ii) una 1-cella \tilde{C}^1 in $\tilde{\mathcal{C}}$ per ogni $n-1$ -cella in \mathcal{C} ;
- (iii) una 2-cella \tilde{C}^2 in $\tilde{\mathcal{C}}$ per ogni cella C^{n-2} in \mathcal{C} ...

Indichiamo allora con \tilde{X} il complesso cellulare duale di X :

$$\tilde{X} = \tilde{X}_n \cup \tilde{X}_{n-1} \cup \dots \cup \tilde{X}_0$$

Osservazione 1.2.2. *Passando alla decomposizione duale si ha che, se $Y \subset X$ è un sottocomplesso, $\tilde{X} - \tilde{Y}$ è un sottocomplesso di \tilde{X} che ha lo stesso tipo di omotopia di $X - Y$.*

Tale osservazione ci sarà utile per calcolare il gruppo fondamentale del complementare di un certo sottocomplesso cellulare (paragrafo 2.2.2). Il risultato sarà ottenuto grazie al seguente:

Teorema 1.2.2. *Sia X un complesso cellulare finito tale che $X_0 = \{C_1^0\}$ e $X_1 = \{C_1^1, \dots, C_{n_1}^1\}$. Allora:*

$$\pi_1(X) \cong \langle C_1^1, \dots, C_{n_1}^1 | w_1, \dots, w_{n_2} \rangle$$

dove la parola w_i , $i = 1, \dots, n_2$, si ottiene percorrendo il bordo della 2-cella C_i^2 con l'orientazione fissata e aggiungendo un generatore $C_{i_j}^{\epsilon_j}$ per ogni 1-cella sul bordo, con $\epsilon = \pm 1$ a seconda che il verso di percorrenza coincida o meno con l'orientazione della 1-cella.

Il teorema precedente, dunque, ci dice che una presentazione per il gruppo fondamentale di un complesso X , (il cui 0-scheletro ha un unico elemento), si ottiene considerando le celle soltanto fino alla dimensione 2. Si ha un generatore per ogni 1-cella di X (notiamo che sono tutte attaccate all'unica 0-cella C_1^0) e una relazione per ogni 2-cella C_i^2 data dal coppia formato dalle 1-celle $C_{i_1}^{\epsilon_1} \dots C_{i_{k_j}}^{\epsilon_{k_j}}$ sul bordo.

Esempio 1.2.5. $\pi_1(P^2) \cong \langle a | a^2 \rangle \cong Z_2$.

Consideriamo il piano proiettivo con la decomposizione cellulare

$$P^2 = C^0 \cup C^1 \cup C^2$$

ottenuta nell'esempio 1.2.3. Prima di passare al quoziente S^2/Z_2 abbiamo la situazione mostrata nella figura ??.

Se C^2 è orientata in senso antiorario otteniamo, per il teorema 1.2.2, che una presentazione per $\pi_1(P^2)$ è data dall'unico generatore a che rappresenta C^1 e l'unica relazione $aa = a^2$ che si ottiene percorrendo il bordo di C^2 nel

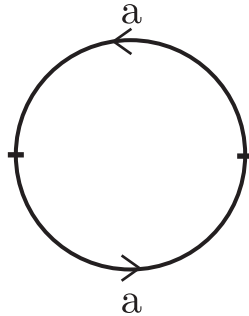


Figura 1.4: Il piano proiettivo.

verso indicato dalla freccia (a^{-2} se l'orientazione è opposta). Dunque, come volevamo, si ha che

$$\pi_1(P^2) \cong \langle a | a^2 \rangle \cong Z_2.$$

Osservazione 1.2.3. Se consideriamo un complesso cellulare duale \tilde{X} di X , il teorema 1.2.2 ci dice che ad ogni $(n-1)$ -cella \tilde{C}^{n-1} (orientata) corrisponde un generatore del $\pi_1(X)$ rappresentato da un coppia che attraversa la cella in un punto. Le relazioni, una per ogni $(n-2)$ -cella \tilde{C}^{n-2} , si ottengono leggendo, nell'ordine, le $(n-1)$ -celle del suo bordo. Più precisamente basta considerare un coppia intorno a ciascuna $(n-2)$ -cella \tilde{C}^{n-2} : tale coppia interseca in un certo ordine e verso le $(n-1)$ -celle sul bordo.

1.2.3 Gruppi di omotopia di ordine superiore

Definizione 1.2.9. Sia $\Omega_n = \{\omega : I^n \rightarrow X : \omega(\partial I^n) = *\}$, $I^n = [0, 1]^n$.

Allora l' n -simo gruppo di omotopia di X è

$$\pi_n(X, *) = (\Omega_n(X, *), *) / \simeq_{\partial I^n}$$

cioè l'insieme degli n -cappi modulo omotopie che fissano il bordo del cubo.

Se $n = 1$ otteniamo il gruppo fondamentale definito in 1.2.

Proposizione 1.2.4. Dato un rivestimento $p : X \rightarrow Y$, $p_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ è un isomorfismo $\forall n > 1$ e un monomorfismo se $n = 1$.

1.2.4 Fibrati localmente banali

Siano X e Y spazi topologici.

Definizione 1.2.10. Un'applicazione continua $p : X \rightarrow Y$ è un fibrato localmente banale se e solo se per ogni $y \in Y \exists V \subset Y$ intorno aperto di y t.c.:

1. $\exists h : p^{-1}(V) = U \rightarrow V \times F_y$ omeomorfismo, $F_y = p^{-1}(y)$,

2. $p|_U = \pi \circ h : U \rightarrow V$.

dove $\pi : V \times F_y \rightarrow V$ è la proiezione del primo fattore.

In particolare F_y è detta *fibra* di y e osserviamo che un fibrato con fibra discreta è un rivestimento. Se Y è uno spazio topologico connesso tutte le fibre sono omeomorfe tra loro e in tal caso parleremo di F -fibrato.

Proposizione 1.2.5. *Siano X uno spazio topologico connesso per archi e $p : X \rightarrow Y$ un fibrato localmente banale con fibra F . Allora la successione, detta successione del fibrato,*

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{p_*} \pi_n(Y) \xrightarrow{\delta \circ p_*^{-1}} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow 0$$

è esatta.

La proposizione 1.2.5 è un caso particolare della 1.2.4.

Capitolo 2

I gruppi B_n e P_n

Seguendo le idee di Artin possiamo intuitivamente guardare alle trecce come a un insieme di n fili che congiungono n punti fissati in un piano orizzontale alla loro proiezione in un piano orizzontale sottostante. D'altra parte possiamo considerare una treccia come un cappio nello spazio delle configurazioni in cui, però, consideriamo le n -uple non ordinate: il gruppo fondamentale, allora, risulta essere proprio il gruppo geometrico delle trecce B_n introdotto da Artin. Già nel suo primo articolo [2] egli propose, per via geometrica, una presentazione per B_n che poi fu derivata in diversi modi da altri studiosi.

2.1 Le trecce

2.1.1 Il gruppo geometrico delle trecce B_n

Nello spazio R^3 indichiamo con p_1, \dots, p_n n punti giacenti in un piano orizzontale $z = a$ e con q_1, \dots, q_n gli stessi punti nel piano $z = b$, $b < a$.

Definizione 2.1.1. *Una stringa (o i -esima stringa) è una curva differenziabile strettamente decrescente che congiunge il punto (iniziale) p_i con il punto (finale) $q_{\mu(i)}$, dove μ appartiene al gruppo Σ_n delle permutazioni su n oggetti.*

Una treccia a n fili è l'insieme di n stringhe disgiunte.

In particolare, quando μ è la permutazione identica, la treccia è detta pura.

Definizione 2.1.2. *Due trecce si dicono equivalenti se sono isotope nello spazio R^3 mediante un'isotopia che preserva i livelli.*

Si verifica che l'isotopia tra trecce è una relazione di equivalenza. La composizione delle trecce A e B è la treccia AB che si ottiene congiungendo i punti finali di A con quelli iniziali di B . Data una treccia A la treccia A^{-1} indica l'immagine speculare di A rispetto al piano orizzontale $z = b$ mentre denotiamo con I la treccia con n stringhe parallele.

Definizione 2.1.3. *L'insieme (delle classi di equivalenza di isotopia) delle trecce con l'operazione di composizione è un gruppo: il gruppo geometrico delle trecce B_n .*

Definizione 2.1.4. Diciamo gruppo delle trecce pure P_n il nucleo dell'omomorfismo $\mu : B_n \rightarrow \Sigma_n$, cioè:

$$\text{Ker}\mu = P_n$$

Osservazione 2.1.1. L'omomorfismo $\mu : B_n \rightarrow \Sigma_n$ è tale che $\mu(\sigma_i) = (i \ i + 1)$.

Si può dimostrare che le trecce ammettono una proiezione D sul piano xz (detto *diagramma* per la treccia) t.c.:

- 1) le proiezioni delle stringhe sono in posizione trasversale;
- 2) nessun punto del piano xz è la proiezione di più di due punti della treccia;
- 3) gli eventuali punti di intersezione nel piano xz hanno ordinate differenti.

La figura ?? è un esempio di diagramma.

Lo studio di B_n e il lavoro che segue si basano sulla seguente proprietà che permette di realizzare una treccia come prodotto degli elementi σ_i e σ_i^{-1} rappresentati nelle figure ?? e ??, detti anche *trecce elementari*:

Proposizione 2.1.1. Sia $\beta \in B_n$ una treccia. Allora β si può scrivere nella forma

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$$

Dimostrazione 2.1.1. (Cenni.) Sia D un diagramma per la treccia β . A meno di isotopia, per il punto 3), possiamo suddividere la parte del piano

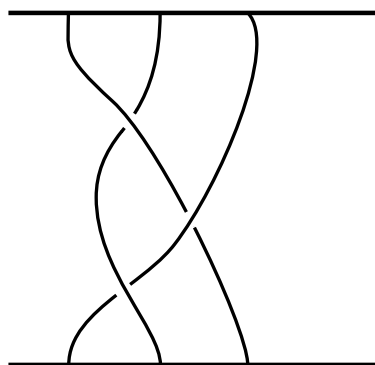


Figura 2.1: diagramma

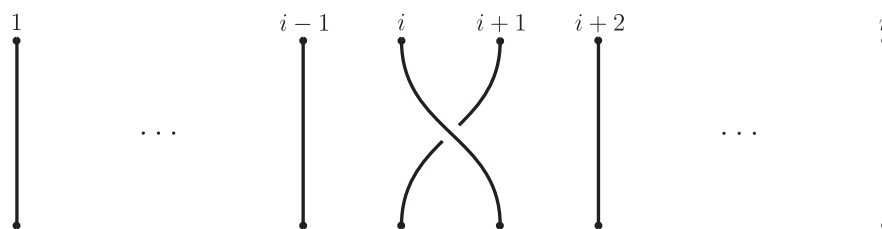


Figura 2.2: Generatori standard.

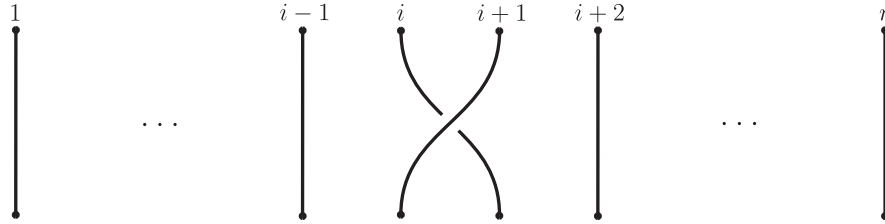


Figura 2.3: Generatori standard.

di proiezione xz che contiene D in un numero finito di strisce $a \leq z \leq b$, $a, b \in R$, in modo tale che ogni striscia contenga un solo incrocio tra stringhe contigue e tutte le altre siano in posizione verticale, cioè la porzione di diagramma in ogni striscia è del tipo σ_i o σ_i^{-1} .

Esempio 2.1.1. La figura ?? mostra la treccia $\beta = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$, $\beta \in B_3$.

2.1.2 Spazio delle configurazioni

In questo paragrafo introduciamo il concetto di spazio delle configurazioni che ci permetterà di vedere le trecce come un coppia nel suo gruppo fondamentale. Per una trattazione completa dell'argomento e le dimostrazioni mancanti rimandiamo a [12] e [16].

Definizione 2.1.5. Siano M una k -varietà, $k \geq 2$, $Q_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ un insieme di punti distinti di M . Si definisce spazio delle configurazioni di n

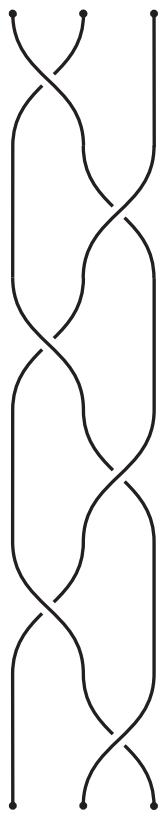


Figura 2.4: treccia.

punti *l'insieme*

$$F_{m,n}(M) = \{(p_1, \dots, p_n) : p_i \in M - Q_m, p_i \neq p_j \text{ per } i \neq j\}$$

Indicheremo lo spazio delle configurazioni con il simbolo $F_{m,n}$. Osserviamo che $F_{m,n}$ risulta una nk -varietà con la topologia prodotto indotta da M^n la quale non dipende dalla scelta dell'insieme Q_m . In particolare notiamo che $F_{m,1} = M - Q_m$.

Teorema 2.1.1. *Sia $\pi : F_{m,n} \rightarrow F_{m,1} = M - Q_m$ l'applicazione t.c. $\pi(p_1, \dots, p_n) = p_1$. Allora π è un fibrato localmente banale con fibra $F_{m+1,n-1}(M)$.*

Dimostrazione. Siano $x_0, q_{m+1} \in M - Q_m$ e $Q_{m+1} = Q_m \cup \{q_{m+1}\}$. Sia inoltre $\alpha : M \rightarrow M$ un omeomorfismo t.c.:

1. $\alpha(q_i) = q_i$ se $i = 1, \dots, m$
2. $\alpha(q_{m+1}) = x_0$

e scegliamo un intorno $U \cong R^m$ di x_0 in $M - Q_m$. Definiamo l'applicazione $\theta : U \times \bar{U} \rightarrow \bar{U}$, (\bar{U} indica la chiusura di U), t.c.:

1. se poniamo $\theta_z(y) = \theta(z, y)$, $\forall y \in \bar{U}$, allora $\theta_z : \bar{U} \rightarrow \bar{U}$ è un omeomorfismo che fissa $\partial\bar{U}$,
2. $\theta_z(z) = x_0$.

Osservazione 2.1.2. *Per (a) possiamo estendere θ a $\tilde{\theta} : U \times M \rightarrow M$ t.c. $\tilde{\theta}(x, y) = y$, $\forall y \notin U$.*

Allora le banalizzazioni di π sono:

$$\varphi(z, p_2, \dots, p_n) = (z, \theta_z^{-1}\alpha(p_2), \dots, \theta_z^{-1}\alpha(p_n))$$

dove $\varphi : U \times F_{m+1, n-1}(M) \rightarrow \pi^{-1}(U)$. □

Il risultato ottenuto vale anche per $\pi : F_{m, n}(M) \rightarrow F_{m, r}(M)$, $n \geq r > 1$, t.c.

$\pi(p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_r)$, cioè:

Teorema 2.1.2. $\pi : F_{m, n}(M) \rightarrow F_{m, r}(M)$ è un fibrato localmente banale con fibra $F_{m+r, n-r}$.

Corollario 2.1.1. Se $\pi_2(M - Q_m) \cong \pi_3(M - Q_m) \cong 0 \quad \forall m \geq 0$, allora $\pi_2(F_{0, n}) \cong 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il fibrato $\pi : F_{m, n}(M) \rightarrow F_{m, 1}(M)$ e la successione esatta:

$$\dots \pi_3(M - Q_m) \longrightarrow \pi_2(F_{m+1, n-1}(M)) \longrightarrow \pi_2(F_{m, n}(M)) \longrightarrow \pi_2(M - Q_m) \dots$$

Poiché $\pi_3(M - Q_m) \cong \pi_2(M - Q_m) \cong 0$ si ha che $\pi_2(F_{m+1, n-1}(M)) \cong \pi_2(F_{m, n}(M))$. Procedendo, ora, per induzione otteniamo:

$$\pi_2(F_{0, n}(M)) \cong \pi_2(F_{1, n-1}(M)) \cong \dots \cong \pi_2(F_{n-1, 1}(M)) \cong \pi_2(M - Q_{n-1}) \cong 0.$$

□

Vale anche il seguente risultato più generale:

Corollario 2.1.2. Sia M una 2-varietà compatta. $F_{m, n}$ è asferico per $m \geq 1$, cioè $\pi_i(F_{m, n}) \cong 0 \quad \forall i \geq 2$ e $m \geq 1$. Inoltre se $M \not\cong P^2, S^2$ anche $\pi_i(F_{0, n}) \cong 0 \quad \forall i \geq 2$.

Consideriamo, ora, il fibrato $\pi : F_{0,n} \rightarrow F_{0,n-1}$. Siano $z = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ il punto base per $\pi_1(F_{0,n})$ e $F_{n-1,1} = M - \{z_1^0, \dots, z_{n-1}^0\}$. Se $j : F_{n-1,1} \rightarrow F_{0,n}$ è l'inclusione definita da $j(z_n) = (z_1^0, \dots, z_{n-1}^0, z_n)$, $z_n \in M - \{z_1^0, \dots, z_{n-1}^0\}$, allora:

Teorema 2.1.3. *Se $\pi_2(M - Q_m) \cong \pi_3(M - Q_m) \cong \pi_0(M - Q_m) \cong 0 \forall m \geq 0$, allora è esatta la successione*

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}, z^0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(F_{0,n}, z) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(F_{0,n-1}, (z_1^0, \dots, z_{n-1}^0)) \longrightarrow 1 \quad (2.1)$$

dove π_* e j_* sono gli omeomorfismi indotti rispettivamente da π e j .

Dimostrazione. Basta considerare la successione del fibrato

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \pi_2(F_{0,n-1}) \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}, z^0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(F_{0,n}, z) \xrightarrow{\pi_*} \\ \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(F_{0,n-1}, (z_1^0, \dots, z_{n-1}^0)) \longrightarrow \pi_0(F_{n-1,1}, z^0) \end{aligned}$$

dove $\pi_2(F_{0,n-1}) \cong 0$ per il corollario 2.1.1 e $\pi_0(F_{n-1,1}, z^0) \cong \pi_0(M - Q_{n-1}) \cong 0$ per ipotesi. \square

2.1.3 Gli spazi $B_{0,n}$ e $F_{0,n}$

Vediamo, ora, come le trecce definite nella sezione 2.1.1 possono essere viste anche come cappi nello spazio delle configurazioni di R^2 . Fissiamo, dunque, $M = R^2$ e consideriamo su $F_{0,n}(R^2) = F_{0,n}$ la seguente relazione (di equivalenza): $\forall v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$, $v, w \in F_{0,n}$, diciamo che

$$v \sim w \Leftrightarrow (w_1, \dots, w_n) = \sigma(v_1, \dots, v_n)$$

dove $\sigma \in \Sigma_n$. Per la proposizione 1.2.1, $p : F_{0,n} \rightarrow F_{0,n}/\Sigma_n = B_{0,n}$, con la topologia quoziente, è un rivestimento. Scegliamo, poi, un punto base $\tilde{z}_0 \in F_{0,n}$ e $z_0 = p(\tilde{z}_0) \in B_{0,n}$. Ogni elemento del $\pi_1(B_{0,n})$, rappresentato dal cappio $\omega : [0, 1] \rightarrow B_{0,n}$ si solleva, per la proprietà di sollevamento 1.2.2, ad un cammino $\tilde{\omega} : [0, 1] \rightarrow F_{0,n}$ con $\tilde{\omega}(t) = (\tilde{\omega}_1(t), \dots, \tilde{\omega}_n(t))$, $t \in [0, 1]$, dove possiamo vedere ciascun $\tilde{\omega}_i(t)$ come un arco $A_i = (\tilde{\omega}_i(t), t)$ in $R^2 \times I$, $I = [0, 1]$. Con questa notazione A_i risulta una i -stringa precedentemente definita in 2.1.1 e $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ una n -trecchia. Dunque otteniamo la seguente:

Proposizione 2.1.2. *Il gruppo geometrico delle trecce B_n è il gruppo fondamentale dello spazio $B_{0,n}$ e il gruppo delle trecce pure P_n è il gruppo fondamentale di $F_{0,n}$.*

Si verifica che due trecce A e \bar{A} sono isotope in B_n se e solo se sono equivalenti in $\pi_1(B_{0,n})$ e dunque se esiste $H : I \times I \rightarrow B_{0,n}$ t.c.:

$$(i) \quad H(t, 0) = (H_1(t, 0), \dots, H_n(t, 0)) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))$$

$$(ii) \quad H(t, 1) = (H_1(t, 1), \dots, H_n(t, 1)) = (\bar{\omega}_1(t), \dots, \bar{\omega}_n(t))$$

$$(iii) \quad H(0, s) = (H_1(0, s), \dots, H_n(0, s)) = (z_1^0, \dots, z_n^0)$$

$$(iv) \quad H(1, s) = (H_1(1, s), \dots, H_n(1, s)) = (z_{\mu(1)}^0, \dots, z_{\mu(n)}^0).$$

Analogamente il prodotto delle trecce A e B in B_n corrisponde alla concatenazione di cappi in $\pi_1(B_{0,n})$.

Sia ora $\tilde{\mu} : \pi_1(B_{0,n}, z_0) \rightarrow \Sigma_n$ definita nel seguente modo: se $\alpha \in \pi_1(B_{0,n})$ è rappresentata dal coppia $g : I \rightarrow (B_{0,n}, z_0)$, allora

$$\tilde{\mu}(\alpha) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(0) & \dots & \tilde{g}_n(0) \\ \tilde{g}_1(1) & \dots & \tilde{g}_n(1) \end{pmatrix} \in \Sigma_n$$

dove $\tilde{g} : I \rightarrow (F_{0,n}, \tilde{z}^0)$ è l'unico sollevamento di g con punto iniziale \tilde{z}^0 . In particolare si ha che $\pi_1(F_{0,n}) = \text{Ker}\tilde{\mu}$ mentre ricordiamo che $\text{Ker}\mu = P_n$ dove $\mu : B_n \rightarrow \Sigma_n$ è l'omomorfismo definito da $\mu(\sigma_i) = (i \ i + 1)$. Fissiamo, ora, un punto base (che ometteremo per semplificare la notazione), $*$ = $\{x_1, \dots, x_n\}$ in $F_{0,n}$. Un ruolo essenziale nella dimostrazione 2.4.1 sarà svolto dalla seguente:

Proposizione 2.1.3. *La successione*

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}) \xrightarrow{j_*} \pi_1(F_{0,n}) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(F_{0,n-1}) \longrightarrow 1 \quad (2.2)$$

è esatta.

Dimostrazione 2.1.2. *La successione della proposizione è la stessa del teorema 2.1.3 in quanto $\pi_2(F_{0,n-1}) \cong 0$ per il corollario 2.1.1 mentre $\pi_0(F_{n-1,1}) \cong \pi_0(R^2 - \{q_1, \dots, q_{n-1}\}) \cong 0$.*

2.2 La presentazione di B_n

2.2.1 Una decomposizione cellulare per $B_{0,n}$

In questo paragrafo introdurremo una decomposizione cellulare dello spazio delle configurazioni del piano che ci permetterà, in virtù della proposizione

2.1.2 e del teorema 1.2.2, di dimostrare il teorema di Artin nel paragrafo 2.2.2.

Consideriamo il complesso cellulare \mathcal{C} di $S^{2n} = R^{2n} \cup \infty$ dell'esempio 1.2.4. Alla permutazione $\sigma \in \Sigma_n$ tale che $\sigma(1 \ 2 \ \dots \ n) = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$ associamo l'automorfismo Λ di S^{2n} che porta un punto arbitrario $(p_1, \dots, p_n) \in R^{2n}$ in $(p_{\sigma_1}, \dots, p_{\sigma_n}) \in R^{2n}$ ottenendo, così, un'azione di Σ_n su S^{2n} . Indichiamo con \widehat{S}^{2n} e \widehat{R}^{2n} , rispettivamente, gli spazi S^{2n}/Σ_n e R^{2n}/Σ_n . Osserviamo, inoltre, che Λ porta ∞ in ∞ e che l'immagine di una cella è ancora una cella della stessa dimensione e dunque Λ è un'applicazione cellulare e $\widehat{\mathcal{C}} = \{\Lambda(\mathcal{C})\}$ un complesso cellulare dello spazio \widehat{S}^{2n} . Le $n!$ celle di dimensione $2n$ hanno tutte la stessa immagine

$$\Lambda(\lambda_j^{2n}) = \{1 < 2 < \dots < n\} \subset \widehat{S}^{2n}$$

che denoteremo con λ^{2n} . Le celle sul bordo di λ^{2n} sono le $(2n - 1)$ -celle

$$\lambda_1^{2n-1} = \{1 \doteq 2 \ \dots \ i \ \dots \ n\}, \ \dots, \ \lambda_{n-1}^{2n-1} = \{1 \ 2 \ \dots \ i \ \dots \ n - 1 \doteq n\}.$$

Ricordiamo che per ottenere le celle di dimensione $(2n - 2)$ sul bordo di ciascuna λ_j^{2n-1} , $j = 1, \dots, n - 1$, basta sostituire un simbolo \doteq con $=$ o aggiungere un simbolo \doteq per cui si hanno le $(2n - 2)$ -celle del tipo:

$$(i) \ \lambda_{j,k}^{2n-2} = \{1 < 2 < \dots < j \doteq j + 1 < \dots < k \doteq k + 1 < \dots < n\} \text{ con} \\ 1 \leq j \leq k - 1 \leq n - 1$$

$$(ii) \ \lambda_j^{2n-2} = \{1 < 2 < \dots < j = j + 1 < \dots < n\}.$$

Mantenendo questa notazione indichiamo con Δ l'insieme delle celle di S^{2n} in cui compare almeno una volta il simbolo $=$ e osserviamo che $\infty \in \Delta$,

$\Lambda(\infty) = \infty \in \widehat{\Delta} = \Lambda(\Delta) \in \widehat{S}^{2n}$ e che $\widehat{\Delta} \cup \infty$ è un $(2n - 2)$ -sottocomplesso di \widehat{S}^{2n} . I punti $p_1, \dots, p_n \in R^2$ sono distinti se e solo se $p = (p_1, \dots, p_n) \in R^{2n} - \Delta$, se e solo se $\widehat{p} \in \widehat{R}^{2n} - \widehat{\Delta}$ e per quanto appena detto, al fine di trovare $\pi_1(\widehat{R}^{2n} - \widehat{\Delta})$, è sufficiente calcolare $\pi_1(\widehat{S}^{2n} - \widehat{\Delta})$. Per il teorema 1.2.2 e per le osservazioni 1.2.2 e 1.2.3 ci basta considerare le celle di $\widehat{S}^{2n} - \widehat{\Delta}$ di dimensione $2n - 2, 2n - 1, 2n$. Tali celle si ottengono dal complesso cellulare \widehat{C} semplicemente eliminando quelle in cui compare il segno $=$ ovvero le $(2n - 2)$ -celle della forma

$$\lambda_j^{2n-2} = \{1 < 2 < \dots < j = j + 1 < \dots < n\}$$

Denoteremo con Θ l'insieme delle celle rimanenti.

2.2.2 Il teorema di Artin

Come già detto nell'introduzione, in [14] è presentata una dimostrazione del teorema di Artin 2.2.1 che differisce da quella proposta dallo stesso E. Artin pubblicata in [2]. I contenuti di questo paragrafo sviluppano le idee in [14].

Teorema 2.2.1 (Teorema di Artin). *Il gruppo delle trecce B_n ammette una presentazione con generatori $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relazioni:*

1. $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$ se $|i - k| \geq 2$,
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ $i = 1, \dots, n - 2$.

Dimostrazione 2.2.1. 1. Poiché $\lambda^{2n} = \{1 < 2 < \dots < n\}$ è l'unica $2n$ -cella abbiamo un generatore σ_j per ogni $(2n - 1)$ -cella λ_j^{2n-1}

rappresentato da un cappio in $\lambda^{2n} \cup \lambda_j^{2n-1}$. Scegliamo un punto base $* = \{p_1, \dots, p_n\} \in \lambda^{2n}$ e supponiamo di orientare λ_j^{2n-1} in modo tale che il moto di $p_1 \cup \dots \cup p_n$ durante il cappio che rappresenta σ_j sia come nella figura ??.



Figura 2.5: Moto dei punti.

Le figure ?? e ?? mostrano rispettivamente la treccia σ_j^{-1} e σ_j^{-1} .



Figura 2.6: σ_j .

2. Un insieme completo di relazioni è dato, come sappiamo, leggendo il bordo delle $(2n - 2)$ -celle di Θ . Distinguiamo tali celle in due tipi:

(a) $\lambda_{i,k}^{2n-2} = \{ \dots < i \doteq i + 1 < \dots < k \doteq k + 1 \dots \}, \quad k \geq i + 2,$

(b) $\lambda_{i,i+1}^{2n-2} = \{ \dots < i \doteq i + 1 \doteq i + 2 < \dots \}, \quad i = 1, \dots, n - 2,$



Figura 2.7: σ_j^{-1} .

dove $\lambda_{i,k}^{2n-2}$ è sul bordo di λ_i^{2n-1} e λ_k^{2n-1} mentre $\lambda_{i,i+1}^{2n-2}$ su quello di λ_i^{2n-1} e λ_{i+1}^{2n-1} . Poiché lo spazio quoziente $B_{0,n}$ ha una sola $2n$ -cella alla quale stanno incollati i generatori non conosciamo i bordi delle $(2n - 2)$ -celle. Le figure ?? e ?? mostrano le sezioni locali di R^{2n} con piani perpendicolari a $\lambda_{i,k}^{2n-2}$ e $\lambda_{i,i+1}^{2n-2}$ rappresentate dai punti.

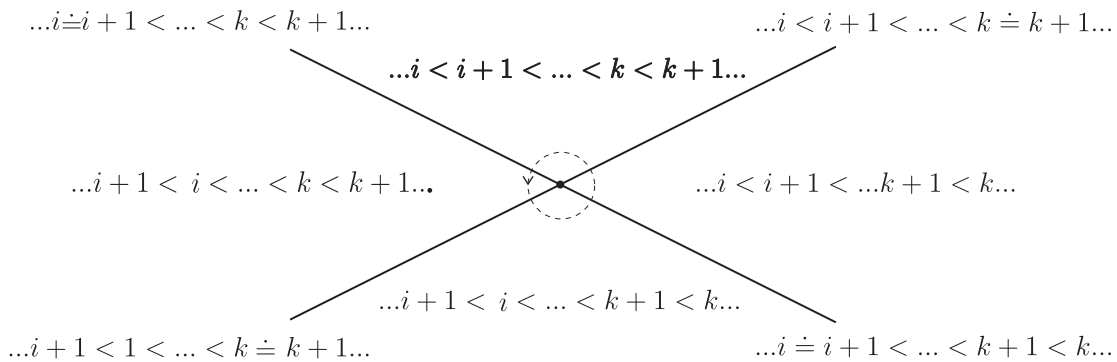


Figura 2.8: $\lambda_{i,k}^{2n-2}$.

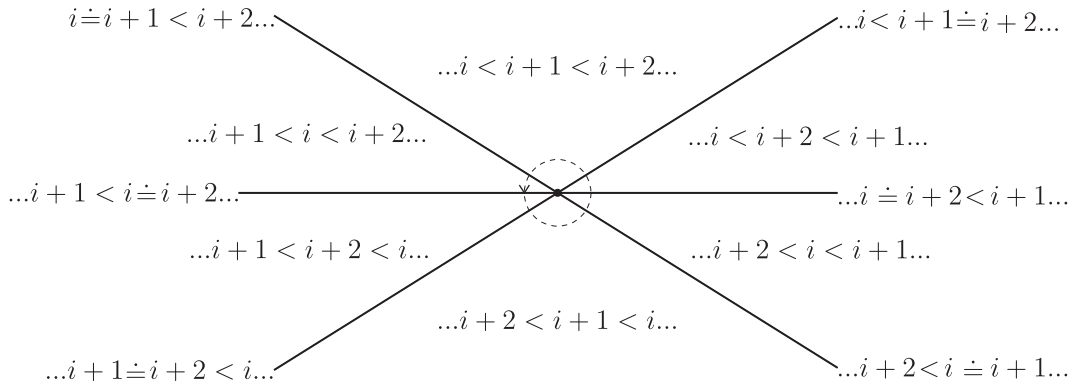


Figura 2.9: $\lambda_{i,i+1}^{2n-2}$.

Scelto il punto base, ad esempio, nella $2n$ -cella

$$\lambda^{2n} = \{1 < \dots < i < i + 1 < \dots < k < k + 1 < \dots n\}$$

e muovendoci in senso antiorario otteniamo le relazioni:

$$(a) r_{i,k} = \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1}$$

$$(b) r_{i,i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}$$

rispettivamente nel caso delle celle $\lambda_{i,k}^{2n-2}$ e $\lambda_{i,i+1}^{2n-2}$.

Le figure ?? e ?? mostrano il moto di $p = (p_1, \dots, p_n) \in R^2$ e il cappio corrispondente alle relazioni trovate.

Dunque:

$$B_n \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i \text{ se } |i-j| \geq 2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, n-2 \rangle.$$

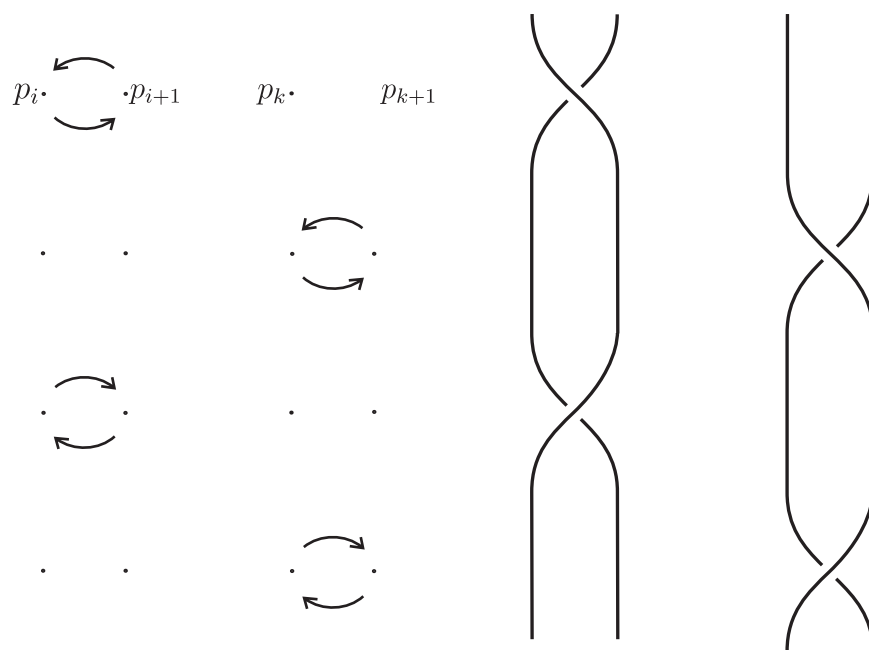


Figura 2.10: $\sigma_i \sigma_k \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1}$.

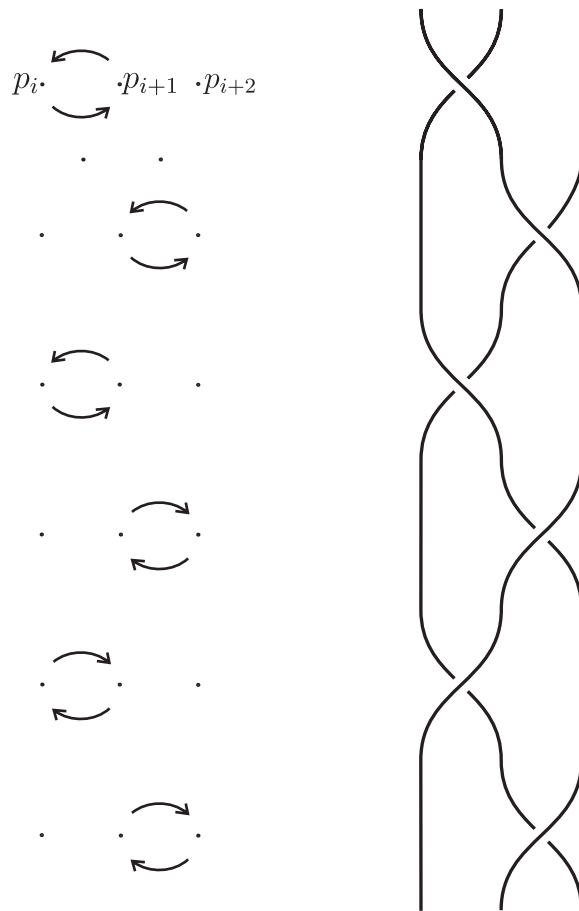


Figura 2.11: $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}$.

2.3 La presentazione a bande per B_n

In questo paragrafo introdurremo una recente presentazione, proposta da Birman in [4], detta anche presentazione a bande. Come i generatori σ_j di Artin la permutazione associata ai nuovi generatori è uno scambio, precisamente lo scambio $(s t)$. Introduciamo dunque le seguenti parole in B_n .

Definizione 2.3.1 (Bande). *Per ogni t, s tali che $1 \leq s < t \leq n$ chiamiamo banda la treccia*

$$a_{ts} = (\sigma_{t-1}\sigma_{t-2}\dots\sigma_{s+1})\sigma_s(\sigma_{t-1}\sigma_{t-2}\dots\sigma_{s+1})^{-1}$$

Osserviamo che le trecce $a_{21}, a_{32}, \dots, a_{n(n-1)}$ coincidono con i generatori di Artin e che, geometricamente, il generico a_{ts} è lo scambio tra la stringa t e la stringa s mentre tutte le altre rimangono fisse.

Teorema 2.3.1 (Teorema di presentazione a bande). *Il gruppo delle trecce B_n ha una presentazione con generatori $\{a_{ts}; 1 \leq s < t \leq n\}$ e relazioni [2.3.1]:*

$$\begin{cases} a_{ts}a_{rq} = a_{rq}a_{ts} & (t-s)(t-q)(s-r)(s-q) > 0 \\ a_{ts}a_{sr} = a_{tr}a_{ts} = a_{sr}a_{tr} & 1 \leq r < s < t \leq n \end{cases}$$

Osservazione 2.3.1. *Le nuove relazioni affermano rispettivamente l'una che a_{ts} e a_{rq} commutano se t e s non separano r e q e l'altra che esiste una sorta di commutatività, diciamo parziale, quando generatori vicini hanno una stringa in comune. In particolare dicono che se in una treccia occorre*

il prodotto $a_{ts}a_{sr}$ possiamo muovere a_{ts} a destra (rispettivamente a_{sr} a sinistra) a meno di incrementare il primo indice di a_{sr} fino a t (decrescere il secondo indice di a_{ts} fino a r .)

Dimostrazione 2.3.1. Prendiamo la presentazione standard e applichiamo il teorema di Tietze 1.1.2. Per la trasformazione 3., definita in 1.1, aggiungiamo i generatori a_{ts} e le relazioni $a_{ts} = (\sigma_{t-1}\sigma_{t-2}\dots\sigma_{s+1})\sigma_s(\sigma_{t-1}\sigma_{t-2}\dots\sigma_{s+1})^{-1}$. Poiché, per la precedente osservazione, le relazioni [2.3.1] sono descritte da isotopie di trecce, devono essere conseguenze delle relazioni standard e dunque le aggiungiamo alla presentazione in virtù della prima trasformazione di Tietze. Osserviamo, poi, che se $t = s + 1$ allora $a_{ts} = \sigma_s$ per cui possiamo eliminare i generatori standard. Abbiamo dunque per B_n la presentazione con generatori a_{ts} e relazioni [2.3.1]

$$a_{(t+1)t}a_{(s+1)s} = a_{(s+1)s}a_{(t+1)t} \quad \text{se } |t - s| > 1 \quad (2.3)$$

$$a_{(t+1)t}a_{(s+1)s}a_{(t+1)t} = a_{(s+1)s}a_{(t+1)t}a_{(s+1)s} \quad \text{se } |t - s| = 1 \quad (2.4)$$

$$a_{ts} = (a_{t(t-1)}\dots a_{(s+2)(s+1)})a_{(s+1)s}(a_{t(t-1)}\dots a_{(s+2)(s+1)})^{-1} \quad (2.5)$$

Basta dimostrare che le relazioni (2.3), (2.4) e (2.5) sono conseguenza delle [2.3.1]. La (2.3) è un caso speciale di $a_{ts}a_{rq} = a_{rq}a_{ts}$, mentre la relazione (2.4) si riduce, ad esempio assumendo $t = s + 1$, a

$$a_{(s+2)s}a_{(s+2)(s+1)} = a_{(s+1)(s)}a_{(s+2)s}$$

che è un caso speciale della seconda relazione [2.3.1]. Infine la (2.5) è banale se $t = s + 1$. In tutti gli altri casi possiamo applicare le relazioni [2.3.1] per cambiare i prodotti del tipo $a_{(s+2)(s+1)}a_{(s+2)s}$ in $a_{(s+2)s}a_{(s+2)(s+1)}$: in tal modo il generatore centrale $a_{(s+1)s}$ è spostato a sinistra con gli indici t e s mentre a destra si ottengono le relazioni banali.

2.4 La presentazione per P_n

Con lo stesso procedimento usato nella sezione precedente o con il metodo di Reidemeister-Schreier per la presentazione di sottogruppi può essere ottenuta una presentazione per il gruppo delle trecce pure P_n . Entrambe le strade risultano però alquanto macchinose nei calcoli. Nella presente sezione riporterò, dunque, la nostra dimostrazione. Consideriamo il gruppo astratto

$$\widetilde{B}_n = \langle \widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_n : \widetilde{\sigma}_i \widetilde{\sigma}_k = \widetilde{\sigma}_k \widetilde{\sigma}_i \text{ se } |i-j| \geq 2, \widetilde{\sigma}_i \widetilde{\sigma}_{i+1} \widetilde{\sigma}_i = \widetilde{\sigma}_{i+1} \widetilde{\sigma}_i \widetilde{\sigma}_{i+1}, i = 1, \dots, n-2 \rangle$$

e l'isomorfismo $\widetilde{\alpha}_n : \widetilde{B}_n \xrightarrow{\cong} B_n$ t.c. $\widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma}_i) = \sigma_i$. Indichiamo poi con \widetilde{P}_n il gruppo generato dagli elementi:

$$\widetilde{A}_{i,j} = \widetilde{\sigma}_{j-1} \widetilde{\sigma}_{j-2} \dots \widetilde{\sigma}_{i+1} \widetilde{\sigma}_i^2 \widetilde{\sigma}_{i+1}^{-1} \dots \widetilde{\sigma}_{j-2}^{-1} \widetilde{\sigma}_{j-1}^{-1} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

e relazioni:

$$\tilde{A}_{r,s}^{-1} \tilde{A}_{i,j} \tilde{A}_{r,s} = \begin{cases} \tilde{A}_{i,j} & r < s < i < j \text{ o } i < r < s < j \\ \tilde{A}_{r,j} \tilde{A}_{i,j} \tilde{A}_{r,j}^{-1} & s = i \\ \tilde{A}_{i,j} \tilde{A}_{s,j} \tilde{A}_{i,j} \tilde{A}_{s,j}^{-1} \tilde{A}_{i,j}^{-1} & i = r < s < j \\ \tilde{A}_{r,j} \tilde{A}_{s,j} \tilde{A}_{r,j}^{-1} \tilde{A}_{s,j}^{-1} \tilde{A}_{i,j} \tilde{A}_{s,j} \tilde{A}_{r,j} \tilde{A}_{s,j}^{-1} \tilde{A}_{r,j}^{-1} & r < i < s < j \end{cases}$$

Poiché le relazioni sono soddisfatte in P_n dagli elementi

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \quad (1 \leq i < j \leq n - 1)$$

si ha che è ben definito l'omomorfismo $\alpha_n : \tilde{P}_n \rightarrow P_n$. La figura ?? rappresenta la treccia $A_{i,j}$:

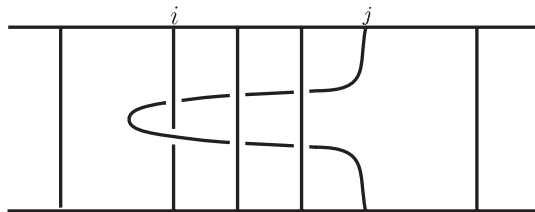


Figura 2.12: $A_{i,j}$.

Il nostro scopo sarà, dunque, dimostrare il seguente:

Teorema 2.4.1. *Il gruppo delle trecce pure P_n ammette una presentazione*

con generatori $A_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n - 1$ e relazioni [2.4.1]:

$$A_{r,s}^{-1}A_{i,j}A_{r,s} = \begin{cases} A_{i,j} & r < s < i < j \text{ o } i < r < s < j \\ A_{r,j}A_{i,j}A_{r,j}^{-1} & s = i \\ A_{i,j}A_{s,j}A_{i,j}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}^{-1} & i = r < s < j \\ A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1} & r < i < s < j \end{cases}$$

Dimostrazione 2.4.1. Vogliamo provare che $\alpha_n : \tilde{P}_n \rightarrow P_n$ è un isomorfismo. Iniziamo con l'introdurre il gruppo libero $\tilde{U}_n = \langle \tilde{A}_{1n}, \dots, \tilde{A}_{n-1,n} \rangle$. Siano poi $i_n : \tilde{U}_n \rightarrow \tilde{P}_n$ t.c. $i_n(\tilde{A}_{i,n}) = \tilde{A}_{i,n}$ e $\eta : \tilde{P}_n \rightarrow \tilde{P}_{n-1}$ l'omomorfismo tale che $\eta(\tilde{A}_{ij}) = \tilde{A}_{ij}$ se $1 \leq i < j \leq n - 1$ e $\eta(\tilde{A}_{in}) = 1$, $i = 1, \dots, n - 1$. Si ha il seguente

Lemma 2.4.1. La successione

$$1 \longrightarrow \tilde{U}_n \xrightarrow{i_n} \tilde{P}_n \xrightarrow{\eta} \tilde{P}_{n-1} \longrightarrow 1$$

è esatta.

Dimostrazione 2.4.2. *P* passo: la successione è esatta in \tilde{U}_n ovvero i_n è iniettiva. Mostriamo a tale scopo che l'immagine $i_n(\tilde{U}_n)$ è un gruppo libero.

Consideriamo il sottogruppo $D_n \subseteq B_n$ delle trecce la cui permutazione associata, (introdotta nel paragrafo 2.1), fissa la lettera n . Applichiamo il metodo di Reidemeister-Schreier descritto nel capitolo 1 per ottenere una presentazione di D_n a partire da quella di B_n . La presentazione ottenuta ci permetterà di affermare che il gruppo U_n generato dalle trecce $A_{i,n}$ è libero.

Poniamo

$$\begin{cases} N_i = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_i & 1 \leq i \leq n - 1 \\ N_n = 1 \end{cases}$$

Notiamo che la permutazione μ associata a N_i è $\mu(N_i) = (i \ i+1 \ \dots \ n-1 \ n)$ e dunque che μ porta la lettera n in i , $\forall i = 1, \dots, n-1$. Questo ci dice che l'insieme N_1, N_2, \dots, N_n è un insieme completo di rappresentanti per le classi laterali di D_n in B_n : cioè se denotiamo con $\rho(\beta)$ il rappresentante di ogni treccia $\beta \in B_n$ abbiamo che

$$\rho(\beta) = N_i$$

se e solo se la permutazione corrispondente a β porta la lettera n in i . Osserviamo inoltre che ogni segmento iniziale di N_i , $i \leq j$, è della forma $\sigma_{n-1} \dots \sigma_j$ che è ancora un rappresentante e dunque l'insieme N_1, \dots, N_n un insieme di Schreier nel senso definito in 1.1.2. Per il teorema 1.1.6 i generatori di D_n sono tutti gli elementi della forma

$$\gamma(N_i, \sigma_j) = N_i \sigma_j \cdot (\rho(N_i \sigma_j))^{-1} \quad (2.6)$$

tali che $\gamma(N_i, \sigma_j) \neq 1$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j < n$. Le relazioni, invece, si trovano considerando tutte le parole, espresse in termini dei generatori (2.6), del tipo

$$N_k \cdot r_l \cdot N_k^{-1} \quad (2.7)$$

dove $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2$ e r_l sono le relazioni in B_n rispettivamente date da:

$$(1) \ r_1 = \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j \quad \text{se } |i - j| \geq 2$$

$$(2) \ r_2 = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i.$$

Poiché

$$\rho(N_i\sigma_j) = \begin{cases} N_{i-1} & j = i - 1 \\ N_{i+1} & j = i \\ N_i & j \neq i, i - 1 \end{cases}$$

si ha che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\gamma(N_i, \sigma_j) = \begin{cases} N_i\sigma_{i-1}N_{i-1}^{-1} = 1 & j = i - 1 \\ N_i\sigma_iN_{i+1}^{-1} = N_{i+1}\sigma_i^2N_{i+1}^{-1} = A_{i,n} & j = i \\ N_i\sigma_{i+1}N_i^{-1} = \sigma_i & j = i + 1 \\ N_i\sigma_jN_i^{-1} = \sigma_j & j \leq i - 2 \\ N_i\sigma_jN_i^{-1} = \sigma_{j-1} & j \geq i + 2 \end{cases} \quad (2.8)$$

e dunque possiamo concludere che D_n è generato da $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n}$.

In vista di calcolare le relazioni consideriamo anche le seguenti espressioni che si ricavano dalle relazioni $r_{1,2}$ di B_n :

$$\rho(N_i\sigma_j^{-1}) = \begin{cases} N_{i-1} & j = i - 1 \\ N_{i+1} & j = i \\ N_i & j \neq i, i - 1 \end{cases}$$

da cui otteniamo:

$$\gamma(N_i, \sigma_j^{-1}) = \begin{cases} N_i\sigma_{i-1}^{-1}N_{i-1}^{-1} = A_{i-1,n}^{-1} & j = i - 1 \\ N_i\sigma_i^{-1}N_{i+1}^{-1} = 1 & j = i \\ N_i\sigma_{i+1}^{-1}N_i^{-1} = \sigma_i^{-1} & j = i + 1 \\ N_i\sigma_j^{-1}N_i^{-1} = \sigma_j^{-1} & j \leq i - 2 \\ N_i\sigma_j^{-1}N_i^{-1} = \sigma_{j-1}^{-1} & j \geq i + 2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Utilizzando le (2.8) e le (2.9) ricaviamo:

$$1. N_i \sigma_k^\epsilon = \sigma_k^\epsilon N_i \quad k \leq i-2, \epsilon \pm 1$$

$$2. N_i \sigma_{i-1} = N_{i-1}$$

$$3. N_i \sigma_{i-1}^{-1} = N_i \sigma_{i-1}^{-1} \rho(N_i \sigma_{i-1}^{-1})^{-1} \rho(N_i \sigma_{i-1}^{-1})$$

$$= \gamma(N_i, \sigma_{i-1}^{-1}) \cdot N_{i-1}$$

$$= \gamma(N_i, \sigma_{i-1})^{-1} \cdot N_{i-1}$$

$$= A_{i-1,n}^{-1} N_{i-1}$$

$$4. N_i \sigma_i = N_{i+1} \sigma_i^2$$

$$= N_{i+1} \sigma_i^2 N_{i+1}^{-1} \cdot N_{i+1}$$

$$= A_{i,n} N_{i+1}$$

$$5. N_i \sigma_i^{-1} = N_{i+1}$$

$$\begin{aligned}
6. N_i \sigma_{i+1} &= N_i \sigma_{i+1} N_i^{-1} \cdot N_i \\
&= N_{i+1} \cdot \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \cdot N_{i+1}^{-1} \cdot N_i \\
&= N_{i+1} \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \cdot N_{i+1}^{-1} \cdot N_i \\
&= N_{i+2} \cdot \sigma_i \cdot N_{i+2}^{-1} \cdot N_i \\
&= \sigma_i N_i
\end{aligned}$$

$$7. N_i \sigma_{i+1}^{-1} = \sigma_i^{-1} N_i$$

$$\begin{aligned}
8. N_i \sigma_k^\epsilon &= N_i \sigma_k^\epsilon N_i^{-1} \cdot N_i && k \geq 2, \epsilon = \pm 1 \\
&= N_{k-1} \sigma_k^\epsilon N_{k-1}^{-1} \cdot N_i \\
&= N_k \cdot \sigma_{k-1} \sigma_k^\epsilon \sigma_{k-1}^{-1} \cdot N_k^{-1} \cdot N_i \\
&= N_k \cdot \sigma_k^{-1} \sigma_{k-1}^\epsilon \sigma_k \cdot N_k^{-1} \cdot N_i \\
&= N_{k+1} \cdot \sigma_{k-1}^\epsilon \cdot N_{k+1}^{-1} \cdot N_i \\
&= \sigma_{k-1}^\epsilon \cdot N_i
\end{aligned}$$

Abbiamo, ora, tutti gli strumenti necessari per procedere nei nostri calcoli.

Ricordiamo che per il teorema 1.1.6 le relazioni di D_n sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_k \cdot \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_i \cdot N_k^{-1} \quad i, j < n, |i - j| \geq 2 \\ N_k \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \cdot N_k^{-1} \quad 1 \leq i \leq n - 2 \end{array} \right.$$

Analizziamo i casi possibili per $N_k \cdot \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_i \cdot N_k^{-1}$ assumendo $i > j$:

$$1) \ i \leq k - 2 \Rightarrow \quad N_k \cdot r_1 \cdot N_k^{-1} \quad = \quad 1$$

$$\begin{aligned} 2) \ i = k - 1 \Rightarrow \quad N_{i+1} \cdot r_1 \cdot N_{i+1}^{-1} &= A_{i,n}^{-1} N_i \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_{i+1}^{-1} \\ &= A_{i,n}^{-1} \sigma_j^{-1} N_i \sigma_i \sigma_j N_{i+1}^{-1} \\ &= A_{i,n}^{-1} \sigma_j^{-1} A_{i,n} N_{i+1} \sigma_j N_{i+1}^{-1} \\ &= A_{i,n}^{-1} \sigma_j^{-1} A_{i,n} \sigma_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \ i = k \Rightarrow \quad N_i \cdot r_1 \cdot N_i^{-1} &= N_{i+1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_i^{-1} \\ &= \sigma_j^{-1} N_{i+1} \sigma_i \sigma_j N_i^{-1} \\ &= \sigma_j^{-1} N_i \sigma_j N_i^{-1} \end{aligned}$$

$$= \sigma_j^{-1} \sigma_j N_i N_i^{-1} = 1$$

$$4) \ i = k + 1, \ j < i - 2 \Rightarrow \quad N_{i-1} \cdot r_1 \cdot N_{i-1}^{-1} = \sigma_{i-1}^{-1} N_{i-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_{i-1}^{-1}$$

$$= \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_j^{-1} N_{i-1} \sigma_i \sigma_j N_{i-1}^{-1}$$

$$= \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{i-1} N_{i-1} \sigma_j N_{i-1}^{-1}$$

$$= \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{i-1} \sigma_j = 1$$

$$5) \ i = k + 1, \ j = i - 2 \Rightarrow \quad N_{i-1} \cdot r_1 \cdot N_{i-1}^{-1} = \sigma_{i-1}^{-1} N_{i-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_{i-1}^{-1}$$

$$= \sigma_{i-1}^{-1} A_{i-2,n}^{-1} N_{i-2} \sigma_i \sigma_{i-2} N_{i-1}^{-1}$$

$$= \sigma_{i-1}^{-1} A_{i-2,n}^{-1} \sigma_{i-1} N_{i-2} \sigma_{i-2} N_{i-1}^{-1}$$

$$= \sigma_{i-1}^{-1} A_{i-2,n}^{-1} \sigma_{i-1} A_{i-2,n} N_{i-1} N_{i-1}^{-1}$$

$$6) \ i \geq k + 2, \ j \leq k - 2 \Rightarrow \quad N_k \cdot r_1 \cdot N_k^{-1} = \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_j^{-1} N_k \sigma_i \sigma_j N_k^{-1}$$

$$= \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{i-1} N_k \sigma_j N_k^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned}
7) \ i \geq k+2, \ j = k-1 \Rightarrow \quad N_k \cdot r_1 \cdot N_k^{-1} &= \sigma_{i-1}^{-1} N_{j+1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_{j+1}^{-1} \\
&= \sigma_{i-1}^{-1} A_{j,n}^{-1} N_j \sigma_i \sigma_j N_{j+1}^{-1} \\
&= \sigma_{i-1}^{-1} A_{j,n}^{-1} \sigma_{i-1} N_j \sigma_j N_{j+1}^{-1} \\
&= \sigma_{i-1}^{-1} A_{j,n}^{-1} \sigma_{i-1} A_{j,n} N_{j+1} N_{j+1}^{-1} \\
8) \ i \geq k+2, \ j = k \Rightarrow \quad N_j \cdot r_1 \cdot N_j^{-1} &= \sigma_{i-1}^{-1} N_j \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_j^{-1} \\
&= \sigma_{i-1}^{-1} N_{j+1} \sigma_i \sigma_j N_j^{-1} = 1 \\
9) \ i \geq k+3, \ j = k+1 \Rightarrow \quad N_{j-1} \cdot r_1 \cdot N_{j-1}^{-1} &= \sigma_i^{-1} N_{j-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_{j-1}^{-1} \\
&= \sigma_i^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} N_{j-1} \sigma_i \sigma_j N_{j-1}^{-1} \\
&= \sigma_i^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_i N_{j-1} \sigma_j N_{j-1}^{-1} \\
&= \sigma_i^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_i \sigma_j N_{j-1} N_{j-1}^{-1} \\
&= \sigma_i^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_i \sigma_{j-1} N_{j-1} N_{j-1}^{-1} = 1 \\
10) \ i \geq k+2, \ j \geq k+2 \Rightarrow \quad N_k \cdot r_1 \cdot N_k^{-1} &= N_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j N_k^{-1} = 1
\end{aligned}$$

Poiché per la relazione $N_k \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \cdot N_k^{-1}$ si procede allo stesso modo riportiamo soltanto i risultati:

$$1) \ i + 1 \leq k - 2 \Rightarrow \quad N_k \cdot r_2 \cdot N_k^{-1} \quad = \quad 1$$

$$2) \ i + 1 = k - 1 \Rightarrow \quad N_{i+2} \cdot r_2 \cdot N_{i+2}^{-1} \quad = \quad \sigma_i^{-1} A_{i,n} \sigma_i A_{i,n} A_{i+1,n}^{-1} A_{i,n}^{-1}$$

$$3) \ i + 1 = k \Rightarrow \quad N_{i+1} \cdot r_2 \cdot N_{i+1}^{-1} \quad = \quad \sigma_{i-1}^{-1} A_{i,n} \sigma_{i-1} A_{i-1,n}$$

$$4) \ i + 1 = k + 1 \Rightarrow \quad N_i \cdot r_2 \cdot N_i^{-1} \quad = \quad 1$$

$$5) \ i + 1 = k + 2 \Rightarrow \quad N_{i-1} \cdot r_2 \cdot N_{i-1}^{-1} \quad = \quad 1$$

$$6) \ i + 1 > k + 2 \Rightarrow \quad N_k \cdot r_2 \cdot N_k^{-1} \quad = \quad 1$$

Finalmente, riassumendo, concludiamo che D_n ammette una presentazione con generatori:

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n} \quad (2.10)$$

e relazioni dei seguenti due tipi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i - j| \geq 2, \quad i, j \leq n - 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i < n - 2 \end{array} \right. \quad (R1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_j^{-1} A_{i,n} \sigma_j = \begin{cases} A_{j,n} A_{j+1,n} A_{j,n}^{-1} & i = j \\ A_{j,n} & i = j + 1 \\ A_{i,n} & i \neq j, j + 1 \end{cases} & \end{array} \right. \quad (R2)$$

Facciamo vedere che U_n è libero. Consideriamo i seguenti automorfismi destri del gruppo libero F_{n-1} che sono in corrispondenza biunivoca con i $2n - 3$ generatori (2.10):

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x_j)\bar{\sigma}_j & = x_j x_{j+1} x_j^{-1} \\ (x_{j+1})\bar{\sigma}_j & = x_j \\ (x_k)\bar{\sigma}_j & = x_k \quad k \neq j, j+1 \\ (x_k)\bar{A}_{i,n} & = x_i x_k x_i^{-1} \quad i, k = 1, \dots, n-1 \end{array} \right.$$

È di facile verifica che tali automorfismi soddisfano le relazioni (R1) e (R2) per cui il sottogruppo da essi generato è una rappresentazione ξ di D_n nel gruppo degli automorfismi $\text{Aut}(F_{n-1})$ di F_{n-1} . Osserviamo inoltre che i generatori $A_{i,n}$ di U_n vanno, mediante ξ , negli $\bar{A}_{i,n}$ i quali, come provato in [7], generano il gruppo degli automorfismi interni di F_{n-1} , $\text{Int}(F_{n-1})$. Tale gruppo è isomorfo a F_{n-1} stesso e gli automorfismi $\bar{A}_{i,n}$ corrispondono ai generatori liberi x_i di F_{n-1} , $i = 1, \dots, n-1$: dunque U_n risulta un gruppo libero.

Torniamo a considerare gli omomorfismi $i_n : \tilde{U}_n \rightarrow \mathfrak{F}_n$ e $\alpha_n : \mathfrak{F}_n \rightarrow P_n$. Se $i_n(\tilde{U}_n)$ non fosse libero e dunque esistesse una relazione non banale r si avrebbe $\alpha_n(r) \neq 1$ in U_n ma ciò non è possibile perché è un gruppo libero. In conclusione $i_n(\tilde{U}_n)$ è libero e i_n iniettiva.

IP passo: Mostriamo che $\text{Ker}\eta = i_n(\tilde{U}_n)$.

Innanzitutto $i_n(\tilde{U}_n) \subseteq \text{Ker}\eta$ banalmente per definizione di η . Per l'inclusione opposta consideriamo il diagramma

definito in virtù del teorema 1.1.1. Prendiamo in \tilde{P}_n un elemento β appar-

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{P}_n & \xrightarrow{\eta} & \tilde{P}_{n-1} \\
 \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\eta} & \\
 \tilde{P}_n/i_n(\tilde{U}_n) & &
 \end{array}$$

tenente a $\text{Ker}\eta$, dunque β della forma $\beta = \tilde{A}_{i_1, j_1}^{\epsilon_1} \dots \tilde{A}_{i_k, j_k}^{\epsilon_k}$, $1 \leq i_l \leq j_l \leq n$, $l = 1, \dots, k$. Consideriamo, inoltre, la proiezione $\pi(\beta) = [\tilde{A}_{i_1, j_1}^{\epsilon_1} \dots \tilde{A}_{i_k, j_k}^{\epsilon_k}] \in \tilde{P}_n/\tilde{U}_n$. Poiché $\tilde{U}_n \tilde{U}_n \text{nlhd} \tilde{P}_n$ possiamo spostare a sinistra tutti gli elementi $\tilde{A}_{i,n}$ che compaiono ottenendo

$$\pi(\beta) = [\tilde{A}_{i_1, n}^{\epsilon_1} \dots \tilde{A}_{i_l, n}^{\epsilon_l}] \cdot [\tilde{A}_{i_{l+1}, j_{l+1}}^{\epsilon_{l+1}} \dots \tilde{A}_{i_{k-l}, j_{k-l}}^{\epsilon_{k-l}}] = 1$$

in quanto in $\tilde{P}_n/i_n(\tilde{U}_n)$, $[\tilde{A}_{i_1, n}^{\epsilon_1} \dots \tilde{A}_{i_l, n}^{\epsilon_l}] = 1$ e $\eta(\beta) = \tilde{\eta}[\tilde{A}_{i_{l+1}, j_{l+1}}^{\epsilon_{l+1}} \dots \tilde{A}_{i_{k-l}, j_{k-l}}^{\epsilon_{k-l}}] = 1$ per la commutatività del diagramma.

III° passo: η è suriettiva per definizione.

Riprendiamo, ora, la sequenza esatta fondamentale di P_n e consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & \tilde{U}_n & \xrightarrow{i_n} & \tilde{P}_n & \xrightarrow{\eta} & \tilde{P}_{n-1} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \alpha_n / \tilde{U}_n & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(F_{n-1,1}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(F_{0,n}) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(F_{0,n-1}) & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

dove $\alpha_n / \tilde{U}_n : \tilde{U}_n \rightarrow \pi_1(F_{n-1,1})$ è l'isomorfismo che manda i generatori $\tilde{A}_{i,n}$ nei generatori x_i del gruppo libero $\pi_1(F_{n-1,1})$. Poiché $\alpha_1 : \tilde{P}_1 \rightarrow \pi_1(F_{0,1})$ è un isomorfismo in quanto entrambi i gruppi sono banali possiamo, per

induzione, assumere che α_{n-1} è un isomorfismo e dunque, per il lemma del 5 ([16]), concludere che α_n è un isomorfismo.

Osservazione 2.4.1. P_n è il prodotto diretto di P_{n-1} e U_n .

Osservazione 2.4.2. Applicando il procedimento di Reidemeister ai gruppi D_h , $h < n$, otteniamo che sono liberi i gruppi U_h generati dagli elementi $A_{i,h}$ con $1 \leq i < h$.

2.5 Conclusioni

Come già detto nell'introduzione, uno degli scopi del nostro lavoro è stato quello di dimostrare il teorema 2.4.1 per fare chiarezza sulle differenti versioni introdotte nel corso degli anni. Possiamo dunque affermare, in virtù della dimostrazione 2.4.1, che sono equivalenti il teorema 18 di Artin in [2] con $\epsilon = 1$, di Birman nell'errata di [5] e di Magnus in [18], mentre non è corretta la versione di Artin per $\epsilon = -1$. In questo paragrafo esporremo i vari enunciati e, in particolare, la versione corretta del teorema di Artin per le trecce pure (teorema 18 in [2]).

Procediamo in ordine cronologico e riportiamo il suo enunciato ponendo, per semplificare la notazione degli indici ed evitare confusione con i generatori da noi introdotti nel precedente paragrafo, $B_{i,j}$ al posto di $A_{i,j}$, $i < j$, e separando il caso $\epsilon = 1$ da quello $\epsilon = -1$. Dunque otteniamo:

Teorema 2.5.1. *Il gruppo delle trecce pure ammette presentazione con generatori $B_{i,j}$ e relazioni [2.5.1]:*

$$B_{r,s}B_{i,j}B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j} & i < j < r < s \text{ o } i < r < s < j \\ B_{i,s}^{-1}B_{i,r}B_{i,s} & i < r = j < s \\ B_{i,s}^{-1}B_{i,r}^{-1}B_{i,j}B_{i,r}B_{i,s} & i < r < s = j \\ B_{i,s}^{-1}B_{i,r}^{-1}B_{i,s}B_{i,r}B_{i,j}B_{i,r}^{-1}B_{i,s}^{-1}B_{i,r}B_{i,s} & i < r < j < s \end{cases}$$

Per poter procedere al confronto tra i teoremi 2.4.1 e 2.5.1 osserviamo che i diagrammi delle trecce sono, in [2], letti dal basso verso l'alto e corrispondentemente le espressioni delle trecce da destra verso sinistra. Allora il generatore σ_j di B_n definito come la treccia elementare in cui la j -esima stringa passa avanti alla stringa $j + 1$ diventa:



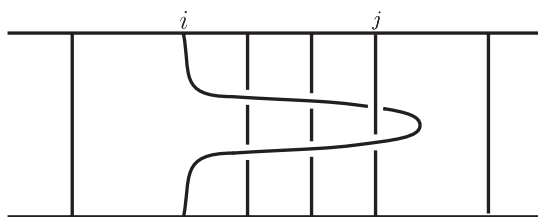
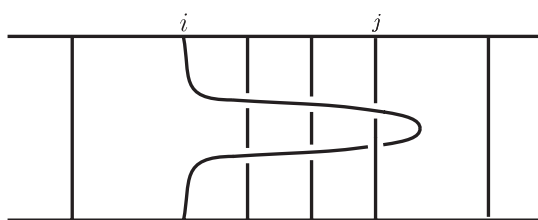
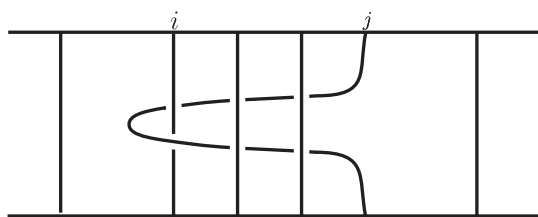
Figura 2.13: σ_j .

che corrisponde al nostro σ_j^{-1} . Dunque i generatori

$$B_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$$

e $B_{i,j}^{-1}$ sono rappresentati da Artin come mostrano le figure ?? e ??.

Ricordiamo che, invece, i generatori $A_{i,j}$ e $A_{i,j}^{-1}$ del teorema 2.4.1 sono rispettivamente quelle in ?? e ??.

Figura 2.14: $B_{i,j}$.Figura 2.15: $B_{i,j}^{-1}$.Figura 2.16: $A_{i,j}$.

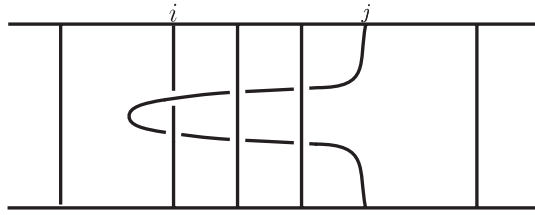


Figura 2.17: $A_{i,j}^{-1}$.

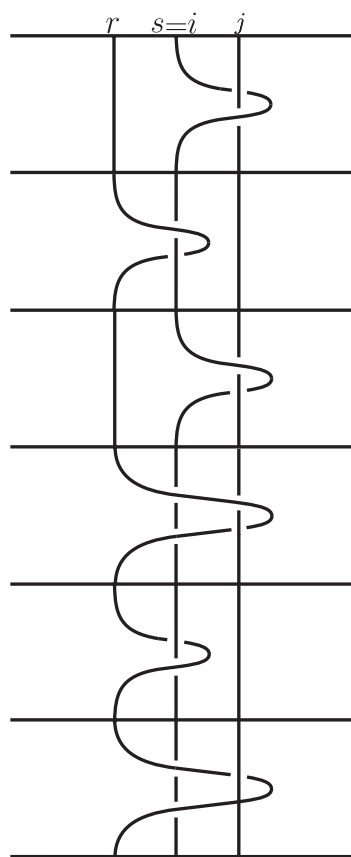
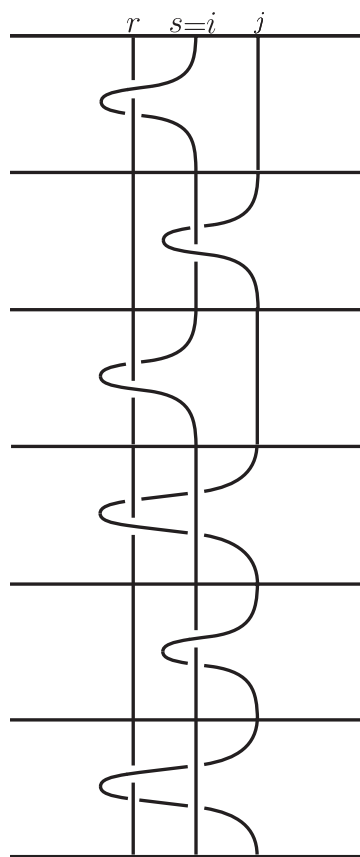
Le figure mostrano dunque che $B_{i,j}$ è, a meno di rinominare gli indici, il ribaltamento di $A_{i,j}^{-1}$ rispetto ad un asse verticale del tipo $y = j > l$ e viceversa, mentre $B_{i,j}^{-1}$ il ribaltamento di $A_{i,j}$. Allora se operiamo queste sostituzioni nelle relazioni 2.4.1 otteniamo per P_n una presentazione con generatori $B_{i,j}$ e relazioni:

$$B_{r,s} B_{i,j}^{-1} B_{r,s}^{-1} = \begin{cases} B_{i,j}^{-1} & i < j < r < s \text{ o } i < r < s < j \\ B_{i,s}^{-1} B_{i,r}^{-1} B_{i,s} & i < j = r < s \\ B_{i,s}^{-1} B_{i,r}^{-1} B_{i,j}^{-1} B_{i,r} B_{i,s} & i < r < s = j \\ B_{i,s}^{-1} B_{i,r}^{-1} B_{i,s} B_{i,r} B_{i,j}^{-1} B_{i,r}^{-1} B_{i,s}^{-1} B_{i,r} B_{i,s} & i < r < j < s \end{cases}$$

Un esempio di quello che accade per la seconda relazione è mostrato nella figura ??.

Osserviamo che abbiamo ottenuto le relazioni inverse del teorema 2.5.1 per cui possiamo affermare che quest'ultimo è equivalente al teorema 2.4.1.

Per enunciare il teorema di Artin nel caso $\epsilon = -1$ dobbiamo scambiare prima gli indici r e s in modo che $(i r s)$ sia una permutazione di segno $\epsilon = -1$. Dunque otteniamo il seguente:



Teorema 2.5.2. *Il gruppo delle trecce pure ammette una presentazione con generatori $B_{i,j}$ e relazioni:*

$$B_{s,r}^{-1}B_{i,j}B_{s,r} = \begin{cases} B_{i,j} & s < r < i < j \text{ e } i < s < r < j \\ B_{i,r}B_{i,s}B_{i,r}^{-1} & i < j = s < r \\ B_{i,r}B_{i,s}B_{i,j}B_{i,s}^{-1}B_{i,r}^{-1} & i < s < r = j \\ B_{i,r}B_{i,s}B_{i,r}^{-1}B_{i,s}^{-1}B_{i,j}B_{i,s}B_{i,r}B_{i,s}^{-1}B_{i,r}^{-1} & i < s < j < r \end{cases}$$

Le relazioni, tranne la prima, sono errate. Con dimostrazione analoga a quella del teorema 2.4.1 si vede che l'enunciato corretto si ottiene con le seguenti relazioni:

$$B_{s,r}^{-1}B_{j,i}B_{s,r} = \begin{cases} B_{i,j} & s < r < j < i \text{ o } j < r < s < i \\ B_{s,i}B_{j,i}B_{s,i}^{-1} & s < r = j < i \\ B_{s,i}B_{r,i}B_{j,i}B_{r,i}^{-1}B_{s,i}^{-1} & j = s < r < i \\ B_{s,i}B_{r,i}B_{s,i}^{-1}B_{r,i}^{-1}B_{j,i}B_{r,i}B_{s,i}B_{r,i}^{-1}B_{s,i}^{-1} & s < j < r < i \end{cases}$$

Concludiamo il paragrafo dicendo che il teorema di Birman in [5] è esattamente il nostro teorema mentre quello riportato da Magnus in [18] è il teorema 2.5.1 ed è dunque corretto.

Capitolo 3

I problemi della parola e del coniugio in B_n

Come abbiamo già avuto modo di vedere nei capitoli precedenti, la conoscenza di una presentazione di un gruppo può essere molto importante e soprattutto utile per investigare il gruppo stesso.

Sappiamo che dato un gruppo G si può sempre costruire una presentazione e che tali presentazioni possono essere molteplici, mentre più arduo risulta il problema inverso, cioè quello di sapere a quale gruppo è isomorfa una presentazione arbitraria. Abbiamo inoltre introdotto il problema dell'isomorfismo e visto che è irrisolvibile anche per presentazioni molto semplici. Ma queste non sono le uniche cose che possiamo chiederci.

Date, infatti, due parole nei generatori W_1 e W_2 è naturale domandarsi se rappresentano o meno lo stesso elemento del gruppo: un tale problema, che è equivalente a sapere se una generica parola W definisce l'unità del gruppo,

è noto come *problema della parola*. Il *problema del coniugio*, invece, è quello di decidere in un numero finito di passi se due parole W_1 e W_2 definiscono elementi coniugati del gruppo G o meno.

Il primo problema è stato risolto per molte classi di presentazioni: ad esempio quelle finite che hanno un'unica relazione e quelle in cui, per ogni coppia di generatori a e b si ha, tra le relazioni, $ab = ba$. Ci sono, però, presentazioni in cui il problema non può essere risolto e dunque non può esistere un algoritmo standard di risoluzione ma, possiamo dire, che ogni soluzione dipende dal tipo di presentazione in questione.

Il problema del coniugio implica quello della parola ed è molto più difficile: non è stato ad esempio risolto per le presentazioni con una sola relazione. Osserviamo, infine, che la conoscenza delle soluzioni di tali problemi per una data presentazione non significa la soluzione per le presentazioni equivalenti.

In questo capitolo analizzeremo, per il gruppo delle trecce B_n , le soluzioni basate sulla presentazione di Artin del teorema 2.2.1 e su una nuova presentazione dovuta a Birman (pubblicata in [4]). Osserviamo, innanzitutto, che la soluzione al problema della parola per una presentazione di un gruppo G finito porta ad esprimere ogni elemento di G in una forma cosiddetta *normale*, diversa, in generale, per ogni eventuale soluzione trovata nelle diverse presentazioni: ciò significa che si può scegliere un particolare rappresentante per ogni classe di equivalenza. Come vedremo nel corso del capitolo, la soluzione in [4] risulta più efficiente computazionalmente di quelle note precedentemente e dovute ad Artin [2], Garside [15], Morton [11].

3.1 La soluzione di Artin

Una soluzione al problema della parola è implicita nello studio di Artin in [2]. Il suo studio delle trecce è infatti basato sul seguente teorema che permette di identificare B_n in un sottogruppo degli automorfismi del gruppo libero F_n .

Teorema 3.1.1 (di rappresentazione di Artin). *Il gruppo delle trecce B_n ha una rappresentazione fedele nel gruppo degli automorfismi destri di F_n indotta dall'applicazione $\bar{\xi} : B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$ tale che:*

$$\begin{aligned} (\sigma_i)\bar{\xi} : x_i &\mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} &\mapsto x_i \\ x_j &\mapsto x_j \quad j \neq i, i+1. \end{aligned}$$

La restrizione di $\bar{\xi}$ al gruppo delle trecce pure P_n associa ad ogni generatore $A_{r,s} \in P_n$ l'automorfismo tale che:

$$\begin{aligned} (A_{rs})\bar{\xi} : x_i &\mapsto x_i && i < r \text{ o } i > s \\ &\mapsto x_r x_i x_r^{-1} && s = i \\ &\mapsto x_r x_s x_i x_s^{-1} x_r^{-1} && r = i \\ &\mapsto x_r x_s x_r^{-1} x_s^{-1} x_i x_s x_r x_s^{-1} x_r^{-1} && r < i < s. \end{aligned}$$

Poiché in un gruppo libero ogni elemento ha una forma *normale*, il problema della parola è sempre risolvibile e quindi il teorema precedente assicura che lo stesso vale per il gruppo delle trecce. L'algoritmo di Artin si basa sulla seguente proposizione che permette di esprimere ogni treccia nella cosiddetta forma *combed* introdotta in [2].

Proposizione 3.1.1. *Ogni $\beta \in B_n$ può essere scritta unicamente nella forma*

$$\beta = \beta_2\beta_3\dots\beta_n\pi_\beta$$

dove

$$\pi_\beta \in A = \left\{ \prod_{j=2}^n N_{j,k_j}, j \geq k \geq 1 \right\},$$

con

$$N_{j,i} = \begin{cases} \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_i & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i, \end{cases}$$

π la permutazione corrispondente a β e $\beta_i \in U_i$.

Dimostrazione 3.1.1. *L'insieme A forma un insieme completo di rappresentanti dei laterali di P_n in B_n per cui ogni treccia $\beta \in B_n$ può essere scritta nella forma $\beta = \bar{\beta}_n\pi_\beta$ per qualche $\pi_\beta \in A$ e $\bar{\beta}_n \in P_n$. Per l'osservazione 2.4.1 $\bar{\beta}_n = \bar{\beta}_{n-1}\beta_n$ con $\beta_n \in U_n$ e $\bar{\beta}_{n-1} \in P_{n-1}$. Allora costruiamo induttivamente la seguente fattorizzazione*

$$\beta = \bar{\beta}_2\beta_3\dots\beta_n\pi_\beta$$

dove $\beta_i \in U_i$, $i = 3, \dots, n$ e $\bar{\beta}_2 \in P_2 = U_2$. L'esistenza della forma normale del teorema segue ponendo $\bar{\beta}_2 = \beta_2$. L'unicità della treccia π_β è ovvia mentre quella dei fattori β_i segue dall'osservazione 2.4.2.

L'algoritmo descritto nel precedente corollario non risulta, nelle pratica, affatto efficiente: lo stesso Artin in [2] sconsiglia un tale approccio.

3.2 Gli algoritmi di Garside

3.2.1 Il problema della parola

Analizziamo in questo paragrafo la soluzione di Garside rimandando all'articolo originale [15] per le dimostrazioni mancanti. Iniziamo col richiamare alcune definizioni riferendoci, in ciò che segue, alla presentazione nei generatori standard.

Due parole positive A e B si dicono *positivamente equivalenti*, $A \doteq B$, se:

- 1) $A \equiv B$ oppure
- 2) sono l'una derivabile dall'altra mediante una sequenza finita di parole positive ciascuna ottenuta dalla precedente applicando una relazione.

In particolare se A si trasforma in B con una sequenza di t singole applicazioni di tipo 2) chiameremo tale trasformazione una *catena di lunghezza t* . Data la parola $A = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ denoteremo con \check{A} la parola $\check{A} = \sigma_{i_k} \sigma_{i_{k-1}} \dots \sigma_{i_1}$. Allo stesso modo \hat{A} indicherà la parola $\hat{A} = \sigma_{n-i_1} \sigma_{n-i_2} \dots \sigma_{n-i_k}$ e τ l'omomorfismo definito da $\tau(A) = \hat{A}$. Poniamo, infine, $\Pi_s = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_s$. Introduciamo finalmente la parola positiva Δ che svolgerà un ruolo importante in ciò che segue. Chiameremo *parola fondamentale* di ordine $r + 1$ la seguente:

$$\Delta_r \equiv \Pi_r \Pi_{r-1} \dots \Pi_1 \equiv (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r) (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{r-1}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) (\sigma_1)$$

In particolare abbrevieremo Δ_{n-1} con Δ .

Lemma 3.2.1. *In B_n si ha $\sigma_s \Pi_t \doteq \Pi_t \sigma_{s-1}$, $1 < s \leq t < n$.*

Dimostrazione 3.2.1. *Le relazioni in B_n danno le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{aligned}
 \sigma_s \Pi_t &\equiv \sigma_s(\sigma_1 \dots \sigma_{s-2}) \sigma_{s-1} \sigma_s(\sigma_{s+1} \dots \sigma_t) \\
 &\doteq (\sigma_1 \dots \sigma_{s-2}) \sigma_s \sigma_{s-1} \sigma_s(\sigma_{s+1} \dots \sigma_t) \\
 &\doteq (\sigma_1 \dots \sigma_{s-2}) \sigma_{s-1} \sigma_s \sigma_{s-1}(\sigma_{s+1} \dots \sigma_t) \\
 &\doteq (\sigma_1 \dots \sigma_{s-2}) \sigma_{s-1} \sigma_s(\sigma_{s+1} \dots \sigma_t) \sigma_{s-1} \\
 &\equiv \Pi_t \sigma_{s-1}
 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2. *In B_n valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\sigma_1 \Delta_t \doteq \Delta_1 \sigma_t \quad \overline{Forall} t = 1, \dots, n-1;$
2. $\sigma_s \Delta \doteq \Delta \widehat{\sigma}_s;$
3. $\sigma_s^{-1} \Delta = \Delta \widehat{\sigma}_s^{-1};$
4. $\sigma_s \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \widehat{\sigma}_s;$
5. $\sigma_s^{-1} \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \widehat{\sigma}_s^{-1}.$

Dimostrazione 3.2.2. *È una semplice applicazione del lemma 3.2.1.*

Dal lemma otteniamo il seguente risultato importante:

Teorema 3.2.1. *Siano $P, Q \in B_n$. Allora:*

1. $P \Delta^{2m} \doteq \Delta^{2m} P$ e $P \Delta^{2m+1} \doteq \Delta^{2m+1} \widehat{P}$ per ogni parola positiva P e $m \geq 0;$
2. $Q \Delta^{2m} = \Delta^{2m} Q$ e $Q \Delta^{2m+1} = \Delta^{2m+1} \widehat{Q}$ per ogni Q e $\overline{Forall} m.$

Osservazione 3.2.1. *Dalla condizione (b) otteniamo che possiamo vedere l'automorfismo τ come il coniugio per Δ .*

Lemma 3.2.3. *In B_n esistono parole positive $X_r, Y_r, 1 \leq r \leq n-1$, tali che*

$$\sigma_r X_r \doteq \Delta \doteq Y_r \sigma_r$$

Dimostrazione 3.2.3. *Dalla definizione $\Delta \equiv \Pi_{n-1} \Pi_{n-2} \dots \Pi_1$ segue*

$$\Delta \doteq Y_1 \sigma_1$$

dove $Y_1 \equiv \Pi_{n-1} \Pi_{n-2} \dots \Pi_2$. Osserviamo inoltre che per il lemma 3.2.1 se $f(\sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_t)$ è una parola positiva in cui compaiono solo i generatori $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_t$ allora

$$f(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_t) \Pi_t \doteq \Pi_t f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{t-1})$$

Posto $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{t-1}) = \Pi_{t-1} \Pi_{t-2} \dots \Pi_1$ otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \Pi_{n-1} \Pi_{n-2} \dots \Pi_t f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{t-1}) \\ &\doteq \Pi_{n-1} \Pi_{n-2} \dots \Pi_{t+1} f(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_t) \Pi_t \\ &\doteq \Pi_{n-1} \Pi_{n-2} \dots \Pi_{t+1} f(\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_t) (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{t-1}) \sigma_t \\ &\equiv Y_t \sigma_t \end{aligned}$$

Ponendo $X_r = \check{Y}_r$ si ottiene $\sigma_r X_r \doteq \Delta$.

Osservazione 3.2.2. *Possiamo scrivere ogni generatore negativo come $\sigma_r^{-1} = X_r \Delta^{-1} = \Delta^{-1} Y_r, r = 1, \dots, n-1$.*

Consideriamo, infine, il:

Lemma 3.2.4. *Se X e Y sono parole positive in B_n esistono U e V tali che $UX \doteq VY$.*

Osserviamo, ora, che le relazioni di B_n del teorema 2.2.1 hanno la particolarità che non coinvolgono gli inversi dei generatori. Questa proprietà implica che esiste un semigruppso S_n generato da $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relazioni 2.2.1. L'idea di Garside si basa sul fatto di trasferire in B_n informazioni che si ottengono facilmente in S_n grazie al seguente teorema:

Teorema 3.2.2. *L'applicazione $e : S_n \rightarrow B_n$ tale che $e(\sigma_i) = \sigma_i$ induce un'embedding del semigruppso S_n in B_n .*

Allora possiamo affermare che due parole A e B sono positivamente equivalenti se $A, B \in S_n$ e definiscono lo stesso elemento. Dunque:

Teorema 3.2.3. *Se A e B sono parole positive e uguali in B_n allora $A \doteq B$.*

Sia W una parola positiva. Chiameremo *diagramma* di W , e lo indicheremo con $D(W)$, l'insieme finito di tutte le parole W, W_1, \dots, W_m positivamente equivalenti a W dette anche *radici* di W . Se $W \doteq AXB$, $L(A), L(B) \geq 0$, ($L(A)$ indica la lunghezza della parola), diremo che X è una *sotto radice* e, in particolare, una *sotto-radice iniziale* se $L(A) = 0$. Infine diremo che W *contiene* Δ se una sotto-radice di $D(W)$ è Δ e dunque se $W = A\Delta B$, W è *prima* con Δ altrimenti. Infine chiameremo *base* di $D(W)$ la radice W_r più piccola rispetto all'ordine lessicografico degli indici e denoteremo con \overline{A} la base di una parola A se, in particolare, A è prima con Δ .

Siamo a questo punto in grado di dimostrare il teorema di Garside che assicura l'esistenza di una forma normale, (detta *forma standard*), per ogni treccia in B_n . Dunque l'algoritmo di Garside si basa sui seguenti teoremi:

Teorema 3.2.4. *Ogni parola $W \in B_n$ può essere espressa unicamente nella forma standard $W = \Delta^m \bar{A}$, con A parola positiva. In tal caso m è detta potenza di W .*

Dimostrazione 3.2.4. 1. *Sia dapprima P una parola positiva e selezioniamo da $D(P)$ la sotto-radice che inizia con il maggior numero t di Δ . Allora possiamo porre $P \doteq \Delta^t A$ dove A è prima con Δ . Denotando con \bar{A} la base di A abbiamo $P = \Delta^m \bar{A}$.*

2. *Sia ora W una generica parola in B_n . Evidenziando i generatori con esponente negativo possiamo scrivere W nella forma*

$$W \equiv W_1 \sigma_{i_1}^{-1} W_2 \sigma_{i_2}^{-1} \dots \sigma_{i_s}^{-1} W_{s+1}$$

dove ciascun W_i è una parola positiva di lunghezza ≥ 0 . Dall'osservazione 3.2.2 sappiamo che per ogni generatore negativo esiste una parola positiva X_i tale che $\sigma_i^{-1} = X_i \Delta^{-1}$ per cui otteniamo

$$W = W_1 X_{i_1} \Delta^{-1} W_2 X_{i_2} \Delta^{-1} \dots W_s X_{i_s} \Delta^{-1} W_{s+1}$$

Muovendo, ora, i fattori Δ^{-1} che compaiono nell'espressione, in virtù del teorema 3.2.1, si ha $W = \Delta^{-s} P$ con P parola positiva e dunque, per (a),

$$W = \Delta^{-s} \Delta^t \bar{A} = \Delta^m \bar{A}.$$

3. Rimane da far vedere che la forma ottenuta è unica. Per assurdo sia

$$\Delta^m \overline{A} = \Delta^p \overline{B}$$

e supponiamo $p < m$. Se $t = m - p$ si ha $\Delta^t \overline{A} = \overline{B}$ e, per il teorema 3.2.3, $\Delta^t \overline{A} \doteq \overline{B}$. Dunque \overline{B} contiene Δ e questo è assurdo. Il caso $m < p$ è del tutto analogo e quindi studiamo soltanto $p = m$. Si ottiene $\overline{A} = \overline{B}$ e quindi, come prima, $\overline{A} \doteq \overline{B}$. Poiché ogni parola positiva ha un'unica base segue che $\overline{A} \equiv \overline{B}$ e l'unicità della forma normale.

Teorema 3.2.5. *Condizione necessaria e sufficiente perché due trecce in B_n siano equivalenti è che abbiano la stessa forma standard.*

3.2.2 L'algoritmo di Garside per il problema della parola

Riepiloghiamo i passi dell'algoritmo per stabilire se due generiche parole W_1 e W_2 definiscono la stessa treccia in B_n :

1. Consideriamo W_1 e rimpiazziamo ogni generatore σ_i^{-1} con la parola equivalente $\Delta^{-1} X_i$.
2. Usando il 3.2.1 spostiamo tutti i Δ^{-1} che compaiono a sinistra così da ottenere per W_1 la forma

$$W = \Delta^k P_0$$

dove P_0 è positiva e $k \leq 0$.

3. In $D(P_0)$ scegliamo $\Delta^h P$ tale che h è massimale e poniamo $m = h + k$.

4. Costruiamo $D(P)$ e prendiamo la base \overline{P} ottenendo così la forma normale per W_1 .
5. Procediamo allo stesso modo con W_2 .
6. Confrontiamo le forme normali ottenute.

3.2.3 Il problema del coniugio

Affrontiamo, ora, il problema del coniugio. Iniziamo con l'introdurre due lemmi che sono conseguenza del teorema 3.2.4.

Lemma 3.2.5. *Siano t e p due interi arbitrari. Allora il numero delle parole in B_n in forma standard con potenza $\geq p$ e somma degli esponenti t è finito.*

Dimostrazione 3.2.5. *Sia $\Delta^m \overline{A}$ una parola che soddisfa le ipotesi. Allora*

$$t = mL(\Delta) + L(\overline{A})$$

e dunque $m \leq t/L(\Delta)$. Ma esistono soltanto un numero finito di interi m che soddisfano contemporaneamente l'uguaglianza ottenuta e l'ipotesi $m \geq p$. Inoltre se $t = mL(\Delta) + L(\overline{A})$ si ha che $L(\overline{A})$ è costante e dunque è finito il numero delle possibili basi \overline{A} .

Lemma 3.2.6. *Siano $V, P \in B_n$ positive e tali che, se $W = \Delta^m V$, $P^{-1}WP$ ha potenza $m + r$, $r > 0$. Allora VP contiene Δ .*

In ciò che segue avranno grande importanza le cosiddette α -radici ovvero le sotto-radici iniziali di Δ . Chiameremo, inoltre, α -trasformazione di W

un coniugato di W mediante un' α -radice. Introduciamo, infine, le seguenti definizioni:

Definizione 3.2.1 (Summit set). *Definiamo il summit set $S(W)$ di una parola W in B_n descrivendo il procedimento per costruirlo:*

1. *Consideriamo tutte le α -trasformazioni di W indicando con $S_1(W) = \{W_2, \dots, W_t\}$ l'insieme di quelle che hanno potenza maggiore o uguale alla potenza m di W .*
2. *Definiamo induttivamente l'insieme $S_i(W)$ come l'insieme delle parole che si ottengono coniugando quelle di S_{i-1} per un α -radice e che hanno potenza maggiore o uguale alla potenza m di W .*
3. *Poniamo $S(W)$ come l'insieme delle parole ottenute che hanno potenza massima s .*

In particolare s è detta summit power e ciascuna parola in $S(W)$ summit form per W .

Per risolvere il problema del coniugio abbiamo bisogno, infine, dei seguenti lemmi:

Lemma 3.2.7. *$V, W \in B_n$. $W \sim V$ se e solo se esiste una parola positiva X tale che $X^{-1}WX = V$.*

Lemma 3.2.8. *Supponiamo che in B_n*

1. *$W \equiv \Delta^p \bar{P}$ è una summit form di una parola A ,*

2. X è una parola positiva tale che $X^{-1}WX = \Delta^q\overline{Q}$, $q \geq p$,

3. $X = uY$ con u α -radice di lunghezza massima.

Allora $u^{-1}Wu$, ridotta in forma normale, è una summit form per A .

Finalmente possiamo affrontare il teorema sui coniugati delle trecce:

Teorema 3.2.6. $A, B \in B_n$ sono coniugate $\Leftrightarrow S(A) = S(B)$.

Dimostrazione 3.2.6. (\Leftarrow) Sia $C \in S(A) = S(B)$. Allora, per definizione di summit set $A \sim C$ e $B \sim C$. Dunque $A \sim B$.

(\Rightarrow) Sia ora $A \sim B$, $\Delta^p\overline{P} \in S(A)$, $\Delta^q\overline{Q} \in S(B)$ e $q \geq p$. Chiaramente $\Delta^p\overline{P} \sim \Delta^q\overline{Q}$ e per il lemma 3.2.7 esiste una parola positiva X tale che

$$X^{-1}\Delta^p\overline{P}X = \Delta^q\overline{Q}$$

Si ha che $X \doteq u_1X_1, X_1 \doteq u_2X_2, \dots, X_s = u_{s+1}$, dove u_i , $i = 1, \dots, s+1$, sono α -radici di lunghezza massima e $X_i, i = 1, \dots, s$ parole di lunghezza decrescente così che possiamo supporre $X_{s+1} = 1$. Allora $X \doteq u_1u_2\dots u_{s+1}$ e l'espressione trovata sopra per $\Delta^q\overline{Q}$ può essere fattorizzata come il prodotto delle $s+1$ trasformazioni del tipo $u_{i+1}^{-1}W_iu_{i+1}$ dove $W_1 = u_1^{-1}\Delta^p\overline{P}u_1$ e $W_{i+1} = u_{i+1}^{-1}W_iu_{i+1}$ $i = 0, \dots, s$. Per il lemma 3.2.8 allora $u_{s+1}^{-1}W_su_{s+1} = \Delta^q\overline{Q}$ è una summit form per A , cioè $S(B) \subset S(A)$. Dunque $q = p$ e $X^{-1}\Delta^p\overline{Q}X = \Delta^q\overline{Q}$. Analogamente supponendo $p > q$ troviamo $S(A) \subset S(B)$.

Il teorema precedente rappresenta l'algoritmo di Garside: date due parole nel gruppo delle trecce si calcola il summit set di entrambe per vedere

se sono o meno coniugate. L'algoritmo che descriviamo in questa sezione, presentato in [4], è uno sviluppo del procedimento sopra descritto che permette di calcolare il summit set più velocemente. Osserviamo, prima alcune proprietà.

Data una treccia $W = \Delta^m P$, quando costruiamo $S(W)$, includiamo negli insiemi $S_i(W)$, $i = 1, \dots, k$, tutte le parole di potenza $m, m + 1, \dots$, fino ad ottenere la lista completa di tutte le parole di potenza massima s : tutte quelle con potenza $< s$ sono poi ignorate. Per il teorema 3.2.6, però, quando troviamo una parola W_1 di potenza $m + 1$, possiamo ignorare tutte le parole di potenza m e calcolare il summit set di W_1 ; analogamente se si ottiene una parola di potenza $m + i$ possiamo non considerare tutte quelle con potenza $m + i - 1$. Il risultato in [4] su cui si baserà l'algoritmo e che migliora la procedura di Garside è il seguente:

Teorema 3.2.7. *Sia $W = \Delta^m P$ una parola in standard form in B_n . Allora W ha summit power $t > m$ se e solo se il diagramma $D(P)$ contiene una parola della forma*

$$\begin{array}{l} FRI \quad m \text{ pari} \\ FR\hat{I} \quad m \text{ dispari} \end{array}$$

per qualche coppia di parole positive I e F tali che $\Delta \doteq IF$ e $R \in B_n$. Inoltre, se questo accade, W è coniugata a $\Delta^{m+1}R$. Allora W è in forma summit se e solo se $D(P)$ non contiene parole della forma suddetta.

3.2.4 L'algoritmo per il problema del coniugio

Date due parole W_1 e W_2 calcoliamo il summit set per sapere se sono o meno coniugate nel seguente modo:

1. Costruiamo la lista di tutte le possibili coppie

$$\{(I_1, F_1), \dots, (I_s, F_s)\}$$

dove I_j è un α -radice e S_j detta parte finale di Δ , $j = 1, \dots, s$, cioè $\Delta \doteq I_1 F_1 \doteq \dots \doteq I_s F_s$.

2. Supponiamo $W_1 = \Delta^m P$ e costruiamo il diagramma di P . Se in $D(P)$ c'è una coppia (I, F) tale che $P \doteq I P_1 \widehat{F}$ (se m è pari) o $P \doteq \widehat{I} P_1 \widehat{F}$ (se è dispari) per qualche P_1 , rimpiazziamo $\Delta^m P$ con $\Delta^{m+1} P_1$ e ripetiamo il procedimento.
3. Si ottiene un elemento $W_1' = \Delta^t T_0$ coniugato a W_1 e tale che $D(T_0)$ fallisce il passo (2). Allora $W_1' \in S(W_1) = S(W_1')$.
4. Calcoliamo $S(W_1)$ come segue:

(i) Per ogni parola nella lista del tipo $\Delta^t T_j$ includiamo tutti gli elementi $\Delta^t T_k$ dove $T_k \in D(T_j)$.

(ii) Per ogni $\Delta^t T_j$ e per ogni possibile partizione $T_j \doteq T_{j_1} T_{j_2}$ aggiungiamo $\Delta^t T_{j_2} T_{j_1}$ se t è pari e $\Delta^t \widehat{T}_{j_2} T_{j_1}$ se t è dispari.

(iii) Se $S(W_1)$ contiene una parola $\Delta^t T_j$ con la proprietà che T_j non coinvolge i generatori $\sigma_m, \dots, \sigma_{n-1}$, aggiungiamo tutte le parole del tipo $T_j(\sigma_2, \dots, \sigma_m), \dots, T_j(\sigma_{1+n-m}, \dots, \sigma_{n-1})$.

- (iv) Includiamo nella lista la parola $\Delta^t \widehat{T}_j$ per ogni $\Delta^t T_j$.
5. Per ogni parola $\Delta^t T_j$ nella lista ottenuta per $S(W_1)$ verifichiamo se $I_i^{-1} \Delta^t T_j I_i$ ha potenza t ed eventualmente se è in $S(W_1)$ per ogni α -radice I . Altrimenti aggiungiamo $I_i^{-1} \Delta^t T_j I_i$ in $S(W_1)$ e ripetiamo il passo (4). Il procedimento finisce quando non si ottengono più parole nuove.

3.3 Il contributo di Elrifai e Morton

In questo paragrafo descriveremo brevemente gli algoritmi dovuti a Elrifai e Morton in [11]. L'approccio da loro seguito si basa sullo studio dell'insieme S_n^+ , ovvero di quelle trecce positive, dette *trecce di permutazioni*, in cui ogni coppia di stringhe si incrocia al massimo una volta. L'algoritmo da loro proposto, che porta a realizzare una treccia nella cosiddetta *left-canonical form*, fornisce anche:

1. una versione più maneggevole degli algoritmi di Garside;
2. un algoritmo per decidere se Δ^k è un fattore di una data treccia positiva;
3. un algoritmo per decidere se una treccia positiva è un fattore di Δ^k .

3.3.1 L'insieme delle trecce positive

Manterremo, in ciò che segue, la notazione dei paragrafi precedenti. Iniziamo con l'introdurre un ordine parziale nel gruppo delle trecce facendo uso delle

treccie positive, (B_n^+ indicherà l'insieme di tali treccie).

Definizione 3.3.1. *Diciamo che, date le parole $A, B \in B_n$, $A \leq B$ se esistono le treccie positive C e D tali che $B = CAD$.*

Osservazione 3.3.1. 1. $B \in B_n^+ \Leftrightarrow 1 \leq B$;

$$2. A \leq B \Leftrightarrow B^{-1} \leq A^{-1};$$

$$3. 1 \leq \sigma_i \leq \Delta.$$

Valgono le seguenti proposizioni:

Proposizione 3.3.1. *Se $A \leq \Delta^s$ allora $\Delta^s = D_1 A = A D_2$ per qualche $D_1, D_2 \in B_n^+$.*

Dimostrazione 3.3.1. *Per la definizione di \leq possiamo scrivere $\Delta^s = C_1 A C_2$, con $C_1, C_2 \in B_n^+$. Allora, poiché $\Delta^s C_2 = \tau^s(C_2) \Delta^s$,*

$$\Delta^s = \tau^s(C_2) C_1 A = A C_2 \tau^s(C_1)$$

Proposizione 3.3.2. *Sia $A \in B_n$. Se $\Delta^r \leq A$ allora $A = E_1 \Delta^r = \Delta^r E_2$.*

Corollario 3.3.1. *Se $\Delta^{r_1} \leq A \leq \Delta^{s_1}$ e $\Delta^{r_2} \leq B \leq \Delta^{s_2}$ allora $\Delta^{r_1+r_2} \leq AB \leq \Delta^{s_1+s_2}$.*

Le proposizioni precedenti permettono di vedere ogni treccia tra qualche potenza di Δ . Infatti:

Teorema 3.3.1. *Ogni treccia B in B_n soddisfa $\Delta^r \leq B \leq \Delta^s$ per qualche r, s interi.*

Osserviamo che le radici definite da Garside così come le parti finali delle trecce equivalgono in questo contesto alle trecce B tali che $1 \leq B \leq \Delta$. Indichiamo, inoltre, con $[r, s]$ il sottoinsieme di B_n delle trecce B tali che $\Delta^r \leq B \leq \Delta^s$.

Definizione 3.3.2. *Sia $B \in B_n$ e poniamo $\inf B = \max \{r : \Delta^r \leq B\}$ e $\sup B = \min \{s : B \leq \Delta^s\}$. Chiamiamo $l(B) = \sup B - \inf B$ la lunghezza canonica di B .*

Innanzitutto, per la proposizione 3.3.1, si ha che $l(AB) \leq l(A) + l(B)$. Inoltre la potenza (nel senso definito da Garside) di una treccia B è il suo \inf poiché $r = \inf B \Leftrightarrow B = \Delta^r B'$ con $1 \leq B'$ e $\Delta \not\leq B'$ (si dice allora che B' è *coprime* con Δ). Non esiste, invece, l'analogo del \sup ma osserviamo che $-\sup B = \inf B^{-1}$. Per quanto appena detto e in virtù del 3.3.1, possiamo studiare una treccia guardando all'intervallo che le corrisponde: ad esempio la proposizione 3.3.1 ci dice che $[r_1, s_1][r_2, s_2] \subset [r_1 + r_2, s_1 + s_2]$. Concludiamo, allora, che ogni treccia B può essere scritta come prodotto di Δ^r con $l(B)$ trecce in $[0, 1]$, dove $r = \inf B$: questa fattorizzazione sarà la base dell'algoritmo di Elrifai-Morton che è essenzialmente l'algoritmo di Garside per il problema della parola tradotto in questo contesto.

Analogamente l'algoritmo per il coniugio consisterà nel sostituire al summit set di una parola B il *super summit set*, ovvero il sottoinsieme fatto da tutte le trecce B' di lunghezza canonica minima. Poiché possiamo studiare una treccia $B \geq \Delta^r$ attraverso la treccia positiva $\Delta^{-r}B$, come sappiamo, l'analisi di Garside si è basata sull'insieme delle trecce B_n^+ e sull'equivalen-

za positiva: il teorema 3.2.3 ha permesso un tale approccio. Vediamo come tradurre tutto questo in termini dell'ordine \geq . Scriveremo

$$\sigma_i * \sigma_j = \begin{cases} \sigma_i & i = j, \\ \sigma_i \sigma_j & |i - j| \geq 1, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & |i - j| = 1 \end{cases}$$

Allora :

Lemma 3.3.1 (Garside). *Sia $P = \sigma_i P_1 = \sigma_j P_2$ con $P_1, P_2 \geq 1$. Allora $P_3 \geq 1$ dove $P = (\sigma_i * \sigma_j) P_3$.*

Lo scopo dell'algoritmo sarà fattorizzare la treccia positiva della forma standard ottenuta nel precedente paragrafo come prodotto di certi fattori positivi speciali. Consideriamo, a tale scopo, le seguenti definizioni:

Definizione 3.3.3 (Starting e finishing set). *Sia P una treccia positiva. Chiamiamo starting set l'insieme*

$$\S(P) = \{i : P = \sigma_i P_i, P_i \geq 1\}$$

e finishing set l'insieme

$$\overline{F}(P) = \{i : P = P_i \sigma_i, P_i \geq 1\}$$

.

Osserviamo che $\overline{F}(P) = \S(\check{P})$.

Definizione 3.3.4. *Una fattorizzazione positiva $P = AB$, $A, B \geq 1$, si dice left-weighted se $\S(B) \subset \overline{F}(A)$ e right-weighted se $\S(B) \supset \overline{F}(A)$.*

Analizziamo meglio le proprietà delle trecce in $[0, 1]$ che saranno i fattori della scomposizione. Consideriamo le trecce in cui ogni coppia di stringhe si incontra al più una volta, dette anche *trecce positive di permutazione*. Indicheremo con S_n^+ l'insieme di tali trecce. Le seguenti proposizioni mostreranno che l'insieme delle trecce in $[0, 1]$ è esattamente l'insieme delle trecce di permutazioni. Rimandiamo a [11] per i dettagli.

Lemma 3.3.2. *Se due trecce $A_1, A_2 \in S_n^+$ inducono la stessa permutazione allora $A_1 = A_2$. Inoltre per ogni permutazione $\mu \in \Sigma_n$ esiste una treccia $A_\mu \in S_n^+$ che induce la permutazione suddetta.*

Dimostrazione 3.3.2. *(Cenni) Il diagramma di A_1 può essere trasformato in quello di A_2 , a meno di isotopia, in quanto i punti iniziali e i punti finali di ciascuna treccia coincidono. Infine è semplice, a partire da una permutazione μ , disegnare il diagramma di una treccia che induce tale la permutazione e con le proprietà richieste.*

Il diagramma di una treccia può mostrare anche, per una tale $A_\mu \in S_n^+$, il suo starting set. Infatti:

Proposizione 3.3.3. *Sia $A_\mu \in S_n^+$. Sono equivalenti:*

- (1) $i \in \S(A_\mu)$,
- (2) in A_μ le stringhe i e $i + 1$ si incrociano,
- (3) $\mu(i + 1) < \mu(i)$.

Esempio 3.3.1. *La figura mostra rispettivamente le trecce $P_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1$ e $P_2 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1$. Esse inducono le permutazioni $\mu_1 = (1\ 4\ 3)$ e $\mu_2 = (1\ 4)$. In particolare $\S(P_1) = \{1, 2\}$, $\overline{F}(P_1) = \{1, 3\}$, $\S(P_2) = \overline{F}(P_2) = \{1, 3\}$.*

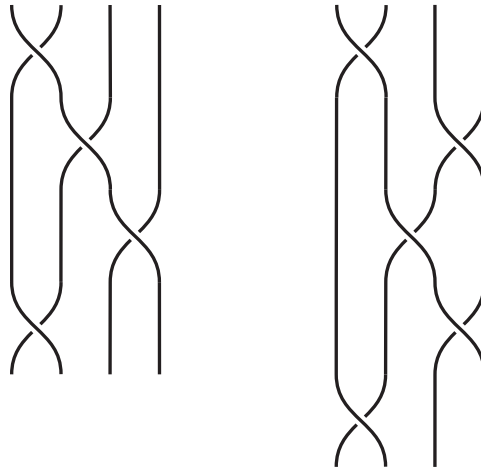


Figura 3.1: P_1 e P_2 .

Proposizione 3.3.4. *Sia $A \in S_n^+$. Allora $\sigma_i A \in S_n^+$ se e solo se $i \notin \S(A)$.*

Dimostrazione 3.3.3. *Le stringhe i e $i + 1$ si incrociano in $\sigma_i A$ una volta se $i \notin \S(A)$ e due volte altrimenti.*

Osservazione 3.3.2. *Esiste un algoritmo efficiente per calcolare $\S(A)$ di una treccia A a partire dalla permutazione indotta.*

Finalmente possiamo enunciare la proprietà delle trecce di permutazione:

Teorema 3.3.2. *Il sottoinsieme $[0, 1]$ e l'insieme S_n^+ sono uguali.*

Osservazione 3.3.3. *Osserviamo che se $A \in S_n^+$ soddisfa la proprietà che $\S(A) = \{1, \dots, n-1\}$ allora $A = \Delta$ mentre se $\overline{F}(A) = \{1, \dots, n-1\}$ allora $\check{A} = \Delta$.*

Identificando le trecce di permutazioni con l'insieme $[0, 1]$ si dimostra che:

Teorema 3.3.3. *Ogni treccia $P \geq 1$ ha un'unica fattorizzazione left-weighted $P = A_1 P_1$ con $A_1 \in [0, 1]$. Ogni altra fattorizzazione $P = AB$, con $A \in [0, 1]$, soddisfa $A_1 = AQ$ per qualche $Q \geq 1$. In particolare $\S(A_1) = \S(P)$.*

La conseguenza di questo teorema è che si ottiene la cosiddetta forma left-canonical come segue:

Teorema 3.3.4. *C'è una espressione unica per $P \geq 1$ come*

$$P = A_1 A_2 \dots A_k$$

con $A_i \in [0, 1]$, $A_k \neq 1$ e $\S(A_{i+1}) \subset \overline{F}(A_i)$ per ogni i .

Dimostrazione 3.3.4. *Per induzione su $P_i = A_{i+1} \dots A_k$ e $P_0 = P$.*

Ricordiamo che la potenza di una treccia B corrisponde esattamente a $\inf B$. In vista di calcolarlo osserviamo che

$$P \geq \Delta \Leftrightarrow A_1 = \Delta$$

Infatti se $P \geq \Delta$ allora $P = \Delta Q$ e $\S(P) = \{1, \dots, n-1\}$. Per il teorema 3.3.3 $\S(A_1) = \{1, \dots, n-1\}$ e per l'osservazione 3.3.3, $A_1 = \Delta$. Viceversa se $A_i = \Delta$ in left-canonical form allora $A_j = \Delta$ per $j < i$. Allora

$$\inf P = \max\{i : A_i = \Delta\}.$$

Il calcolo del sup si basa invece sulle seguenti proposizioni:

Proposizione 3.3.5. *Sia P una treccia positiva con fattorizzazione left-weighted $P = A_1 P_1$, $A_1 \in [0, 1]$. Se $B \geq 1$ e $BP \geq \Delta$ allora $BA_1 \geq \Delta$.*

Proposizione 3.3.6. *Sia P positiva in forma left-canonical $P = A_1 A_2 \dots A_k$. Allora $\sup P = k$. Se $P \geq \Delta^r$ allora possiamo scrivere $P' = \Delta^{-r} P \geq 1$ e $\sup P = r + \sup P'$.*

3.3.2 L'algoritmo di Elrifai-Morton

Avendo, ora, identificato il sup e l'inf in termini di forma left-canonical possiamo procedere ad enunciare l'algoritmo di Elrifai-Morton per il problema della parola modificando la parte finale dell'algoritmo di Garside. Siano P_1 e P_2 trecce in B_n che vogliamo confrontare. Allora:

1. Applichiamo il passo 1) dell'algoritmo di Garside scrivendo P_1 nella forma $P_1 = \Delta^r P'$ con $P', P \geq \Delta$.
2. Scomponiamo P' nel prodotto di trecce di permutazioni $P = B_1 B_2 \dots B_k$.
3. Troviamo gli insiemi $\S(B_i)$ e $\overline{F}(B_i)$.
4. Se $\S(B_{i+1}) \subset \overline{F}(B_i)$ per ogni i allora, per il teorema 3.3.4, la forma ottenuta per P' e già la forma left-canonical. Incorporando le potenze iniziali di Δ dell'espressione di P' in Δ^r otteniamo la forma left-canonical per P_1 .

5. Altrimenti sia i il primo indice tale che $\S(B_{i+1}) \not\subset \overline{F}(B_i)$ e selezioniamo $j \in (\S(B_{i+1}) - \overline{F}(B_i))$. Allora $C_i = B_i\sigma_j$ e $C_{i+1} = \sigma_j^{-1}B_{i+1}$ stanno in S_n^+ e possiamo sostituirli al posto di B_i e B_{i+1} . Ripetiamo il procedimento fino all'indice k .
6. Procediamo analogamente per P_2 e confrontiamo le forme finali ottenute.

3.3.3 Il super summit set

L'idea di Elrifai-Morton segue la strada tracciata da Garside il quale, come sappiamo, aveva osservato che due trecce coniugate hanno lo stesso summit set S . Il contributo di Elrifai e Morton in [11] porta a restringere il summit set all'insieme delle trecce di lunghezza canonica l minima. Vediamo come procedere:

Teorema 3.3.5. *Siano $P, Q \geq \Delta^r$ due trecce coniugate. Possiamo supporre che $A^{-1}PA = Q$ per qualche $A \geq 1$. Allora $A_1^{-1}PA_1 = Q$ dove $A_1 \in [0, 1]$ è il primo fattore della forma left-canonical di A .*

Corollario 3.3.2. *Siano $P, Q \in [r, s]$ coniugate. Esiste una sequenza di trecce in $[r, s]$, $P = P_0, P_1, P_2, \dots, P_k = Q$, tale che ogni elemento è coniugato al successivo mediante una treccia in $[0, 1]$.*

Ecco dunque data una procedura per costruire il super summit set dove:

Definizione 3.3.5. *Il super summit set di una treccia P è l'insieme di tutti i coniugati P' di P tali che $\inf P'$ è massimale e $\sup P'$ minimale.*

L'algoritmo per il problema del coniugio tra due elementi P e Q consisterà proprio nel calcolare il super summit set di una treccia P e vedere se contiene un elemento del super summit set di Q . Introduciamo a tal fine il seguente concetto:

Definizione 3.3.6. *Sia $P = \Delta^r P_1 P_2 \dots P_k$ dove $r = \inf P$ e $P_1 P_2 \dots P_k$ la forma left-canonical per $\Delta^{-r} P$. Allora $P_1 \neq \Delta$ e possiamo formare il coniugato $c(P) = \Delta^r P_2 \dots P_k \tau^r(P_1)$ che chiamiamo ciclo di P .*

Molteplici successive applicazioni dell'algoritmo della parola mostrano che $\inf c(P) \geq r = \inf P$ e $\sup c(P) \leq k + r = \sup P$.

Lemma 3.3.3. *Sia P coniugata a Q con $\inf Q > \inf P$. Allora successivi cicli producono, per qualche j , $c^j(P)$ tale che $\inf c^j(P) > \inf P$.*

Corollario 3.3.3. *In ogni classe di coniugio il massimo valore dell'inf e il minimo del sup possono essere ottenuti simultaneamente. Allora il super summit set di una treccia W è il sottoinsieme della sua classe di coniugio fatto dalle parole di lunghezza minima.*

Osserviamo che, nella pratica, il processo di applicare ripetuti cicli porta al massimo valore del suo inf che si trova quando si ottengono cicli già calcolati in precedenza. Per trovare il minimo valore del sup possiamo, invece, calcolare i cicli di P^{-1} oppure i de-cicli di P stessa dove per de-ciclo intendiamo il ciclo applicato alla forma canonica con l'ultimo fattore spostato all'inizio. Esplicitamente, se $P = \Delta^r P_1 P_2 \dots P_k$ è la forma canonica di P , definiamo $r(P) = \Delta^r \tau^r(P_k) P_1 \dots P_{k-1}$. Infatti:

Proposizione 3.3.7. *Vale $(r(P))^{-1} = \tau(c(P^{-1}))$.*

Usando la proposizione troviamo che $\text{sup}r(P) = -\inf \tau(c(P^{-1})) = -\inf c(P^{-1})$ e $\text{sup}r^j(P) = -\inf c^j(P^{-1})$. Ora, poiché abbiamo trovato il valore più grande dell'inf dei coniugati di P^{-1} soltanto considerando $c^j(P^{-1})$ possiamo calcolare il minimo per il sup di tutti i coniugati di P considerando i de-cicli $r^j(P)$. Dunque possiamo identificare almeno un elemento del super summit set di P attraverso cicli e de-cicli fino a quando troviamo ripetizioni senza dover calcolare tutto l'insieme.

3.3.4 L'algoritmo

Siano P e Q due trecce di cui vogliamo studiare il problema del coniugio.

1. Calcoliamo il super summit set di P .
2. Troviamo un elemento del super summit set di Q e lo confrontiamo con quelli trovati al passo precedente.

3.4 Gli algoritmi per la presentazione a bande

In questo paragrafo discuteremo un recente algoritmo, proposto da Birman in [4], che si basa sulla presentazione 2.3.1. Essenzialmente, come vedremo, tale algoritmo non è altro che un adattamento di quello di Garside. L'importanza di questa implementazione sta nel fatto che la complessità computazionale

ne risulta notevolmente migliorata visto che se una parola W ha lunghezza L nei generatori standard allora ha lunghezza L/n nei nuovi generatori. Tralascieremo, vista l'analogia con la teoria presentata nelle sezioni precedenti, gli aspetti tecnici e le dimostrazioni per le quali rimandiamo all'articolo originale [4].

Come in [15] consideriamo, in vista di affrontare i problemi della parola e del coniugio, la *parola fondamentale*

$$\delta = a_{n(n-1)}a_{(n-1)(n-2)}\dots a_{21} = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_2\sigma_1$$

È facile riconoscere che $\Delta^2 = \delta^n$. L'algoritmo della parola ci porterà a fattorizzare ogni treccia $W \in B_n$ come parola nella forma

$$W = \delta^j A_1 A_2 \dots A_k$$

dove $A = A_1 A_2 \dots A_k$ è positiva, j massimale e k minimale esattamente come in [11] accadeva per la forma left-canonical. I fattori A_j , che sono gli analoghi delle trecce di permutazioni definiti in [11], saranno chiamati *fattori canonici*. Osserviamo che la presentazione 2.3.1 ha la proprietà che le relazioni non coinvolgono potenze negative dei generatori così che anche in questo contesto possiamo introdurre il semigrupp delle parole positive che indicheremo con B^+ per evitare confusione. Ancora il simbolo \doteq significherà che due parole positive X e Y sono positivamente equivalenti e cioè uguali a meno di una catena finita di trasformazioni ottenute applicando una singola relazione. Il teorema di Garside 3.2.3 si generalizza alla presentazione a bande così che B^+ si immerge nel gruppo delle trecce e dunque parole positive sono positivamente equivalenti. Analizziamo allora le principali proprietà di δ .

Lemma 3.4.1. *Sia δ la treccia fondamentale.*

1. δ è positivamente equivalente a una parola che inizia o finisce con un qualunque generatore dato a_{ts} , $1 \leq s < t \leq n$. Le espressioni in termini dei generatori sono

$$\delta \doteq (a_{ts})(a_{n(n-1)} \dots a_{(t+2)(t+1)} a_{(t+1)s} a_{s(s-1)} \dots a_{21})(a_{t(t-1)} \dots a_{(s+2)(s+1)})$$

$$\delta \doteq (a_{n(n-1)} \dots a_{(t+1)t} a_{t(s-1)} a_{(s-1)(s-2)} \dots a_{21})(a_{(t-1)(t-2)} \dots a_{s+1})_s (a_{ts})$$

2. Sia $A = a_{n_m n_{m-1}} a_{n_{m-1} n_{m-2}} \dots a_{n_2 n_1}$, $n \geq n_m > \dots > n_1 \geq 1$. Allora A è positivamente equivalente a una parola che comincia o finisce con $a_{n_t n_s}$, per qualunque scelta di n_t e n_s , $1 \leq n_s < n_t \leq n$.

3. $a_{ts} \delta \doteq \delta a_{(t+1)(s+1)}$ dove t e s sono definiti modulo n .

Notiamo che la condizione (c) dice che il coniugio mediante δ provoca negli indici un incremento di un'unità. In analogia alla notazione usata nei paragrafi precedenti poniamo

$$\tilde{\tau}(a_{ts}) = \delta^{-1} a_{ts} \delta = a_{(t+1)(s+1)}$$

dove intendiamo gli indici mod n . Analogamente vale una sorta di cancellazione a destra e a sinistra che porta al seguente:

Teorema 3.4.1 (di reversibilità). *Se X e Y sono due parole positive allora esistono U e V positive tali che $UX \doteq VY$.*

Usando tale proprietà si dimostra, come preannunciato, che:

Teorema 3.4.2 (di immersione). *Se due parole positive sono uguali in B_n allora sono positivamente equivalenti.*

3.4.1 Il problema della parola per la presentazione a bande

Vediamo come l'analisi di Garside, Elrifai e Morton si traduce per la presentazione a bande. Useremo una notazione analoga sottointendendo il nuovo contesto.

Lemma 3.4.2. *Ogni treccia $W \in B_n$ può essere rappresentata da una parola della forma $\delta^p Q$ dove p è un numero intero e Q una parola positiva.*

Proposizione 3.4.1. *La relazione \leq in B_n con la presentazione a bande ha le seguenti proprietà:*

1. \leq è un ordine parziale;
2. Se $W \leq \delta^u$, allora $\delta^u = PW = W\tilde{\tau}^u(P)$ per qualche $P \in B^+$;
3. Se $\delta^u \leq W$, allora $W = P\delta^u = \delta^u\tilde{\tau}^u(P)$ per qualche $P \in B^+$;
4. Se $\delta^{v_1} \leq V \leq \delta^{v_2}$ e $\delta^{w_1} \leq W \leq \delta^{w_2}$, allora $\delta^{v_1+w_1} \leq VW \leq \delta^{v_2+w_2}$;
5. Per ogni parola W esistono u, v tali che $\delta^u \leq W \leq \delta^v$.

Una permutazione $\pi \in \Sigma_n$ sarà detta *ciclo discendente* se è rappresentata da un ciclo $(t_j t_{j-1} \dots t_1)$ con $j \geq 2$ e $t_j > t_{j-1} > \dots > t_1$: allora se π è un tale ciclo δ_π denoterà la treccia $a_{t_j t_{j-1}} a_{t_{j-1} t_{j-2}} \dots a_{t_2 t_1}$. Due cicli $(t_j t_{j-1} \dots t_1), (s_i s_{i-1} \dots s_1)$ sono detti *paralleli* se t_a e t_b non separano s_a e s_b . Un prodotto di cicli paralleli e discendenti $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_k$ è dunque fatto di cicli

disgiunti e dunque che commutano per cui commutano i fattori della parola $\delta_1\delta_2\dots\delta_k$.

Di fondamentale importanza è il seguente teorema che caratterizza, come in [11], le trecce in $[0, 1]$, (tali cioè che $1 \leq A \leq \delta$):

Teorema 3.4.3. *Una parola A è in $[0, 1]$ se e solo se $A = \delta_{\pi_1}\delta_{\pi_2}\dots\delta_{\pi_k}$ per certi k cicli discendenti e paralleli in Σ_n detti fattori canonici.*

Corollario 3.4.1. *Una parola positiva A è un fattore canonico se e solo se non contiene un'ostruzione dove, se t, s, r, q sono interi, $1 \leq q < r < s < t \leq n$, definiamo ostruzione una coppia (a, b) se si verifica uno dei seguenti casi:*

1. $a = a_{tr}, b = a_{sq}$

2. $a = a_{sq}, b = a_{tr}$

3. $a = a_{sr}, b = a_{ts}$

4. $a = a_{ts}, b = a_{tr}$

5. $a = a_{tr}, b = a_{sr}$

6. $a = a_{ts}, b = a_{ts}$.

Il teorema e il corollario precedenti ci assicurano, in altre parole, che la treccia δ può essere scritta in molti modi come prodotto di generatori a_{ts} senza ostruzioni. Analogamente ogni ciclo discendente δ_π ha una tale proprietà. Dunque se una treccia è rappresentata da una parola che non contiene ostruzioni è un fattore canonico e così può essere scritto come prodotto

di cicli discendenti: allora non ci sono ostruzioni in nessuna parola che la rappresenta.

Resta, ora, da vedere come tradurre il 3.4.3 in un algoritmo per il problema della parola. Per fare questo abbiamo bisogno di considerare le parole del tipo $A = A_1A_2\dots A_k$ dove gli A_i sono fattori canonici. In ciò che segue, tutti i concetti introdotti nel paragrafo 3.3.2 sono pensati definiti in termini della presentazione a bande. In questo contesto una decomposizione $Q = AP$, dove A è un fattore canonico e P positiva, è detta *left-weighted* se $L(A)$ è massimale. Il seguente corollario permette di stabilire se una fattorizzazione è *left-weighted*:

Corollario 3.4.2. *Siano A e P positive, A un fattore canonico. Allora A e P sono *left-weighted* se e solo se per ogni $b \in \S(P)$ esiste $a \leq A$ tale che (a, b) è un'ostruzione.*

Finalmente possiamo dimostrare il teorema che dà la cosiddetta forma *left-canonical* per trecce espresse nei generatori a bande:

Teorema 3.4.4. *Ogni treccia $W \in B_n$ si può esprimere nella forma*

$$W = \delta^u A_1 A_2 \dots A_k$$

dove ogni coppia $A_i A_{i+1}$ è *left-weighted* e ciascun A_i un fattore canonico. Inoltre $\inf(W) = u$ e $\sup(W) = u + k$.

Dimostrazione 3.4.1. *Per il 3.4.2 possiamo scrivere $W = \delta^v P$ per qualche parola positiva P e v intero negativo. Possiamo poi scomporre P in fattori*

canonici a due a due left-weighted. Per il corollario 3.7 in [4], che caratterizza ogni starting set di un fattore canonico, otteniamo che tale decomposizione è unica.

In [4] sono presentati due lemmi tecnici che permettono di trasformare una parola $A = \delta^u A_1 A_2 \dots A_r$ in cui ogni A_i è in $[0, 1]$ in una tale che ogni coppia $A_i A_{i+1}$ è left-weighted. Tralasciamo tali lemmi ed enunciamo l'algoritmo di Birman.

3.4.2 L'algoritmo di Birman per il problema della parola

Ricordiamo che un fattore canonico si decompone in un prodotto di cicli paralleli discendenti $A = \delta_{\pi_1} \delta_{\pi_2} \dots \delta_{\pi_k}$ ed è univocamente determinato dalla permutazione $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_k$. Allora, per alleggerire la notazione, indicheremo ogni ciclo π_i con la sequenza ordinata dei suoi indici: $(5, 4, 3, 1)$ rappresenta, ad esempio, il fattore $a_{54} a_{43} a_{31}$. Siano, dunque, W_1 e W_2 parole nelle bande che rappresentano due trecce in B_n . Il teorema 3.4.4 permette di fare le seguenti operazioni:

1. Se W_1 non è positiva eliminiamo ogni generatore con potenza negativa mediante la formula

$$a_{ts}^{-1} = \delta^{-1}(n, n-1, \dots, t+1, t, s-1, \dots, 2, 1)(t-1, t-2, \dots, s+1, s)$$

2. Usando $A_i \delta^k = \delta^k \tilde{\tau}^k(A_i)$ e $\delta^{-1} \delta^k = \delta^{k-1}$ muoviamo tutte le occorrenze di δ a sinistra ottenendo $W_1 = \delta^u A_1 A_2 \dots A_k$, $A_i \in [0, 1]$.

3. Si converte la decomposizione ottenuta in forma canonica spostando a sinistra eventuali fattori δ comparsi e usando i lemmi in ?? per ottenere la scomposizione in fattori canonici. Otteniamo $W_1 = \delta^m A_1 A_2 \dots A_k$, $A_i \in [0, 1]$, $m \geq u$.
4. Ripetiamo il procedimento per W_2 e confrontiamo le forma canoniche ottenute.

3.4.3 Il problema del coniugio per la presentazione a bande

Come in [11] consideriamo il ciclo di una parola W nella forma canonica $W = \delta^u A_1 \dots A_k$ definito come la parola

$$c(W) = \delta^u A_2 \dots A_k \tilde{\tau}^{-u}(A_1)$$

e il de-ciclo

$$d(W) = \delta^u \tilde{\tau}^u(A_k) A_1 \dots A_{k-1}.$$

Il lavoro di Elrifai-Morton si adatta alla nuova presentazione per cui il problema del coniugio è risolto, in termini di bande, grazie al 3.3.3 e al 3.3.3.

Come conseguenza otteniamo il seguente:

Teorema 3.4.5. *Supponiamo che due n -trecce $V, W \in [u, v]$ sono coniugate.*

Allora esiste una sequenza di trecce

$$V = V_0, V_1, \dots, V_k = W$$

tale che ciascun V_{i+1} è coniugata di V_i mediante un elemento in $[0, 1]$.

3.4.4 Gli algoritmi di Birman per il problema del coniugio

Descriviamo l'algoritmo di Birman che ricalca il procedimento di Elrifai-Morton. Siano W_1 e W_2 n -trecce.

1. Operiamo cicli e decicli su W_1 e W_2 fino ad ottenere due parole W'_1 e W'_2 nel super summit set. Se W_1 e W_2 hanno il massimo inf o il minimo sup distinti concludiamo che non sono coniugate.
2. Altrimenti calcoliamo il super summit set di W_1 mediante il teorema 3.4.5.
3. Se un elemento nel super summit set di W_2 appartiene al super summit set di W_1 , le trecce sono coniugate.

3.5 Gli algoritmi FullHRed e GreedyHRed

In questo paragrafo analizzeremo gli algoritmi dovuti a Dehornoy descritti in [9]. Come già detto, l'approccio seguito in [9] è diverso da quello in [15], [11] e [4]. Il metodo di Dehornoy, che consiste sostanzialmente nel trasformare ogni parola nei generatori standard di B_n nella forma ridotta della definizione 3.5.2, risolve il problema della parola per il gruppo delle trecce. Riporteremo le definizioni e i teoremi basilari rimandando agli articoli [8], [9] e [10] per i relativi approfondimenti. Intoduciamo i seguenti concetti:

Definizione 3.5.1. Sia $W = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$, $\epsilon = \pm 1$, $1 \leq i_j \leq n-1$, una parola in B_n . Definiamo larghezza di W la differenza $i_j - i_l + 2$ dove

$$i_j = \max\{i_1, \dots, i_k\}$$

e

$$i_l = \min\{i_1, \dots, i_k\}.$$

Definizione 3.5.2. Sia $W = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$, $\epsilon = \pm 1$, una parola in B_n . Diciamo che W è ridotta se $W = 1$, o il generatore principale (cioè il generatore di indice più basso) occorre in W soltanto con esponenti ϵ positivi oppure solo con esponenti negativi.

Gli algoritmi si basano sulle seguenti proposizioni in [8]:

Proposizione 3.5.1. Se W è una parola ridotta tale che $W \neq 1$ allora W non può rappresentare la treccia banale.

Proposizione 3.5.2. Ogni treccia ammette una decomposizione ridotta.

Se la forma ridotta di una parola è diversa da 1 la treccia rappresentata non è equivalente alla treccia banale: trovare un algoritmo per ridurre un elemento in B_n risolve dunque il problema della parola. Osserviamo che dalla definizione 3.5.2 una parola W non è ridotta se contiene sottoparole del tipo $\sigma_i^{\pm 1} \beta \sigma_i^{\mp 1}$, dove σ_i è un generatore principale e $\beta \in B_n$ la parola tra due sue occorrenze: in particolare β ha la proprietà che coinvolge soltanto generatori con indice $k > i$. Geometricamente questo corrisponde al fatto che la stringa $i+1$ forma un *manico* come nella figura ??.

Il procedimento di riduzione in [9] si basa sull'eliminazione dei manici.

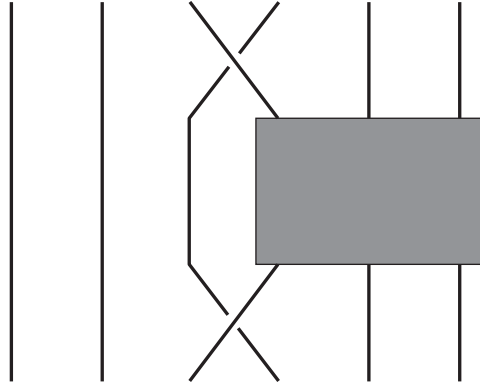


Figura 3.2: Manico.

Definizione 3.5.3. Un σ_j -manico è una treccia della forma $\sigma_j^\epsilon \beta \sigma_j^{-\epsilon}$ dove $\epsilon = \pm 1$ e la parola β contiene solo generatori σ_k con $k > j$ o $k < j - 1$. Un manico è detto principale se σ_j è principale.

Definiamo due tipi di riduzioni sui manici, geometricamente mostrate nelle figure ?? e ??.

Definizione 3.5.4. Il manico $\sigma_j^\epsilon \beta \sigma_j^{-\epsilon}$ è equivalente alla parola

$$\sigma_{j+1}^{-\epsilon} \sigma_{j+2}^{-\epsilon} \dots \sigma_{l-1}^{-\epsilon} f(\beta) \sigma_{l-1}^\epsilon \dots \sigma_{j+1}^\epsilon \quad (3.1)$$

dove l è la larghezza del manico e f la trasformazione in B_n che porta σ_k in σ_{k-1} per $j < k < l - 1$ e fissa i rimanenti generatori. La sostituzione di un manico con la parola 3.1 è detta riduzione elementare.

Osserviamo che una riduzione elementare su un σ_j -manico ha la proprietà di muovere la stringa $j + 1$ all'estrema destra del manico stesso (figura ??).

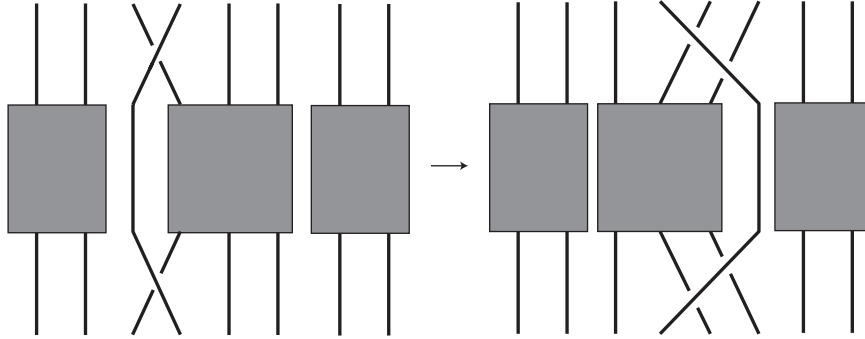


Figura 3.3: Riduzione elementare.

Definizione 3.5.5. *Chiamiamo riduzione locale la sostituzione del manico nella generica forma $\sigma_j^\epsilon \beta_0 \sigma_{j+1}^{d_1} \beta_1 \dots \beta_{m-1} \sigma_{j+1}^{d_m} \beta_m \sigma_j^{-\epsilon}$ dove le parole β_i , $i = 0, \dots, m$ non contengono generatori con indice k t.c. $j - 1 \leq k \leq j + 1$, con la seguente parola equivalente*

$$\beta_0 \sigma_{j+1}^{-\epsilon} \sigma_j^{d_1} \sigma_{j+1}^\epsilon \beta_1 \dots \beta_{m-1} \sigma_{j+1}^{-\epsilon} \sigma_j^{d_m} \sigma_{j+1}^\epsilon \beta_m. \tag{3.2}$$

Le parti cerchiate della figura ?? significano che l'incrocio può essere indifferentemente positivo o negativo. In altre parole una riduzione locale è l'omomorfismo $\phi_{j,\epsilon}$ tale che

$$\begin{cases} \sigma_j^{\pm 1} & \mapsto 1 \\ \sigma_{j+1}^{\pm 1} & \mapsto \sigma_{j+1}^{-\epsilon} \sigma_j^{\pm 1} \sigma_{j+1}^\epsilon \\ \sigma_k^{\pm 1} & \mapsto \sigma_k^{\pm 1} \quad k \neq j, j + 1 \end{cases}$$

Osserviamo che applicando le riduzioni locali si possono creare nuovi manici. In [9] è mostrato che questo inconveniente si verifica in un solo caso

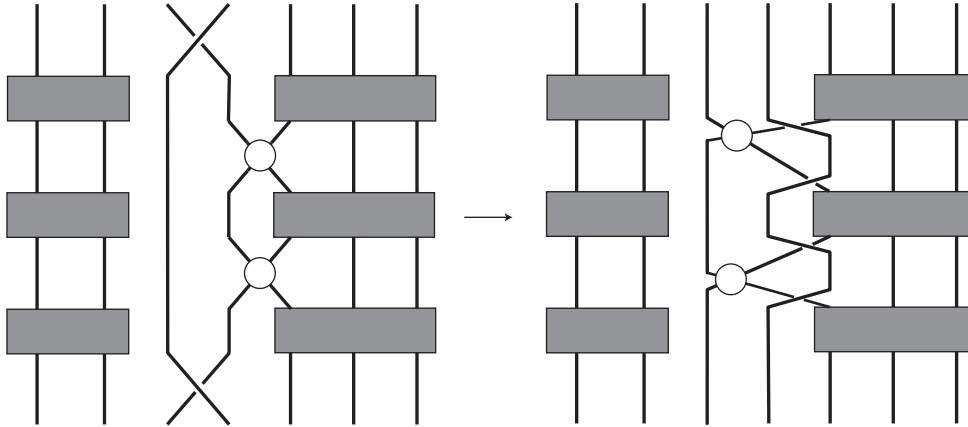


Figura 3.4: Riduzione locale.

ed esattamente quando applichiamo le riduzioni a σ_j -manici che contengono al loro interno dei σ_{j+1} -manici come sottoparole. Se questo non si verifica diciamo che il σ_j -manico è *ammissibile* e in tal caso una riduzione locale si chiama *H-riduzione*. L'algoritmo in [9] si basa sul seguente teorema:

Teorema 3.5.1. *Una sequenza di H-riduzioni applicate ad una qualunque parola W porta, in un numero finito di passi, ad ottenere una parola W' ridotta.*

Introduciamo la seguente definizione che caratterizza le *H-riduzioni*:

Definizione 3.5.6. *La parola $W \in B_n$ si dice f -ridotta se tutte le coppie σ_j e σ_j^{-1} sono separate da almeno un generatore $\sigma_{j-1}^{\pm 1}$.*

Lemma 3.5.1. *Per ogni parola $W \in B_n$ sono equivalenti:*

1. W è f -ridotta;
2. W non contiene manici;
3. a W non si possono applicare H -riduzioni.

Gli algoritmi che andiamo a presentare si basano sul principio delle riduzioni dei manici e in particolare dei manici ammissibili. La questione è dunque sapere da quale manico cominciare a ridurre una parola W data. Esperimenti pratici hanno portato Dehornoy a lavorare sempre con parole in cui non compaiono le relazioni banali: indicheremo con HF -riduzione una H -riduzione in cui, poi, eliminiamo tutte le occorrenze del tipo $\sigma_j \sigma_j^{-1}$ e $\sigma_j^{-1} \sigma_j$.

3.5.1 L'algoritmo FullHRed

Siano W_1 e $W_2 \in B_n$ le parole di cui vogliamo studiare l'equivalenza e consideriamo $W = W_2^{-1}W_1$.

1. Iteriamo un processo di HF -riduzioni al primo manico che compare in W fino ad ottenere una parola f -ridotta.
2. Per la 3.5.1, se la parola ottenuta è diversa da 1, W_1 e W_2 non sono equivalenti, mentre rappresentano la stessa treccia nel caso contrario.

3.5.2 L'algoritmo GreedyHRed

Supponiamo che σ_i sia il generatore principale di una parola β e siano p e q le posizioni lungo la parola β che limitano un σ_j -manico. Chiamiamo *annidato*

un σ_j -manico di β che si trova tra le posizioni p e q se esiste una sequenza di intervalli

$$(p_j, q_j) = (p, q) \subset (p_{j-1}, q_{j-1}) \subset \dots \subset (p_i, q_i)$$

tale che, per ogni k , la sottoparola di β che si trova tra le posizioni p_k e q_k è un σ_{i+k} -manico. Un altro algoritmo per ridurre una parola $W = W_2^{-1}W_1$ è allora il seguente:

1. Iteriamo un processo di HF -riduzioni al primo manico annidato che incontriamo.
2. Controlliamo se la parola ottenuta è 1 per dedurre che W_1 e W_2 sono equivalenti oppure non equivalenti nel caso contrario.

3.6 Osservazioni finali

Concludiamo con alcune osservazioni sul costo computazionale degli algoritmi descritti. Come già detto in precedenza si congettura che l'algoritmo di Artin sia esponenziale nella lunghezza dell'input. Per quanto riguarda il metodo di Garside ed Elrifai-Morton esistono diverse implementazioni basate sui loro algoritmi per il problema della parola e il migliore risulta, finora, di complessità $\mathcal{O}(L(W)^\epsilon \log L(W))$, (dove, al solito, $L(W)$ è la lunghezza della parola più lunga tra le due confrontate e $W \in B_n$). Le bande introdotte in [4] permettono di migliorare ancora tali risultati in quanto la lunghezza $L(W)$ in termini di bande è $|W|/n$ se $|W|$ è la lunghezza della parola nei generatori di Artin. Birman mostra in [4] che l'algoritmo 3.4.2 è $\mathcal{O}(L(W)^\epsilon)$. Mentre

si congettura che anche i processi di riduzione degli algoritmi di Dehornoy siano quadratici nella lunghezza dell'input, nulla si conosce, invece, dei costi computazionali degli algoritmi per il coniugio.

Infine osserviamo che gli algoritmi analizzati possono essere la base per uno studio successivo relativo al problema di classificazione delle trecce quasipositive, cioè quelle che si possono esprimere come prodotto di coniugati di generatori positivi, che hanno applicazioni nello studio delle superfici ribbon e delle strutture di contatto.

Bibliografia

- [1] E. Artin, *Braids and Permutations*, Ann. of Math. **48**, No. 3, (1947), 643–649.
- [2] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. **48**, No. 1, (1947), 101–126.
- [3] M. Artin, *Algebra*, Bollati Boringhieri.
- [4] J. S. Birman, K. H. Ko, and S. J. Lee, *A new Approach to the Word and Conjugacy Problems in the Braids Groups*, Adv. Math. **139**, (1998), 322–353.
- [5] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Group*, Ann. of Math. Studies **82**, Princeton, New Jersey (1974).
- [6] F. Bohnenblust, *The Algebraical braid group*, Ann. of Math. **48**, No. 1, (1947), 127–136.
- [7] W. L. Chow, *On the Algebraical braid group*, Ann. of Math. **49**, No. 3, (1948), 654–658.

-
- [8] P. Dehornoy, *Braid groups and left distributive operations*, Trans. Amer. Math. Soc. **345**, No. 1, (1994), 115–151.
- [9] P. Dehornoy, *A fast method for comparing braids*, Adv. Math. **125**, (1997), 200–235.
- [10] P. Dehornoy, *From large cardinals to braids via distributive algebra*, J. Knot. Theory Ram. **4**, No. 1, (1995), 33–79.
- [11] E. A. Elrifai e H. R. Morton, *Algorithms for positive braids*, Quart. J. Math. Oxford (2), **45**, (1994), 479–497.
- [12] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand. **10**, (1962), 111–118.
- [13] E. Fadell and J. Van Buskirk, *The braid group of E^2 and S^2* , Duke Math. Jul. **29**, No. 2, (1962), 243–258.
- [14] R. H. Fox and L. Neuwirth, *The braid group*, Math. Scand. **10** (1962), 119–126.
- [15] F. A. Garside, *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford (2), **20**, (1969), 235–254.
- [16] B. Gray, *Homotopy theory*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, (1975).
- [17] W. Magnus, *Braid group: a survey*, Lect. Notes in Math. **372**, (1974).

-
- [18] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Pure and Appl. Math. **XIII**.
- [19] S. Moran, *The Mathematical Theory of Knots and Braids, An Introduction*, Math. Studies **82**.
- [20] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, Trans. of Math. Monographs **154**, AMS.
- [21] N. Steenrod, *The topology of fibred bundles*, Princeton University Press (1951), Princeton, New Jersey.
- [22] P. Xu, *The genus of closed 3-braids*, J. knot Theory Ramifications **1**, (1992), 303–326.