

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO  
Facoltà di Scienze e Tecnologie

*Corso di Laurea in Matematica e Applicazioni (Classe 32)*

*Dipartimento di Matematica ed Informatica*



TOPOLOGIA IN GIOCO

*Tesi di Laurea Compilativa  
in Topologia*

*Laureanda:*

**Sara Mattioli**

*Relatori:*

**Prof. Riccardo Piergallini**

**Prof. Carlo Toffalori**

---

Anno Accademico 2008-2009

*Tutto col gioco,  
niente per gioco.*

*Alla mia famiglia e ai miei amici.*

---

# Indice

<b>Indice</b>	<b>iv</b>
<b>Elenco delle Figure</b>	<b>vii</b>
<b>Elenco delle Tabelle</b>	<b>ix</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 CAPITOLO 1</b>	<b>3</b>
1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG . . . . .	3
1.1.1 Il problema . . . . .	3
1.1.2 Parliamo di Grafi . . . . .	7
1.1.3 Concludendo . . . . .	14
1.2 ICOSIAN GAME . . . . .	15
1.2.1 Il problema . . . . .	15
1.2.2 Parliamo di grafo hamiltoniani . . . . .	16
1.2.3 Concludendo . . . . .	19
1.3 IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DEI TRE SERVIZI . . . . .	22
1.3.1 Il problema . . . . .	22
1.3.2 Un po' di topologia . . . . .	22
1.3.3 Concludendo . . . . .	25
1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS . . . . .	26
1.4.1 Il problema . . . . .	26
1.4.2 Nastro di Moebius: oggetto non solo matematico . . . . .	28
1.4.3 Topologia del nastro . . . . .	29
1.5 SCIOGLIERE IL NODO . . . . .	37
1.5.1 Il problema . . . . .	37
1.5.2 Un po' di storia . . . . .	37
1.5.3 Topologia dei nodi . . . . .	39
1.5.4 Concludendo . . . . .	47

<b>2</b>	<b>CAPITOLO 2</b>	<b>49</b>
2.1	IL TIROCINIO . . . . .	49
2.1.1	Il progetto formativo . . . . .	50
2.1.2	Unità didattica prevista inizialmente . . . . .	50
2.1.3	Prima lezione . . . . .	53
2.1.4	Seconda lezione . . . . .	57
2.1.5	Terza lezione . . . . .	62
2.1.6	Quarta lezione . . . . .	68
2.1.7	Quinta lezione . . . . .	69
2.1.8	Teoria dei nodi . . . . .	81
2.1.9	Verifica scritta . . . . .	98
2.2	TUTTOINGIOCO . . . . .	106
2.2.1	Il tavolo . . . . .	108
<b>3</b>	<b>CAPITOLO 3</b>	<b>111</b>

# Elenco delle figure

1.1	Città di Königsberg . . . . .	3
1.2	Disegno originale di Euler . . . . .	4
1.3	Grafo associato al problema . . . . .	6
1.4	Esempio di grafo . . . . .	8
1.5	Grafi completi . . . . .	8
1.6	Sottografo . . . . .	9
1.7	Un grafo euleriano, un grafo semieuleriano e un grafo non semieuleriano . . . . .	11
1.8	Cartina . . . . .	15
1.9	Icosaedro . . . . .	16
1.10	The Icosian Game . . . . .	16
1.11	Un grafo hamiltoniano, un grafo semihamiltoniano , un grafo non semihamiltoniano. . . . .	17
1.12	TSP . . . . .	19
1.13	Scacchiere 3x3 e 4x4 . . . . .	20
1.14	Sequenza bianco - nera . . . . .	20
1.15	Esempi del Teorema 9 . . . . .	21
1.16	Problema delle tre case e dei tre servizi . . . . .	22
1.17	Definizione delle classi A e B . . . . .	23
1.18	Definizione dei punti p e q . . . . .	24
1.19	Sei dei nove collegamenti . . . . .	25
1.20	Disegno di Mauritius Cornelius Escher . . . . .	27
1.21	Nastro di Moebius . . . . .	32
1.22	Triangolazione . . . . .	34
1.23	Emisfero e piano . . . . .	35
1.24	Identificazione . . . . .	35
1.25	Nastro di Moebius privo di bordo . . . . .	36
1.26	Nodo . . . . .	37
1.27	Nodo banale, nodo trifoglio e nodo ad otto . . . . .	38
1.28	Link di Hopf . . . . .	40
1.29	Mosse di Reideimeister . . . . .	42

## ELENCO DELLE FIGURE

---

1.30	Colorazione di un nodo banale, un nodo trifoglio e un nodo ad otto . . . . .	43
1.31	Prima mossa di Reidemeister . . . . .	44
1.32	Seconda mossa di Reidemeister . . . . .	44
1.33	Terza mossa di Reidemeister . . . . .	44
1.34	Esempio di linking number . . . . .	45
1.35	Orientazione degli incroci . . . . .	46
1.36	Linking number del link di Hopf . . . . .	46
1.37	Linking number di un finto link di Hopf . . . . .	46
1.38	Linking number del link di Whitehead . . . . .	47
1.39	Due nodi non equivalenti aventi stesso linking number . . . . .	47
1.40	Gioco con quattro persone . . . . .	48
2.1	Città di Königsberg . . . . .	53
2.2	Grafo relativo alla città . . . . .	54
2.3	Grafo completo del torneo . . . . .	55
2.4	Ponti di Parigi . . . . .	56
2.5	Sviluppi del dodecaedro . . . . .	57
2.6	Soluzione dell'esercizio . . . . .	57
2.7	Diagrammi di Schlegel . . . . .	59
2.8	Possibile ciclo hamiltoniano . . . . .	59
2.9	I due tipi di scacchiera . . . . .	61
2.10	Spostamenti del cavallo . . . . .	61
2.11	Tutti i possibili spostamenti del cavallo sugli scacchi . . . . .	63
2.12	Possibili soluzioni del problema . . . . .	63
2.13	Grafo circolare . . . . .	64
2.14	Il problema delle tre case e dei tre servizi . . . . .	64
2.15	Sei dei nove collegamenti del problema . . . . .	65
2.16	Soluzioni nei vari casi . . . . .	66
2.17	Soluzione sul toro . . . . .	66
2.18	Soluzione sul nastro . . . . .	66
2.19	Soluzione sul cilindro . . . . .	67
2.20	Taglio sul cilindro e sul nastro . . . . .	67
2.21	Taglio sul cilindro . . . . .	67
2.22	Poligoni da identificare . . . . .	68
2.23	Poligoni . . . . .	69
2.24	Ciambelle . . . . .	72
2.25	Manici . . . . .	73
2.26	Il genere di vari oggetti . . . . .	74
2.27	Differenza dei vari bordi . . . . .	78
2.28	Dimostrazione della caratteristica di Eulero . . . . .	79

## ELENCO DELLE FIGURE

---

2.29	Nodo trifoglio . . . . .	82
2.30	Nodo savoia . . . . .	83
2.31	Nodo banale . . . . .	83
2.32	Nodi a diverse componenti . . . . .	84
2.33	Diagramma del nodo trifoglio . . . . .	86
2.34	Due nodi trifoglio . . . . .	87
2.35	Tabella di classificazione dei nodi . . . . .	87
2.36	Nodo ad otto allo specchio . . . . .	88
2.37	Nodo trifoglio allo specchio . . . . .	88
2.38	Mosse di Reidemeister . . . . .	89
2.39	Ponti e archi . . . . .	95
2.40	Esempio sul trifoglio . . . . .	95
2.41	Link di Whitehead . . . . .	108
2.42	Anelli Borromeo . . . . .	109
2.43	Nodi allo specchio . . . . .	109
2.44	Bolla di sapone . . . . .	110
3.1	Grafo che descrive la situazione . . . . .	114



## ELENCO DELLE FIGURE

---

# Elenco delle tabelle

2.1	Risultati della verifica . . . . .	101
2.2	Risultati della valutazione . . . . .	103

## ELENCO DELLE TABELLE

---

# Introduzione

Le conclusioni e le idee predeterminate derivano dal passato. È il passato che cerca di risolvere il problema. L'essere umano lo traduce nel proprio comportamento e agisce in base a conclusioni prese in precedenza, mentre il fatto esige che lo si guardi. Il fatto esige che lo si osservi, che lo si ascolti. Il fatto stesso ha in se la risposta. Non devo preoccuparmi di dargli una risposta. [...] In primo luogo devo imparare dal problema, il che significa che devo avere una mente umile. Non ci si può avvicinare al problema dicendo "Lo conosco già". Ciò che conosciamo sono solo spiegazioni, razionali o irrazionali, e perciò affrontiamo il problema con spiegazioni razionali e irrazionali. In questo modo non impariamo dal problema. Il problema se sono capace di affrontarlo e di imparare da esso, rivela un'infinità di aspetti. Per fare ciò devo essere umile e dirmi "Non so. È un problema enorme. Osserviamolo e impariamo da esso". Non lo affronto a partire dalle mie conclusioni, perché ciò significherebbe che ho smesso di imparare dal problema. Perché il problema riveli se stesso, devo essere capace di guardarlo. E non posso guardarlo se mi avvicino pieno di idee, conclusioni e concettualizzazioni. Devo avvicinarmi chiedendomi "Che cos'è?". Devo imparare dal problema, non dagli studiosi, dagli psicologi o dai filosofi.

J. Krishnamurti, A. W. Anderson,  
*Un modo diverso di vivere - Conversazioni sull'uomo*,  
Ubalдини, Roma 1994

## INTRODUZIONE

---

Troppo spesso nella nostra vita il problema (non solo matematico) non viene osservato, scrutato e scandagliato con la mente pura.

L'intera tesi nasce da due esperienze concrete in cui ho "messo in gioco" la topologia, in cui ho sottoposto in vari modi, a persone diverse, problemi di natura matematica e ne ho osservato i metodi di approccio e soluzione.

La prima esperienza è stata un periodo di tirocinio fatto presso il Liceo Scientifico T.C. Onesti di Fermo in una classe del terzo anno P.N.I. nei mesi di aprile e maggio 2009 in cui ho potuto avvicinare gli alunni alla topologia con alcune ore di lezione non propriamente "standard", usando oggetti concreti, metodi di problem solving e anche qualche lezione frontale. L'esperienza si è conclusa in modo molto positivo con una prova finale.

La seconda esperienza è stata fatta in occasione della partecipazione Unicam a Tuttoingioco, la prima edizione della biennale di cultura e intrattenimento a Civitanova Alta (MC) nei giorni 14, 15 e 16 agosto 2009 dove abbiamo giocato con la topologia insieme ad un pubblico più ampio e più eterogeneo.

La tesi è suddivisa in tre parti.

Nel primo capitolo verranno affrontati cinque problemi (I sette ponti di Königsberg, L'Icosian game, Il problema delle tre case e dei tre servizi, Cilindri e nastri di Moebius, alcuni problemi sui nodi) che ho proposto in queste due esperienze analizzandone in particolar modo le note storiche e l'approfondimento puramente matematico.

Nel secondo capitolo si vedrà il modo effettivo con cui ho proposto questi problemi nelle due esperienze. Sono presenti l'intera relazione del tirocinio che comprende l'unità didattica progettata inizialmente, tutte le dispense preparate giorno per giorno e consegnate ai ragazzi solo a fine lezione e la prova finale con i relativi risultati. Per quanto riguarda Civitanova saranno descritti brevemente gli oggetti che erano in mostra sul mio tavolo.

Nel terzo capitolo si troverà una mia valutazione personale delle reazioni che gli studenti hanno avuto "incontrando" questi oggetti a lezione e il pubblico ha avuto vedendoli in mostra a Civitanova e qualche considerazione generale sulle motivazioni che conducono nella matematica di oggi a considerare "nuovi" oggetti come grafi.

# Capitolo 1

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG



Figura 1.1: Città di Königsberg

### 1.1.1 Il problema

Si narra che gli abitanti di Königsberg - una città della Prussia orientale nota per aver dato i natali a Immanuel Kant e che oggi, col nome di Kaliningrad, è enclave della Repubblica Russa - avessero un problema semplice da enunciare, che però non si riusciva a risolvere, anche se i numerosi tentativi operati facevano propendere per una risposta negativa. Ed ecco il problema dei ponti di Königsberg.

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

La città è attraversata dal fiume Pregolya, e un suo quartiere sorge su di un'isola (chiamata *der Kneiphof*) oltre la quale il fiume si spezza in due rami. A quei tempi l'isola era collegata tramite due ponti con ciascuna delle due sponde che il fiume ha prima di suddividersi, mentre la sponda situata dopo la suddivisione del fiume era collegata con un ponte sia con l'isola sia con le sponde citate precedentemente, per un totale di sette ponti.

Del problema venne a sapere Euler che lo affrontò, scrive, come se fosse un esempio di *Geometria situs*, un nuovo ramo della geometria di cui si era occupato Leibniz. Oggi noi quel ramo lo chiamiamo topologia. Si può dunque affermare che il Problema dei ponti di Königsberg è uno dei primi, se non il primo, problemi topologici affrontati e risolti.

Vediamo cosa Eulero scrive a p. 129 di *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, (1741) [7] a proposito del problema di Königsberg:

*A Königsberg in Prussia c'è un'isola A, chiamata der Kneiphof, e il fiume che la circonda si divide in due rami, come si può vedere in figura 1.2; i rami di questo fiume sono muniti di sette ponti a, b, c, d, e, f, g.*

*Circa questi ponti veniva posta questa domanda, si chiedeva se fosse possibile costruire un percorso in modo da transitare attraverso ciascun ponte una e una sola volta. E mi fu detto che alcuni negavano ed altri dubitavano che ciò si potesse fare, ma nessuno lo dava per certo. Da ciò io ho tratto questo problema generale: qualunque sia la configurazione e la distribuzione in rami del fiume e qualunque sia il numero dei ponti, si può scoprire se è possibile passare per ogni ponte una ed una sola volta?*

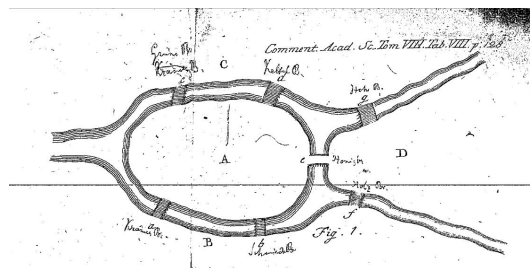


Figura 1.2: Disegno originale di Euler

Euler scrive [7] che si potrebbe cominciare con l'elencare tutte le passeggiate possibili: dall'elenco si vedrebbe qual è, o quali sono, quella/e che risolve, o risolvono, il problema oppure che tale passeggiata non esiste. Ma subito esclude quel metodo, per due motivi.

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

Primo, perchè i percorsi possibili sono un numero enorme, e la loro elencazione creerebbe difficoltà che nulla hanno a che vedere con la natura del problema.

Secondo, perchè, così facendo, si risolverebbe sì il problema specifico, che resterebbe però aperto per altre disposizioni delle regioni, per il loro numero e per il numero dei ponti.

Allora inventa un altro metodo, che si basa essenzialmente su un modo idoneo di rappresentare i percorsi. Comincia con l'indicare con  $A, B, C$  e  $D$  le quattro regioni, come si vede nella cartina precedente figura 1.2. Indica anche con  $a, b, c, d, e, f, g$  i sette ponti, ma delle lettere minuscole farà un uso estremamente ridotto.

Euler scrive che se il viaggiatore dovesse partire dalla regione  $A$  e, attraverso non importa quale dei ponti  $a$  e  $b$ , si reca in  $B$ , indicheremo il suo percorso con  $AB$ ; se poi si recasse in  $D$ , il nuovo tratto lo indicheremo con  $BD$  e tutto il tragitto con  $ABD$ . E se poi andasse da  $D$  a  $C$ , allora indicheremo il percorso complessivo con  $ABDC$ . Le quattro lettere  $ABDC$  indicano che sono stati attraversati tre ponti. In generale, il numero di ponti attraversati è di uno minore del numero di lettere della parola-percorso.

Viceversa, se si transita su un certo numero di ponti, allora il numero di lettere della parola-percorso sarà di uno maggiore di tale numero. Ecco allora la prima considerazione cruciale: il percorso cercato dovrà essere descritto da una parola-percorso di otto lettere - perchè i ponti, sui quali si deve passare una sola volta, sono sette - scritta usando solo le lettere  $A, B, C$  e  $D$ .

Quindi, risolvere il problema si riduce a trovare la parola giusta: se la parola non esistesse, sarebbe inutile cercare il percorso, perchè non esisterebbe.

Euler prosegue analizzando che cosa può capitare alla lettera  $A$ . Se la regione  $A$  fosse collegata a un'altra regione con un solo ponte, allora la parola conterrebbe una sola volta la lettera  $A$ , sia che si parta da  $A$  sia che si parta da un'altra regione. Se la regione  $A$  fosse collegata con altre regioni con tre ponti, allora la parola conterrebbe due volte la lettera  $A$ , sia che si parta da  $A$  sia che si parta da un'altra regione. Se la regione  $A$  fosse collegata con altre regioni con cinque ponti, allora la parola conterrebbe tre volte la lettera  $A$ , sia che si parta da  $A$  sia che si parta da un'altra regione. In generale, se una regione è collegata ad altre con un numero dispari di ponti, la sua lettera apparirà tante volte quanto è la metà di quel numero aumentato di uno. E questa considerazione è, anche lei, cruciale. Difatti, poiché  $A$  è collegata alle altre regioni con cinque ponti, la lettera  $A$  dovrà apparire tre volte nella parola; poiché la regione  $B$  è collegata alle altre con tre ponti, la lettera  $B$  dovrà apparire due volte, come, per lo stesso motivo, le lettere  $C$  e  $D$ . In totale, nella parola di otto lettere (prima considerazione), dovranno apparire



## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

tre  $A$ , due  $B$ , due  $C$  e due  $D$  (seconda considerazione): ma  $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ , e quindi non c'è niente da fare.

Di conseguenza, gli ospiti dei regiomontani (così Euler chiama gli abitanti di Königsberg, di cui ha latinizzato il nome in Regiomons) non potranno in nessun modo passeggiare come richiesto.

Quanto scritto sopra è contenuto nei primi nove paragrafi del lavoro *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*, pubblicato per la prima volta nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, pagg. 128-140, nel 1741 [7].

Nel paragrafo 20 poi scrive la regola per rispondere al quesito iniziale e dice:

*Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente riconoscere se la passeggiata, alle solite condizioni, è possibile o no, in forza della seguente regola. Se sono più di due le regioni alle quali conducono un numero dispari di ponti, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile. Se sono solo due le regioni alle quale conducono un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. Se infine a nessuna regione giunge un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto.*

In realtà Euler non parla di grafi (come spesso viene detto) ma è grazie ai suoi ragionamenti di tipo combinatorio che matematici successivi fanno nascere quella che oggi viene chiamata teoria dei grafi.

Infatti proprio dal suo lavoro nasce lo schema spesso associato a questo problema che riporto di sotto (figura 1.3) che altro non è che il grafo del problema.



Figura 1.3: Grafo associato al problema

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

Nel grafo le isole e la terraferma sono rappresentate da punti (detti vertici) e i ponti sono rappresentati da linee (detti spigoli). Inoltre bisogna notare che in questo problema le caratteristiche metriche sono superflue così se al posto del fiume avessimo avuto un mare o al posto delle isole delle piattaforme galleggianti poste in mezzo al fiume ... tutte le considerazioni fino ad ora fatte non cambierebbero.

### 1.1.2 Parliamo di Grafi

#### DEFINIZIONI

**Definizione 1.** Si dice grafo semplice una coppia  $G = (V, S)$  dove  $V$  è un insieme di punti detti vertici del grafo e  $S \subset \{W \subset V \mid |W| \leq 2\}$  è l'insieme degli spigoli del grafo.

**Definizione 2.** Un grafo semplice orientato è una coppia  $G = (V, S)$  dove  $V$  è un insieme di punti detti vertici del grafo e  $S \subset V \times V$ . Cioè ogni spigolo è una coppia ordinata di vertici.

**Definizione 3.** Si dice grafo una tripla  $G = (V, S, \phi)$  dove  $V$  è l'insieme dei vertici,  $S$  è l'insieme degli spigoli e  $\phi : S \rightarrow \{W \subset V \mid |W| \leq 2\}$  è una funzione.

**Definizione 4.** Un grafo orientato è una tripla  $G = (V, S, f)$  dove  $V$  è l'insieme dei vertici,  $S$  è l'insieme degli spigoli e  $f : S \rightarrow V \times V$  è una funzione.

Se  $|W|$  è uguale a 1 abbiamo un cappio cioè uno spigolo che partendo da un vertice torna in esso senza passare per altri vertici (come in figura 1.4 sul vertice  $x_1$ ). Ogni spigolo formato da due vertici distinti e indicato con la coppia ordinata dei suoi vertici si dice diretto o orientato. Un grafo con  $n$  vertici e nessun spigolo si dice nullo e si indica con il simbolo  $\Omega_n$ . Il grafo senza vertici e senza spigoli si dice grafo vuoto.

Gli elementi di uno spigolo si dicono estremi. Due spigoli aventi almeno un vertice in comune si dicono incidenti. Due vertici di  $G$  che sono estremi di uno spigolo di  $G$  si dicono adiacenti. Si noti che in un grafo due vertici adiacenti possono essere estremi di più spigoli. Un grafo privo di cappi e di coppie di spigoli aventi gli stessi estremi abbiamo detto essere un grafo semplice.

Dato un vertice  $x$  di un grafo  $G$ , il numero di spigoli incidenti in  $x$  si dice grado o valenza di  $x$  e si denota con il simbolo  $d(x)$ . Un vertice avente grado zero si dice isolato, un vertice avente grado uno dicesi pendente. Un cappio contribuisce due volte al grado del vertice in cui coincidono i suoi

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

estremi. Ad esempio, nel grafo rappresentato nella figura seguente 1.4, si ha  $d(x_2) = d(x_4) = 2$ ,  $d(x_3) = 3$ ,  $d(x_5) = 1$ ,  $d(x_1) = 4$ .

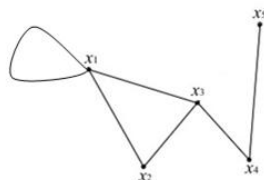


Figura 1.4: Esempio di grafo

Un grafo i cui vertici hanno tutti il medesimo grado  $r$  dicesi regolare di grado  $r$ .

Un grafo si dice completo se è un grafo semplice nel quale ogni vertice è collegato a tutti gli altri vertici. Il grafo completo di  $n$  vertici si denota con  $K_n$ . Un grafo completo con  $n$  vertici è regolare di grado  $n - 1$  e ha  $\frac{n(n-1)}{2}$  spigoli.

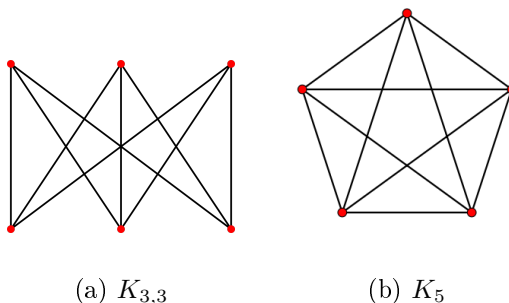
Dati due insiemi non vuoti e disgiunti  $A$  e  $B$ , il grafo  $G = (V, S)$ , dove  $V = A \cup B$  e  $S$  è l'insieme costituito da (tutte) le coppie  $\{x, y\}$ , con  $x \in A$ ,  $y \in B$ , dicesi grafo bipartito (completo) su  $A$  e  $B$ .

Un grafo bipartito completo su due insiemi aventi rispettivamente cardinalità  $m$  ed  $n$  ha  $mn$  spigoli ed è regolare se e solo se  $m = n$ .

Un grafo bipartito completo su due insiemi aventi rispettivamente cardinalità  $m, n$  si denota con il simbolo  $K_{m,n}$ .

Sia  $G = (V, S)$  un grafo. Dato un sottoinsieme  $T$  di  $S$ , il grafo  $H = (V, T)$  dicesi un grafo parziale su  $G$ . Se  $s$  è uno spigolo di  $G$  e  $T = S - \{s\}$ , il grafo parziale  $(V, T)$  si suole denotare con il simbolo  $G - \{s\}$ .

Dato un sottoinsieme non vuoto  $W$  di  $V$  e indicato con  $U$  l'insieme costituito da tutti gli spigoli di  $G$  aventi entrambi gli estremi in  $W$ , il grafo



(a)  $K_{3,3}$

(b)  $K_5$

Figura 1.5: Grafi completi

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

$(W, U)$  dicesi sottografo di  $G$  generato da  $W$ . Nel caso in cui  $|V| > 1$ ,  $x \in V$  e  $W = V - \{x\}$ , il grafo  $(W, U)$  si suole denotare con il simbolo  $G - x$ .

Ad esempio, considerato il grafo  $G$  rappresentato nella figura precedente 1.4 e posto  $W = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ , il sottografo di  $G$  generato da  $W$  coincide con  $G - x_4$  ed è quello rappresentato nella figura seguente 1.6.

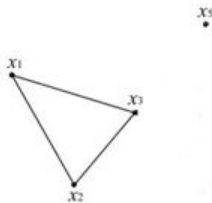


Figura 1.6: Sottografo

### CAMMINI

Dato un grafo  $G$  e due vertici  $x, y$  di  $G$ , una sequenza di vertici  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  e di spigoli  $s_1, s_2, \dots, s_k$  di  $G$  tali che:

$$\begin{aligned} s_1 &\text{ ha come estremi } x_0 \text{ e } x_1 \\ s_2 &\text{ ha come estremi } x_1 \text{ e } x_2 \\ &\dots \\ s_k &\text{ ha come estremi } x_{k-1} \text{ e } x_k \end{aligned}$$

dove  $x_0 = x$ ,  $x_k = y$ , dicesi un cammino o una catena di  $G$  congiungente  $x$  con  $y$ . Il numero  $k$  dicesi lunghezza del cammino. In particolare viene considerato anche il cammino di lunghezza 0.

Se  $x = y$ , il cammino dicesi chiuso, altrimenti dicesi aperto. Se, per ogni coppia di numeri distinti  $i, j$  appartenenti a  $\{0, 1, \dots, k\}$ , di cui almeno uno non coincidente con 0 o con  $k$ , si ha  $x_i \neq x_j$ , il cammino dicesi elementare. Se, per ogni coppia di numeri distinti  $i, j$  appartenenti a  $\{1, 2, \dots, k\}$ , si ha  $s_i \neq s_j$ , il cammino dicesi semplice. Un cammino chiuso elementare dicesi un ciclo.

Ovviamente, ogni cammino elementare è semplice ma non viceversa. Ad esempio, nel grafo rappresentato nella prima figura 1.4, il cammino costituito dalla sequenza di vertici  $x_3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  e dalla sequenza di spigoli  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  è semplice ma non elementare.

Quando non è strettamente necessario, nella descrizione di un cammino, è sufficiente indicare solo i vertici.

Un grafo  $G$  tale che per ogni  $x, y \in V$ , esiste un cammino congiungente  $x$  con  $y$ , dicesi connesso. In tal caso, tra i cammini congiungenti due vertici

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

di  $G$ , ne esiste almeno uno avente lunghezza minima  $h$ : ciascuno di tali cammini dicesi linea geodetica di  $G$  e il numero  $h$  dicesi distanza tra i due vertici considerati.

Dato un grafo  $G$ , introduciamo in  $V$  la seguente relazione:

$$R = \{(x, y) \in V \times V \text{ per cui esiste un cammino di } G \text{ congiungente } x \text{ con } y\}.$$

Si verifica che tale relazione è di equivalenza. L'insieme  $V$  risulta quindi suddiviso in classi, ognuna delle quali contiene un vertice del grafo e tutti quelli che sono raggiungibili da esso.

I sottografi di  $G$  generati da tali classi si dicono componenti connesse di  $G$  e il loro numero dicesi numero di connessione di  $G$ . Ovviamente, un grafo è connesso se e solo se ha una sola componente connessa.

Infine, si verifica che, se  $s$  è uno spigolo di un grafo  $G$  avente  $p$  componenti connesse, il numero di connessione di  $G - s$  è  $p$  o  $p + 1$ : nel secondo caso, lo spigolo  $s$  dicesi un istmo o ponte di  $G$ .

Siano  $G = (V, S)$  un grafo semplice non completo e  $x, y$  vertici distinti non adiacenti di  $G$ . Il grafo semplice ottenuto da  $G$  aggiungendo all'insieme dei suoi spigoli uno spigolo avente per estremi  $x$  e  $y$  si denota con il simbolo  $G + xy$  e l'operatore introdotto dicesi operatore di connessione.

Siano  $G = (V, S)$  un grafo semplice,  $x, y$  vertici distinti di  $G$ . Il grafo ottenuto da  $G$  sostituendo i vertici  $x, y$  con un unico vertice  $z$  e collegando tale vertice con tutti i vertici adiacenti a  $x$  e a  $y$  si denota con il simbolo  $G/xy$  e l'operatore introdotto dicesi operatore di contrazione.

Siano  $G = (V, S)$ ,  $G' = (V', S')$  due grafi semplici. Due applicazioni  $f : V \rightarrow V'$  e  $g : S \rightarrow S'$  tali che, per ogni coppia  $x, y$  di vertici adiacenti di  $G$ ,  $f(x), f(y)$  sono vertici adiacenti di  $G'$ , e per ogni spigolo  $s$  incidente in  $x$  allora anche  $g(s)$  è incidente in  $f(x)$ , la coppia di funzioni  $f$  e  $g$  dicesi omomorfismo. Se  $f$  e  $g$  sono entrambe biettive e le loro inverse sono un omomorfismo, allora la coppia di funzioni  $f$  e  $g$  dicesi un isomorfismo. Due grafi  $G, G'$  tra cui sussiste un isomorfismo diconsi isomorfi e si scrive  $G \cong G'$ . Ad esempio tutti i grafi completi con  $n$  vertici sono isomorfi.

Un grafo  $G$  nell'insieme dei cui spigoli è definita un'applicazione  $f$  a valori nell'insieme dei numeri reali non negativi, dicesi pesato. La mappa  $f$  dicesi peso o costo, e, per ogni spigolo  $s$  del grafo,  $f(s)$  dicesi peso o costo di  $s$ . La somma dei pesi di tutti gli spigoli di un grafo pesato dicesi peso o costo del grafo.

**Teorema 1.** *La somma dei gradi dei vertici di un grafo è uguale al doppio del numero dei suoi spigoli.*

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

*Dimostrazione.* Basta osservare che ogni spigolo, avente esso per estremi due vertici o sia esso un cappio, contribuisce due volte alla somma totale dei gradi dei vertici.  $\square$

**Corollario 1.1.** *In ogni grafo il numero dei vertici di grado dispari è pari.*

*Dimostrazione.* Infatti, se tale numero fosse dispari, anche la somma dei gradi dei vertici del grafo sarebbe un numero dispari.  $\square$

### GRAFO EULERIANO

Sia  $G$  un grafo. Un cammino di  $G$  che percorre tutti gli spigoli di  $G$  una e una sola volta dicesi euleriano. Se  $G$  ha almeno un cammino euleriano,  $G$  dicesi semieuleriano; se  $G$  ha almeno un cammino chiuso euleriano,  $G$  dicesi euleriano. Ovviamente ogni grafo euleriano è semieuleriano.

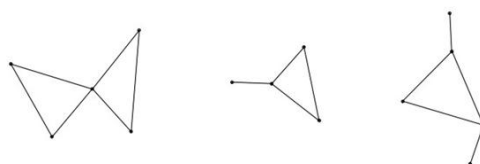


Figura 1.7: Un grafo euleriano, un grafo semieuleriano e un grafo non semieuleriano

**Teorema 2.** *Dato un grafo connesso  $G$ , i seguenti enunciati sono equivalenti:*

- i )  $G$  è euleriano;*
- ii ) Ogni vertice di  $G$  ha grado pari;*
- iii ) Esiste una partizione di  $S$  in cicli.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione sarà fatta in tre passi:  $i \Rightarrow ii$ ;  $ii \Rightarrow iii$ ;  $iii \Rightarrow i$ , considerando sia il caso di un grafo ad un unico vertice sia il caso di grafi con almeno due vertici. Assumiamo che il grafo formato da un unico vertice soddisfi tutte e tre le condizioni.

$i \Rightarrow ii$  ) Per ipotesi,  $G$  ha almeno un cammino chiuso euleriano, e, poichè  $G$  è connesso, tale cammino chiuso attraversa tutti i vertici di  $G$ . Dato che il cammino chiuso percorre tutti gli spigoli di  $G$  una e una sola volta, il grado di ogni vertice è un numero pari; infatti se entriamo in un vertice attraverso uno spigolo, l'unico modo di uscirne è di passare per un altro spigolo diverso da quello in cui siamo entrati. Se facciamo lo stesso ragionamento per ogni spigolo otterremo che ogni vertice ha grado pari per permetterci di entrare ed uscire dal vertice.

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

*ii*  $\Rightarrow$  *iii* ) Per ipotesi, ogni vertice di  $G$  ha grado pari.

Ragioniamo per induzione sul numero  $m = |S|$  degli spigoli di  $G$ . Se  $m = 0$ , poichè  $G$  è connesso,  $G$  è il grafo vuoto oppure è costituito da un solo punto. Su entrambi i casi  $G$  ammette la decomposizione nota. Sia  $m > 0$  e assumiamo l'ipotesi induttiva che l'implicazione valga per ogni  $m' < m$ . Sia  $G$  il grafo con  $m$  spigoli. Se  $G$  fosse aciclico, esso sarebbe, per definizione, un albero (un grafo connesso e privo di cicli), e, essendo noto che, ogni albero con almeno due vertici ha almeno due vertici pendenti,  $G$  avrebbe almeno un vertice di grado uno [11, pag. 138], il che è escluso dall'ipotesi. Quindi  $G$  ha almeno un ciclo  $\sigma$ .

Sia  $G'$  il grafo ottenuto da  $G$  sopprimendo tutti gli spigoli di  $\sigma$ . Naturalmente il numero  $m'$  degli spigoli di  $G'$  è minore di  $m$ . Allora ogni vertice di  $G'$  ha grado pari e lo stesso vale per ogni componente connessa  $C$  di  $G'$ . Per l'ipotesi induttiva, ciascuna componente connessa  $C$  di  $G'$ , ammette una partizione dell'insieme dei suoi spigoli in cicli. Quindi se  $S'$  è l'insieme degli spigoli di  $G'$  si avrà una partizione in cicli  $S' = \sigma_1 \cup \sigma_2 \dots \sigma_k$ . Se ne conclude che anche  $S$  ammette una partizione in cicli e precisamente  $S = \sigma \cup \sigma_1 \cup \sigma_2 \dots \sigma_k$ .

*iii*  $\Rightarrow$  *i* )  $G$  è un grafo connesso che ammette una partizione in cicli. Procediamo per induzione sul numero  $k$  dei cicli di  $G$ . Se  $k \leq 1$  allora  $G$  è ovviamente euleriano. Sia  $k > 1$  e ammettiamo che l'implicazione valga per ogni  $k' < k$ . Ora sia  $G$  un grafo con  $k$  cicli, sia  $\sigma$  uno dei  $k$  cicli della partizione. Sia  $G'$  il sottografo ottenuto da  $G$  togliendo tutti gli spigoli di  $\sigma$  e i vertici che restano isolati. Allora  $G'$  ammette una partizione in  $k' = k - 1$  cicli. In  $G'$  vale l'ipotesi induttiva dunque, partendo da un vertice qualsiasi e dunque anche da un vertice  $x$  in comune con  $\sigma$  (che esiste per la connessione di  $G$ ), abbiamo un cammino chiuso euleriano  $T$  che percorre tutti gli spigoli di  $G'$ . Allora, partendo da  $x$ , percorrendo il ciclo  $\sigma$ , tornando in  $x$  e percorrendo il cammino chiuso  $T$ , otteniamo un cammino chiuso euleriano per  $G$ .  $\square$

**Teorema 3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo connesso  $G$ , sia semieuleriano è che esistano almeno  $|V| - 2$  vertici di  $G$  aventi grado pari.*

*Dimostrazione.* Condizione necessaria. Per ipotesi, esiste un cammino euleriano  $\pi$  congiungente due vertici  $x, y$  di  $G$ . Se  $x = y$ ,  $G$  è euleriano, e quindi, in virtù del teorema precedente, tutti i suoi vertici hanno grado pari. Se  $x \neq y$ , si consideri il grafo  $G'$  ottenuto da  $G$  aggiungendo ai suoi spigoli uno spigolo avente per estremi  $x$  e  $y$ . Il cammino costituito da  $\pi$  e da tale spigolo costituisce un cammino chiuso euleriano di  $G'$ , e quindi, per il teorema precedente, tutti i vertici di  $G'$  hanno grado pari. Il grado dei vertici di  $G'$

## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

distinti da  $x$  e  $y$  è uguale ovviamente al grado degli stessi quali vertici di  $G$ , e quindi esistono almeno  $|V| - 2$  vertici di  $G$  aventi grado pari.

Condizione sufficiente. Per il corollario del teorema 1, il numero dei vertici di  $G$  aventi grado pari non può essere  $|V| - 1$ , e quindi i vertici di  $G$  aventi grado pari sono  $|V|$  o  $|V| - 2$ . Nel primo caso, in virtù del teorema 1,  $G$  è euleriano, e quindi semieuleriano. Nel secondo caso, detti  $x, y$  i vertici di  $G$  aventi grado dispari e considerato il grafo  $G'$  ottenuto da  $G$  aggiungendo ai suoi spigoli uno spigolo avente per estremi  $x$  e  $y$ , tutti i vertici di  $G'$  hanno grado pari, cosicché, per il teorema precedente,  $G'$  è euleriano. Esiste quindi un cammino chiuso euleriano di  $G'$ , e dunque un cammino euleriano di  $G$ .  $\square$

### ALGORITMO PER LA COSTRUZIONE DI UN CAMMINO CHIUSO EULERIANO

Sia  $G$  un grafo euleriano connesso avente  $m$  spigoli. Per costruire un cammino chiuso euleriano di  $G$  si può utilizzare il seguente algoritmo:

```
 $i \leftarrow 1;$   
 $x_i \leftarrow$  arbitrario vertice di  $G$ ;  
 $G_i \leftarrow G$ ;  
while ( $i \leq m$ ) do  
     $s_i \leftarrow$  l'unico spigolo incidente in  $x_i$ , o, se ne esiste più di uno, uno  
    spigolo incidente in  $x_i$  tra quelli che non sono un istmo per  $G_i$ ;  
     $i \leftarrow i + 1$ ;  
     $x_i \leftarrow$  estremo di  $s_{i-1}$  distinto da  $x_{i-1}$ ;  
     $G_i \leftarrow$  grafo ottenuto da  $G_{i-1}$  sopprimendo lo spigolo  $s_{i-1}$  e tutti gli  
    eventuali vertici isolati;  
end while;  
output  $\rightarrow$  Cammino chiuso euleriano  $\{x_1, x_2, \dots, x_m, x_1\}, \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ .
```

**Teorema 4.** *L'algoritmo su esposto restituisce un cammino chiuso euleriano di  $G$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrare il teorema, basta provare l'esistenza di  $s_i$  per l'intero ciclo (cioè fino a quando  $i = m$ ).

Consideriamo per prima cosa che  $G_i$  è sempre euleriano o semieuleriano. Se esso è euleriano non contiene istmi, altrimenti il grado dei vertici non potrebbe essere per tutti pari, e quindi  $s_i$  esiste sempre e si riesce a trovare il cammino euleriano chiuso. Se  $G_i$  è semieuleriano in esso ci sono al più 2



## 1.1 I SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

---

istmi uscenti da  $x_i$  (in quanto se ce ne fossero 3 non saremmo partiti da un grafo  $G$  euleriano e il grafo  $G_i$  non sarebbe semieuleriano) ma uno dei due è già stato attraversato dal nostro percorso e quindi ci troviamo nel caso in cui lo spigolo incidente nel vertice è sì un istmo, ma è anche l'unico uscente da quel vertice; anche in questo caso  $s_i$  è sempre determinabile.  $\square$

### 1.1.3 Concludendo

Il problema dei sette ponti di Königsberg può essere riformulato, sotto l'ottica della teoria dei grafi, come:

*cerchiamo un ciclo euleriano su un grafo semplice (quindi non orientato) formato da 4 nodi e 7 spigoli, grado dei nodi  $A, B$  e  $D$  pari a 3 e grado del nodo  $C$  pari a 5.*

Diciamo inoltre che non solo non è possibile un ciclo euleriano sul nostro grafo ma non è possibile neppure un cammino euleriano in quanto il grado di tutti e quattro i nodi è dispari e questo, utilizzando il teorema 2, ci porta a tale conclusione.

## 1.2 ICOSIAN GAME

### 1.2.1 Il problema

Il signor A., in viaggio in una splendida zona dell'Italia, vuole visitare tutti i paesini arroccati della zona; a conclusione del suo tour vorrebbe ritornare nell'albergo in cui si trova quando parte. Si mette così a tavolino con la cartina dinanzi e cerca di fare un itinerario. La disposizione dei paesi si presenta così ai suoi occhi (figura 1.8)

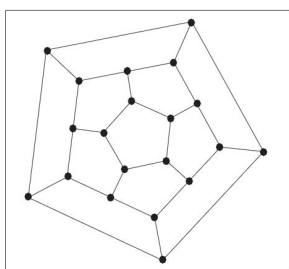


Figura 1.8: Cartina

Ovviamente tutti i puntini neri sono i paesi, mentre le linee sono le strade che li collegano. Al signor A. non interessa percorrere tutte le strade o percorrere delle strade in particolare ma vuole raggiungere tutti i paesi; inoltre non gradisce passare più di una volta per lo stesso paese.

Questo problema è stato presentato per la prima volta, con il nome di *Icosian game*, nel 1857 dal matematico irlandese Sir William Rowan Hamilton, a Dublino ad una riunione della British Association for the Advancement of Science.

Il gioco consisteva nel trovare un percorso che toccasse tutti i vertici di un icosaedro, passando lungo gli spigoli, ma senza mai percorrere due volte lo stesso spigolo. Come si può vedere nella figura seguente 1.9, l'icosaedro ha 12 vertici, 30 spigoli e 20 facce identiche a forma di triangolo equilatero.

Il gioco, venduto alla ditta J. Jacques and Sons per 25 sterline, fu brevettato a Londra nel 1859, ma vendette pochissimo. In realtà il gioco vero e proprio fu modificato e il poliedro fu sostituito da un grafo planare isomorfo al grafo costituito dagli spigoli del dodecaedro.

Questo gioco è una versione particolare del problema del commesso viaggiatore, in inglese Traveling Salesman Problem o TSP, che rappresenta uno dei casi di studio più rilevanti dell'informatica teorica e della teoria della complessità. Il nome nasce dalla sua tipica formulazione: data una rete di

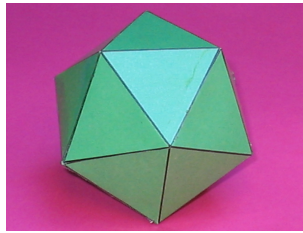


Figura 1.9: Icosaedro



Figura 1.10: The Icosian Game

città, connesse da strade, si tratta di determinare il percorso di minima distanza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una e una sola volta.

Un'alternativa simile a questo gioco è lo studio delle mosse del cavallo nel gioco degli scacchi su scacchiere di varie dimensioni. Si potrebbe chiedere infatti se sia possibile, per il cavallo, occupare tutte le caselle di una scacchiera  $n \times n$  ciascuna esattamente una volta prima di ritornare sulla stessa casella da cui si è partiti.

### 1.2.2 Parliamo di grafo hamiltoniani

#### GRAFI HAMILTONIANI

Sia  $G$  un grafo. Un cammino di  $G$  che attraversa tutti i vertici di  $G$  una e una sola volta dicesi hamiltoniano. Se  $G$  ha almeno un cammino hamiltoniano,  $G$  dicesi semihamiltoniano; se  $G$  ha almeno un ciclo hamiltoniano,  $G$  dicesi hamiltoniano. Ovviamente ogni grafo hamiltoniano è semihamiltoniano.

*Osservazione 1.* È chiaro che, nella ricerca di eventuali cammini o cicli hamiltoniani di un dato grafo, non ha alcuna rilevanza il fatto che esso sia semplice

## 1.2 ICOSIAN GAME

---

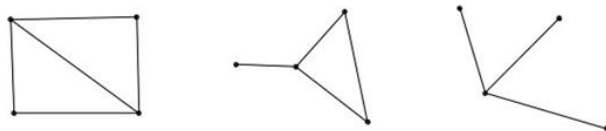


Figura 1.11: Un grafo hamiltoniano, un grafo semihamiltoniano, un grafo non semihamiltoniano.

o no. Possiamo quindi supporre, senza ledere in alcun modo la generalità di quanto esporremo, di studiare grafi semplici.

*Osservazione 2.* Tutti i grafi completi  $K_n$ , con  $n \geq 3$ , sono hamiltoniani. Invece non tutti i grafi  $K_{m,n}$  sono hamiltoniani: ad esempio,  $K_{2,2}$  e  $K_{3,3}$  sono hamiltoniani, mentre  $K_{1,3}$  e  $K_{2,3}$  non lo sono.

*Osservazione 3.* I concetti di grafi euleriani e hamiltoniani sono indipendenti. Infatti, ad esempio, il primo dei grafi rappresentati nella figura 1.11 è euleriano ma non semihamiltoniano,  $K_4$  è hamiltoniano ma non semieuleriano.

*Osservazione 4.* I teoremi del paragrafo precedente costituiscono importanti caratterizzazioni di grafi euleriani e semieuleriani, ed è ragionevole attendersi che esistano criteri analoghi per i grafi hamiltoniani. Invece, la ricerca di simili caratterizzazioni per i grafi hamiltoniani presenta, a dispetto della apparente somiglianza, difficoltà profondamente diverse. Infatti, per decidere se un grafo è euleriano, è sufficiente esaminare il grado dei suoi vertici, mentre la caratterizzazione dei grafi hamiltoniani costituisce uno dei problemi aperti più rilevanti della matematica discreta.

**Teorema 5** (Bondy–Chvátal, 1976). *Indichiamo con  $n$  il numero di vertici. Siano  $G$  un grafo semplice con  $n > 3$ ,  $x, y$  vertici non adiacenti di  $G$  tali che  $d(x) + d(y) \geq n$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $G$  sia hamiltoniano è che  $G + xy$  sia hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* La condizione necessaria è immediata. Condizione sufficiente. Si supponga, per assurdo, che  $G$  non abbia un ciclo hamiltoniano. Il grafo  $G + xy$  ha un ciclo hamiltoniano che ovviamente comprende lo spigolo  $xy$  avente per estremi  $x$  e  $y$  e che è quindi individuato da una sequenza di vertici del tipo  $\{x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x\}$ . Sia quindi  $n > 3$  e si osservi che, per ogni  $i \in \{2, \dots, n-2\}$  per cui  $y$  e  $a_i$  sono adiacenti,  $x$  e  $a_{i-1}$  non possono essere adiacenti, perchè, in caso contrario, il cammino individuato dalla sequenza di vertici  $\{y, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}, x, a_{i-1}, \dots, a_1, y\}$  sarebbe un ciclo hamiltoniano di  $G$ . Detto quindi  $p$  il numero dei vertici dell'insieme  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}$  che sono adiacenti a  $y$ , tra essi ne esistono almeno  $p-1$  che non sono adiacenti

a  $x$ , cosicché  $d(x) + d(y) \leq n - 2 - (p - 1) + p = n - 1$ , il che è contro l'ipotesi.  $\square$

### CHIUSURA DI UN GRAFO

Sia  $G$  un grafo semplice con  $n \geq 2$  vertici. Si consideri il seguente algoritmo:

```

while ( $G$  ha due vertici non adiacenti  $x, y$  tali che  $d(x) + d(y) \geq n$ ) do
     $G \leftarrow G + xy$ ;
end while;
output  $\rightarrow$  Grafo  $G$ .
    
```

Si verifica facilmente che l'algoritmo restituisce un grafo semplice che è indipendente dalla scelta della coppia di vertici operata all'interno del ciclo while: tale grafo dicesi chiusura di  $G$  e si denota  $c(G)$ .

**Teorema 6** (Bondy–Chvátal, 1976). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo semplice  $G$  avente  $n \geq 3$  vertici sia hamiltoniano è che il grafo  $c(G)$  sia hamiltoniano.*

**Corollario 6.1.** *Un grafo semplice  $G$  con  $n \geq 3$  vertici e avente chiusura completa è hamiltoniano.*

**Teorema 7** (Ore, 1960). *Un grafo semplice  $G$  con  $n \geq 3$  vertici e tale che, per ogni coppia  $x, y$  di suoi vertici non adiacenti,  $d(x) + d(y) \geq n$ , è hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* Infatti, come si verifica facilmente,  $c(G)$  è completo, e quindi, per il corollario precedente,  $G$  è hamiltoniano.  $\square$

*Osservazione 5.* I due enunciati precedenti non costituiscono caratterizzazioni dei grafi hamiltoniani. Infatti, ad esempio,  $Z_5$  è hamiltoniano, ma la somma dei gradi di due suoi qualsiasi vertici è 4; inoltre,  $c(Z_5) = Z_5$  non è un grafo completo.

*Osservazione 6.* Il teorema 6 dà una condizione sufficiente che richiede ipotesi meno restrittive del teorema di Ore.

**Teorema 8** (Dirac, 1952). *Un grafo semplice  $G$  con  $n \geq 3$  vertici e tale che ogni suo vertice ha grado non inferiore a  $n/2$ , è hamiltoniano.*

*Dimostrazione.* Infatti, per ogni coppia di vertici  $x, y$  di  $G$ , si ha  $d(x) + d(y) \geq n$ , e quindi, per il teorema di Ore, si ha la tesi.

[11, pag. 134]  $\square$

## 1.2 ICOSIAN GAME

---

### 1.2.3 Concludendo

Riformulando i nostri tre problemi, essi chiedevano:

*Icosian game* - trovare un ciclo hamiltoniano nel diagramma di Schlegel. Il diagramma di Schlegel di un poliedro nello spazio è un diagramma nel piano, ottenuto proiettando il poliedro sul piano. Il diagramma è in realtà un grafo, con vertici e spigoli.

*TSP* - dato un grafo completo pesato, determinare il ciclo hamiltoniano avente peso minimo;

*Scacchiera* - trovare un cammino hamiltoniano che visiti tutti gli spigoli del grafo rappresentati sulle caselle della scacchiera dalle mosse del cavallo.

Nel caso dell'icosian game il problema è risolubile.

Nel problema del commesso viaggiatore c'è per prima cosa da fare una precisazione. Si richiede di determinare il ciclo dato un grafo completo pesato. Il commesso viaggiatore non può non consegnare il materiale e dovrà comunque andare in tutte le città a costo di non "rispettare le regole" e ripassare più volte per le stesse strade o le stesse città. Si considera per questo motivo il grafo completo, piuttosto che il grafo reale, assegnando a quelle strade che si aggiungono un opportuno peso, come si può vedere nell'immagine 1.12.

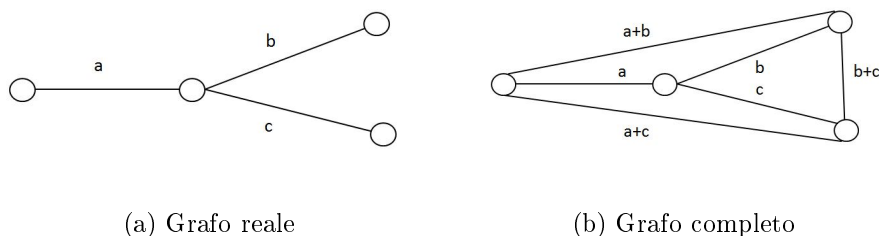


Figura 1.12: TSP

Per questo problema non abbiamo un algoritmo efficiente, ma solo un algoritmo che ci permette di analizzare per ogni singolo caso se il ciclo è possibile oppure no elencando tutti i cammini. Tuttavia, la complessità dell'operazione la rende impraticabile per grafi di dimensioni comuni nei problemi reali: ad esempio, in un grafo con  $n$  nodi, bisognerà calcolare, nel caso peggiore in cui ogni nodo è connesso con tutti gli altri,  $n!$  possibili cammini.

Nel caso invece della scacchiera definiamo preliminarmente  $G_n$ ; esso è il grafo che ha come vertici le  $n^2$  caselle di una scacchiera di lato  $n$  e per spigoli tutte le possibili mosse del cavallo da un dato vertice all'altro.

**Teorema 9.**  $G_n$  contiene un ciclo hamiltoniano  $\Leftrightarrow n \geq 6$  con  $n$  pari.

*Dimostrazione.* Per  $n \leq 4$  il grafo non conterrà mai un ciclo. Per  $n = 1$  e  $n = 2$  il cavallo resta fermo, per  $n = 3$  la casella centrale non è mai raggiungibile con alcuna mossa o se la prima posizione del cavallo è la casella centrale, esso resta fermo, per  $n = 4$  dall'elencazione di tutti i possibili cammini si vede che una casella rimane sempre esclusa. (figura 1.13)

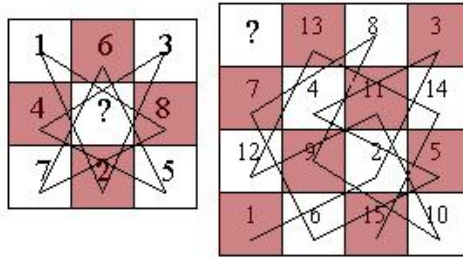


Figura 1.13: Scacchiere 3x3 e 4x4

Notiamo comunque che il cavallo si muove sempre da una casella bianca ad una nera e viceversa. Osserviamo che data una sequenza alternata di caselle bianche e nere come in figura 1.14, sarà possibile costruire un ciclo hamiltoniano che le contenga tutte e alternativamente, una bianca ed una nera, solo nel caso in cui il loro numero sia pari, perchè se fosse altrimenti, verrebbero ad essere adiacenti due caselle dello stesso colore contraddicendo le ipotesi.

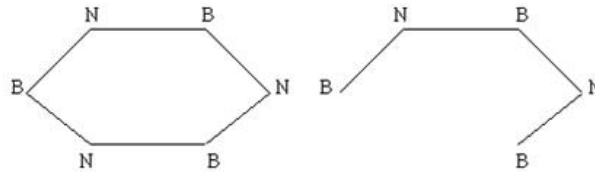


Figura 1.14: Sequenza bianco - nera

Il corollario è infatti provato solo per  $n \geq 6$  e pari. □

**Teorema 10.** Il cavallo, saltando su una scacchiera  $n \times n$ , può occupare tutte le caselle ciascuna esattamente una volta descrivendo un cammino hamiltoniano  $\Leftrightarrow n \geq 5$ .

È stato anche determinato il numero dei possibili cicli hamiltoniani descritti da un cavallo mosso su di una scacchiera  $n \times n$  con  $n$  pari. Il numero richiesto è ovviamente uguale a 0 per  $n = 2$  ed  $n = 4$ , pari invece a 9862

## 1.2 ICOSIAN GAME

---

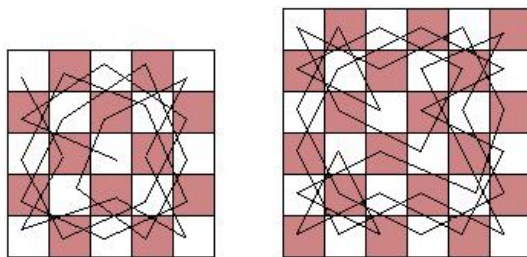


Figura 1.15: Esempi del Teorema 9

per  $n = 6$ . Per  $n = 8$  il miglior limite inferiore trovato (risultato dovuto a Kraitchik nel 1953) è pari a 122802512. In realtà sembra impossibile poter determinare il numero richiesto per  $n$  in generale. Grazie alle ricerche condotte nel 1997 da Kyek, Parberry e Wegener possiamo conoscere un limite superiore trovato per il particolare caso  $n = 8$  che viene stimato in  $3.019 \times 10^{22}$  possibilità.



### 1.3 IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DEI TRE SERVIZI

#### 1.3.1 Il problema

Tre acerrimi nemici hanno tre case vicine ed hanno contemporaneamente la necessità di dover allacciare le loro abitazioni alle forniture di energia elettrica, gas ed acqua. Per evitare qualsiasi discussione esigono che nessuna delle connessioni si intersechi in alcun punto con quelle degli altri due.

(sarà comunque possibile cambiare la disposizione delle case e dei servizi)



Figura 1.16: Problema delle tre case e dei tre servizi

#### 1.3.2 Un po' di topologia

**Teorema 11** (della curva di Jordan). *Sia  $c$  una curva semplice chiusa (una curva di Jordan) nel piano  $R^2$ . Allora il complemento nel piano dell'immagine di  $c$  consiste in due distinte componenti connesse. Una di queste componenti è limitata (la parte interna) e l'altra è illimitata (la parte esterna). Inoltre  $c$  è la frontiera di entrambe le componenti. [9]*

*Dimostrazione.* (nel caso in cui la curva  $c$  è un poligono chiuso  $P$ )  
[6, pag. 335]

Faremo vedere che i punti del piano che non si trovano su  $c$  si dividono in due classi,  $A$  e  $B$ , tali che due punti della stessa classe possono essere congiunti da una poligonale che non attraversi  $P$ , mentre ogni cammino congiungente un punto di  $A$  e un punto di  $B$  deve attraversare  $P$ . Indicheremo con la classe  $A$  l'insieme dei punti esterni, mentre con la classe  $B$  l'insieme dei punti interni.

Cominciamo la dimostrazione scegliendo nel piano una direzione fissata non parallela ad alcuno dei lati di  $P$  e su di essa un determinato verso. Questo sarà sempre possibile, perchè  $P$  ha soltanto un numero finito di lati. Definiamo ora le classi  $A$  e  $B$  come segue: il punto  $p$  appartiene ad  $A$  se

### 1.3 IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DEI TRE SERVIZI

la semiretta per  $p$  avente la direzione e il verso assegnati interseca  $P$  in un numero pari,  $0, 2, 4, 6, \dots$ , di punti; il punto  $p$  appartiene a  $B$  se la semiretta per  $p$  avente la direzione e il verso assegnati interseca  $P$  in  $n$  numero dispari,  $1, 3, 5, \dots$ , di punti.

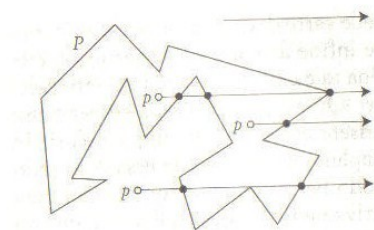


Figura 1.17: Definizione delle classi A e B

Per quanto riguarda le semirette che intersecano  $P$  nei vertici, non conteneremo l'intersezione nel vertice quando i due lati di  $P$  che in esso si incontrano sono dalla stessa parte della semiretta, ma conteneremo l'intersezione quando i due lati sono da parti opposte della semiretta.

Diremo che due punti  $p$  e  $q$  hanno la stessa parità, quando appartengono alla stessa classe  $A$  o  $B$ .

Prima di tutto osserviamo che tutti i punti di uno stesso segmento che non intersechino  $P$  hanno la stessa parità. Infatti la parità di un certo punto  $p$  che si muove lungo tali segmenti, può cambiare soltanto quando la semiretta per  $p$  nella direzione e nel verso fissati passa per un vertice di  $P$ ; ma in nessuno dei due casi possibili la parità potrà effettivamente mutare. Infatti se l'angolo, formato dai due spigoli incidenti sul vertice, è ottuso le semirette intersecano  $P$  in un unico punto sopra e sotto il vertice; mentre se l'angolo è acuto la parità continua a restare immutata poiché le semirette possono intersecare o in due punti  $P$  o non intersecarla per niente. L'angolo retto non è preso in considerazione, grazie alla convenzione fissata.

Da ciò segue che se un punto  $p_1$  di  $A$  è congiunto a un punto  $p_2$  di  $B$  da un cammino poligonale, questo deve intersecare  $P$ , poiché altrimenti la parità di tutti i punti della spezzata, e in particolare di  $p_1$  e  $p_2$ , sarebbe la stessa. Si può inoltre dimostrare che due punti della stessa classe  $A$  o  $B$  possono sempre essere collegati da un cammino poligonale che non intersechi  $P$ .

Indicheremo i due punti con  $p$  e  $q$ . Se il segmento  $pq$  che congiunge  $p$  e  $q$  non interseca  $P$  esso è il cammino desiderato. Altrimenti sia  $p'$  il primo dei punti di intersezione con  $P$ , e  $q'$  l'ultimo di tali punti percorrendo il segmento da  $p$  a  $q$  (come in figura 1.18).

### 1.3 IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DEI TRE SERVIZI

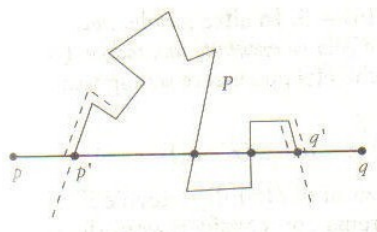


Figura 1.18: Definizione dei punti  $p$  e  $q$

Costruiamo la spezzata partendo da  $p$  lungo la spezzata  $pp'$ , girando poco prima di  $p'$  e seguendo  $P$  a poca distanza finché esso ritorna su  $pq$  in  $q'$ . Se si riesce a dimostrare che questo cammino interseca  $pq$  tra  $q'$  e  $q$ , anziché tra  $p'$  e  $q'$ , risulta anche che si può continuare il cammino fino a  $q$  lungo  $q'q$  senza intersecare  $P$ . È chiaro che due punti abbastanza vicini  $r$  e  $s$ , ma da parti opposte rispetto ad un lato di  $P$ , devono avere parità differente, perchè il numero delle intersezioni della semiretta per  $r$  con  $P$  sarà maggiore di 1 del numero delle intersezioni della semiretta per  $s$ . Si vede così che la parità cambia se si incontra il punto  $q'$  lungo il segmento  $pq$ . Ne segue che la tratteggiata taglia  $pq$  tra  $q'$  e  $q$ , perchè  $p$  e  $q$  (e quindi tutti i punti della tratteggiata) hanno la stessa parità.

La dimostrazione di Jordan per il caso di un poligono  $P$  è così completata. L'esterno di  $P$  può essere ora identificato con la classe  $A$ , poiché, se ci si allontana sufficientemente su una qualsiasi semiretta nella direzione e nel verso fissato, si arriva ad un punto oltre il quale non vi sono intersezioni con  $P$ , cosicché tutti questi punti hanno parità 0 e quindi appartengono ad  $A$ . L'interno di  $P$  rimane dunque identificato con la classe  $B$ . Comunque intrecciato sia il poligono semplice chiuso  $P$ , si può sempre determinare se un dato punto  $p$  del piano sia interno o esterno a  $P$ , tracciando una semiretta e contando il numero di intersezioni con  $P$ . Se questo numero è dispari, il punto  $p$  è imprigionato nell'interno di  $P$ , e non può uscirne senza intersecare  $P$  in un punto. Se il numero è pari, il punto  $p$  è esterno a  $P$ .  $\square$

Esiste una generalizzazione del teorema della curva di Jordan in dimensioni maggiori di 2.

**Teorema 12.** *Sia  $X : S^n \rightarrow R^{n+1}$  una mappa continua e iniettiva allora il complemento in tale spazio di  $X(S^n)$  consiste in due distinte componenti connesse, una delle quali è limitata (la parte interna) e l'altra è illimitata (la parte esterna).  $X(S^n)$  è la frontiera di entrambe le componenti.*

## 1.3 IL PROBLEMA DELLE TRE CASE E DEI TRE SERVIZI

### 1.3.3 Concludendo

Riportiamo il tutto al nostro problema e diamo una ragione dell'impossibilità di soluzione: disponiamo dunque le tre case e i tre servizi come nella figura 1.19 e facciamo i primi 6 collegamenti dei 9 necessari ottenendo così un poligono semplice chiuso che, dal teorema della curva di Jordan, divide il piano in due parti.

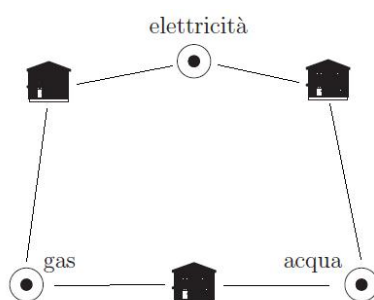


Figura 1.19: Sei dei nove collegamenti

Ora ammettiamo che si aggiunga il settimo collegamento e lo si faccia passare nella zona interna; esso mi avrà bloccato la zona interna e nessun altro collegamento riuscirà a passare in questa zona. Stesso discorso vale per l'ottavo collegamento che passerà per la zona esterna, bloccandola. Non ho modo così di costruire il nono e ultimo collegamento.

Questo accadrà in tutte quelle superfici topologicamente equivalenti ad un piano o ad una sfera  $S^2$  in cui una curva semplice chiusa sconnette la superficie mentre lo stesso problema sarà di facile soluzione su superfici come il toro o il nastro di Moebius.

In realtà il problema delle tre case e dei tre servizi è un problema di grafi bipartiti planari. Un grafo si dice planare se può essere rappresentato nel piano in modo tale che due qualunque suoi spigoli non si intersechino in punti che non siano vertici (per approfondimenti [11, pag. 142]).

Potremmo riformulare il problema chiedendoci se esiste il grafo planare del grafo bipartito completo  $K_{3,3}$ .

Nel 1930 Kuratowski enunciò il seguente:

**Teorema 13.** *Un grafo finito è planare se e solo se non contiene sottografi isomorfi a  $K_5$  e a  $K_{3,3}$*

Torniamo dunque all'impossibilità del nostro problema.

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

### 1.4.1 Il problema

Prendiamo una striscia di carta lunga 20/30 cm e alta circa 5 centimetri, un paio di forbici e dello scotch.

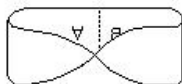
1. Dato il rettangolo di carta



2. Si ruoti di mezzo giro una delle due estremità (ad esempio il lato indicato con A)



3. Si incollino insieme le due estremità.



Abbiamo così ottenuto un nastro di Moebius in modo molto semplice. Suggestisco comunque di costruire un cilindro per un confronto tra le due superfici (un cilindro si ottiene unendo la stessa strisciolina di carta senza la mezza torsione).

Ora la magia sta nel tagliare questa superficie.

Per prima cosa osserviamo che se una formichina si trovasse sulla superficie esterna del cilindro, essa camminando, non riuscirà mai a visitare la parte interna della superficie se la condizione è quella di non attraversare il bordo.

Se la stessa formichina camminasse su un nastro di Moebius essa riuscirebbe a visitare tutta la superficie (sia la parte “interna” che “esterna”) prima di tornare al punto di partenza.

Stesso risultato si otterrà se si pensa di tracciare con un pennarello una linea continua lungo tutta la faccia interna di un cilindro; dopo un giro completo vi ritroverete al punto di partenza avendo descritto una linea chiusa

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

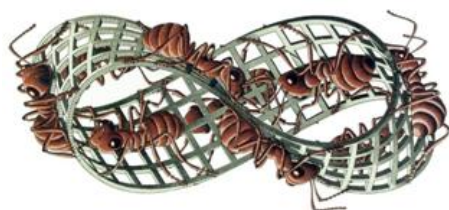


Figura 1.20: Un famoso disegno di Maurits Cornelius Escher, con la processione senza fine delle formiche sulla superficie dell'anello.

che giace interamente sulla faccia interna del cilindro. Se invece tracciate una linea continua lungo tutto in nastro di Moebius, anche in questo caso tornerete al punto di partenza, ma se aprite l'anello vedrete con grande sorpresa che la penna ha percorso interamente entrambe le facce della striscia di carta. La conclusione matematica è che il nastro di Moebius non ha due facce, bensì una sola.

Prendiamo il cilindro e passiamo il nostro dito sul bordo; si vede bene che esso è composto da due circonferenze distinte. Se passiamo il dito sul bordo del nastro, dopo un po' saremo al punto di partenza, avendo però percorso l'intero bordo. La conclusione è che il nastro di Moebius ha un'unica curva come bordo.

Ora prendiamo le nostre forbici e tagliamo nel senso della lunghezza il cilindro esattamente a metà della sua larghezza. Otterremo così due cilindri di altezza la metà.

Ripetiamo la stessa operazione sul nastro di Moebius; otteniamo un'unica superficie con due mezze torsioni. In effetti si tratta di un cilindro.

Ci sono due modi per capire che la superficie ottenuta è realmente un cilindro: i metodi descritti prima (constatare che il bordo è formato da due curve e che le facce sono due), oppure possiamo procedere con la seguente tecnica: facciamo un segno sulla superficie, tagliamo nel senso della larghezza, "togliamo" le torsioni e ricolliamo, aiutandoci con il nostro segno, a far combaciare precisamente i punti che erano vicini prima del taglio; otterremo esattamente il cilindro che avevamo costruito precedentemente.

Se ora tagliamo un cilindro lungo una circonferenza a  $1/3$  dell'altezza otterremo due cilindri, uno di altezza  $1/3$  e l'altro di altezza  $2/3$  rispetto all'altezza del cilindro di partenza; se facciamo la stessa cosa con un nastro di Moebius otterremo un nastro di Moebius allacciato a un cilindro (del tipo di quello che era stato ottenuto nella mossa precedente).

Se tagliamo il nastro di Moebius a una  $1/4$  della sua larghezza quello che otterremo saranno due cilindri intrecciati tra loro; si può ottenere lo

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

stesso effetto tagliando nuovamente a metà il cilindro ottenuto dal nastro di Moebius tagliato ad  $1/2$  della sua larghezza.

### 1.4.2 Nastro di Moebius: oggetto non solo matematico

Il primo ad essere affascinato da questa superficie fu Carl Friedrich Gauss il quale, incuriosito dalla strana figura, ne avrebbe suggerito lo studio a due suoi allievi, August Ferdinand Möbius (1790-1860) e Johann Benedict Listing. La paternità dell'oggetto spetterebbe a Listing, che è stato il primo a pubblicare un articolo sull'argomento, e per i matematici, ieri come oggi, vale la regola che il riconoscimento di una scoperta vada a chi per primo presenta una pubblicazione al riguardo. Moebius è invece il matematico che ne approfondì lo studio, lasciando però soltanto degli appunti nel suo studio, ritrovati dopo la sua morte. Moebius scrive di aver scoperto il nastro quando aveva 68 anni, nel 1858.

Le superfici di Moebius hanno spinto la fantasia a soluzioni limite come quella di un treno impazzito che scompare girando all'infinito e senza ritorno. Negli anni '50 l'astronomo americano A.J. Deutsch imposta nel libro "A subway called Moebius" una personale rielaborazione delle teorie del matematico tedesco Moebius che per primo considerò le proprietà delle superfici geometriche definite non orientabili.

Nel 1996 il regista argentino Gustavo Mosquera traspone in pellicola il racconto di Deutsch nel film "Moebius". Il racconto viene adattato per il cinema da vari autori, fra cui il regista stesso, ed ambientato a Buenos Aires dove il protagonista, viene incaricato di ritrovare un professore scomparso dopo essere salito su un treno metropolitano partito alla volta di un percorso senza ritorno su una rotaia che trae spunto proprio dalla superficie del nastro di Moebius.

Anche Carole Berger in "Una coppia chiamata Moebius", affascinato dalla trasposizione matematica, si lascia andare alla fantasia in versi stupendi: *Quando un uomo e una donna si uniscono nell'amore, esiste una potenzialità infinita di rapporti, che come la striscia di Moebius, non hanno fine e non hanno principio.*

Anche i maghi, usano i nastri di Moebius per i loro trucchi. Ce lo racconta Clifford A. Pickover nell'introduzione al suo libro *Il nastro di Möbius*:

*Quando frequentavo la terza classe fui invitato alla festa di compleanno di un vicino dove era prevista l'esibizione di un mago. Questi, che aveva un alto cappello nero, mi diede una striscia che sembrava avesse ottenuto unendo insieme le estremità di vari*

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

*nastri lucenti per formare un lungo anello. Di questi anelli ne aveva tre: uno rosso, uno blu e uno viola. Il nome del mago era Mister Magic, molto originale! Mister Magic sorrideva mentre disegnava una lunga linea nera a metà di ciascuna delle lunghe strisce, come la linea tratteggiata che separa le carreggiate di una strada, poi mostrò le strisce agli spettatori. Un bambino le afferrò, ma Mister Magic disse “Abbi pazienza!”*

*Io ero un bambino timido ed educato. Mister Magic doveva averlo capito e mi porse un paio di forbici. Giovanotto, taglia la striscia lungo la linea disse indicandomi la linea tratteggiata su una delle strisce. Ero eccitato e andai avanti a tagliare fino a quando raggiunsi il punto da cui ero partito. La banda rossa si divise formando due anelli completamente separati. Forte! dissi, ma in realtà non ero molto impressionato. Mi stavo ancora chiedendo che cosa era successo.*

*“Ora taglia anche gli altri due.”*

*Acconsentii. Dopo aver tagliato la striscia blu mi trovai con un unico nastro lungo il doppio dell'originale. Qualcuno applaudì. Il mago mi porse l'ultima striscia quella color viola. La tagliai e ottenni due anelli intrecciati, come gli anelli di una catena. Ciascun colore si era comportato in maniera del tutto differente e questo era davvero fantastico! Le strisce avevano proprietà del tutto diverse, benché a me fossero sembrate identiche. Alcuni anni più tardi, un amico mi svelò il misterioso trucco. Le strisce rossa, blu e viola erano state create in maniera diversa quando le estremità dei nastri erano state incollate.*

*L'anello del nastro rosso era la famosa striscia di Moebius ottenuta ruotando di  $180^\circ$ , una rispetto all'altra, le due estremità del nastro prima di unirle insieme. Si tratta di una tipica mezza torsione. L'anello viola era ottenuto ruotando di  $360^\circ$  un'estremità rispetto all'altra prima di saldarle tra loro.*

*Attualmente questo gioco di prestigio viene chiamato trucco delle bande afgane, anche se non sono sicuro dell'origine del nome. So che il trucco che portava questo nome risale all'incirca al 1904.*

### 1.4.3 Topologia del nastro

**Definizione 5.** Sia  $X$  un insieme non vuoto. Una struttura topologica, o topologia, su  $X$  è una famiglia non vuota  $T$  di sottoinsiemi di  $X$ , che si



## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

chiamano insiemi aperti della topologia, soddisfacenti le seguenti condizioni:

- $\emptyset$  e  $X$  sono insiemi aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un insieme aperto.

Uno spazio topologico è un insieme  $X$  su cui sia assegnata una topologia  $T$ , e si denota  $(X, T)$ , o semplicemente  $X$  sottintendendo la topologia  $T$  per comodità di notazione. Gli elementi di  $X$  si diranno punti. L'insieme  $X$  si dice supporto dello spazio topologico  $(X, T)$

**Definizione 6.** Uno spazio metrico è un insieme non vuoto  $X$  su cui sia definita una distanza, cioè un'applicazione

$$d : X \times X \rightarrow R$$

tale che per ogni  $x, x', x'' \in X$

$$d(x, x') \geq 0 \text{ e } d(x, x') = 0 \text{ se e solo se } x = x';$$

$$d(x, x') = d(x', x);$$

$$d(x, x') + d(x', x'') \geq d(x, x'') \text{ (disuguaglianza triangolare) ;}$$

Quindi uno spazio metrico è una coppia  $(X, d)$ : distanze diverse sullo stesso insieme  $X$  definiscono spazi metrici diversi.

**Definizione 7.** Dato  $X$  spazio metrico su cui è definita la distanza  $d$  si definisce boccia aperta  $B(x, \varepsilon)$  l'insieme  $\{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$ .

**Definizione 8.** Se  $X$  è uno spazio metrico con una distanza  $d$  diciamo che  $A \subset X$  è aperto se  $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subset A$ .

La famiglia degli insiemi aperti così definiti è una topologia su  $X$  che si dice *indotta da  $d$* .

La topologia euclidea (o topologia naturale) su  $R^n$  è la topologia  $\xi$  indotta dalla distanza euclidea  $d$ .

Uno spazio topologico si dice *metrizzabile* se esiste su  $X$  una distanza che induce la topologia  $T$ .

Il concetto di continuità di una funzione  $f : R \rightarrow R$  dove  $R$  è la retta reale, si esprime mediante quello di distanza:

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

**Definizione 9.**  $f$  si dice continua se  $\forall x \in R$  e  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta_{\varepsilon, x} > 0$  tale che

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

per ogni  $y$  tale che  $|y - x| < \delta_{\varepsilon, x}$ .

Si può estendere la nozione di continuità a funzioni  $f : R^n \rightarrow R^m$  semplicemente sostituendo il modulo di un numero reale con il modulo di un vettore. Più in generale è possibile introdurre il concetto di continuità di applicazioni tra spazi metrici come segue:

**Definizione 10.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi metrici con  $d$  e  $d'$  le loro relative distanze.  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  si dice continua se  $\forall x_0$  e  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_{x_0, \varepsilon}$  tale che  $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$

**Definizione 11.** L'applicazione  $f : X \rightarrow Y$  si dice un omeomorfismo oppure un'equivalenza topologica se  $f$  è continua, biunivoca, e se l'inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  è continua.

**Definizione 12.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici.  $f : X \rightarrow Y$  si dice continua se  $\forall A$  aperto in  $Y$  allora  $f^{-1}(A)$  è un aperto in  $X$ .

**Definizione 13.** Due spazi topologici si dicono omeomorfi, oppure topologicamente equivalenti, e si scrive  $X \cong Y$ , se esiste un omeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ .

Le tre proprietà seguenti sono ovvie:

- l'identità di uno spazio in sè è un omeomorfismo;
- se  $f : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo, anche  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  è un omeomorfismo;
- $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  sono omeomorfismi, la composizione  $f \circ g : X \rightarrow Z$  è un omeomorfismo.

Da queste proprietà segue che l'equivalenza topologica è una relazione di equivalenza tra spazi topologici.

Una proprietà che, una volta posseduta da uno spazio  $X$ , è anche posseduta da uno spazio omeomorfo a  $X$ , si dice proprietà topologica. Ogni proprietà che si definisce solo in termini di insiemi aperti o chiusi e di applicazioni continue è una proprietà topologica.

Una superficie in uno spazio euclideo tridimensionale (dotato di un sistema di assi cartesiani  $x, y, z$ ), può essere definita in modo intrinseco. Considerando l'intorno di ogni punto  $x$  della superficie, esso è localmente omeomorfo ad una boccia aperta del piano (o a una semiboccia del semipiano,

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

considerando la presenza del bordo della superficie). Ciò significa che la geometria delle superfici non presenta particolarità al livello locale ma si hanno delle proprietà al livello globale (una delle più semplici è l'orientabilità). Per una trattazione più completa vedi [16]

**Definizione 14.** Una mappa  $f : A \rightarrow B$  tra due spazi topologici  $A$  e  $B$  è una immersione topologica se è un omeomorfismo tra  $A$  e  $f(A)$ , ovvero se è iniettiva e bicontinua.

L'esistenza di una immersione è un invariante topologico per  $A$ , per cui è possibile distinguere due spazi se uno dei due ammette una data immersione e l'altro no.

**Definizione 15.** Data una superficie  $S$  e un'immersione  $f : S \rightarrow R^3$  chiameremo  $S' = f(S) \subset R^3$  superficie immersa nello spazio euclideo  $R^3$ .

Il nastro di Moebius è una superficie, con bordo, connessa e immersa in  $R^3$ .

### PARLANDO DI ORIENTABILITÀ

Immaginiamo che intorno ad ogni punto di una certa superficie data (ad eccezione dei punti del contorno, se ve ne sono) sia tracciata una piccola curva chiusa che giaccia interamente sulla superficie. Cerchiamo ora di fissare un verso nel quale queste curve debbano essere percorse, in modo che, in punti sufficientemente vicini, il verso di percorrenza sia sempre lo stesso. Se una simile determinazione è possibile, la chiamiamo orientazione della superficie, e diciamo che la superficie stessa è orientabile.

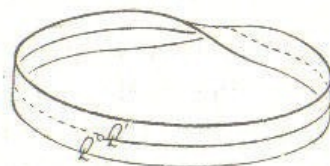


Figura 1.21: Nastro di Moebius

Ora una superficie ad una sola faccia non può mai essere orientabile. Per dimostrare questo assunto, consideriamo un cammino chiuso percorrendo il quale si torna allo stesso punto ma dalla parte opposta rispetto alla superficie, la cui esistenza equivale al fatto che la superficie è ad una sola faccia; ad esempio il cammino  $QQ'$  sul nastro di Moebius, dove ora consideriamo  $Q$  e  $Q'$  come identici. Se associamo al punto  $Q$  un verso di circolazione intorno

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

allo stesso e se prolunghiamo con continuità questa associazione tra i punti e i versi delle curve intorno agli stessi lungo il cammino  $QQ'$  arriviamo necessariamente, nel punto  $Q = Q'$ , a un verso di circolazione contrario a quello scelto in origine. Ciò non si potrebbe verificare se il nastro di Moebius fosse orientabile. Si può dire qualcosa di analogo anche per le altre superfici ad una sola faccia. Inversamente, si può dimostrare che tutte le superfici a due facce sono orientabili. La distinzione in superfici ad una e due facce è dunque identica alla distinzione in superfici orientabili e non orientabili.

È facile vedere che una superficie è non orientabile, se e soltanto se, esiste su di essa una certa curva  $s$  dotata della proprietà che un piccolo cerchio orientato, il cui centro percorra  $s$  con continuità, ritorni al punto di partenza con orientazione contraria. Se percorriamo la superficie restando da una parte della curva, quando arriviamo nuovamente al punto di partenza ci troviamo dall'altra parte di  $s$ , pur senza aver attraversato la curva. Perciò  $s$  si chiama curva ad una sola sponda. Mentre sulle superfici orientabili tutte le curve hanno due sponde, l'esistenza di una curva chiusa a una sponda è caratteristica delle superfici non orientabili. L'esistenza di superfici ad una faccia e di curve ad una sponda su di esse si equivalgono. La prima di queste proprietà riguarda la posizione di una superficie nello spazio, la seconda la posizione d'una curva su una superficie.

### NON ORIENTABILITÀ DEL NASTRO DI MOEBIUS

**Definizione 16.** Dicesi triangolazione (finita) di una superficie un insieme finito di triangoli tali che, per ogni coppia di triangoli distinti  $T_1$  e  $T_2$  allora:

- $T_1$  e  $T_2$  sono disgiunti
- condividono esattamente un lato e i suoi due vertici estremi.
- condividono esattamente un vertice
- I triangoli che insistono su uno stesso vertice devono costituire un intorno per il vertice stesso.

**Teorema 14.** *Data una superficie con bordo essa è sempre triangolabile.*

**Definizione 17.** Definiamo una catena come una successione finita di triangoli  $T_1, T_2, \dots, T_n$  tale che  $T_i$  ha in comune un lato con  $T_{i-1} \forall i = 2, 3, \dots, n$ .

**Definizione 18.** Definiamo una catena chiusa una catena tale che  $n > 2$  e  $T_n$  ha un lato in comune con  $T_1$ .

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

**Definizione 19.** Una catena chiusa si dice coerentemente orientata se si può scegliere un orientamento su un triangolo in modo che ogni coppia di triangoli adiacenti sia coerentemente orientata.

Cioè, scelta un'orientazione su un triangolo, la si riporta sui triangoli adiacenti e si procede in questo modo fino all'ultimo triangolo della catena: se questo e il primo triangolo sono coerentemente orientati allora lo è anche la catena, se ciò non accade la catena si dice non coerentemente orientata.

**Teorema 15.** Una superficie è orientabile se ogni catena chiusa è coerentemente orientabile.

*Dimostrazione.* (sul nastro di Moebius) Faremo vedere che scegliendo una triangolazione (infinita) in essa esiste una catena non coerentemente orientabile. Scegliamo un'orientazione per il primo triangolo. Induciamo tale orientazione sui triangoli adiacenti. Proseguiamo fino ad arrivare al lato in corrispondenza del quale si ha l'incollamento: il triangolo viene così ribaltato. Si ottengono due triangoli accostati di questo tipo:

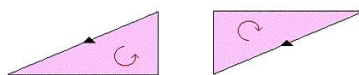


Figura 1.22: Triangolazione

Questa catena è quindi non orientabile, di conseguenza la superficie non è orientabile.  $\square$

*Osservazione 7.* Qualsiasi superficie che contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Moebius non è orientabile.

Infatti posso ripetere il procedimento della catena chiusa sulla parte omeomorfa al Nastro di Moebius.

Vale anche il viceversa: se una superficie non è orientabile, allora contiene necessariamente un sottospazio isomorfo al nastro di Moebius (infatti se ho una catena non orientabile, da essa riesco a ritagliare una striscia che si incolla nello stesso modo in cui si incollano i bordi del nastro).

*Osservazione 8.* L'orientabilità è una proprietà topologica. L'orientabilità non dipende dalla triangolazione, l'esistenza del nastro di Moebius è invariante per omeomorfismo: quindi superfici orientabili non possono essere omeomorfe a superfici non orientabili.

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

### IL PIANO PROIETTIVO $P^2$ E IL NASTRO DI MOEBIUS

Il piano proiettivo reale  $P^2 = P^2(\mathbb{R}^3)$  è definito come  $S^2/\sim$ , dove  $S^2$  è la sfera unitaria e  $\sim$  è una relazione di equivalenza così definita:

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \text{ o } x = -x'$$

In questo modo l'emisfero settentrionale della sfera è identificato con quello meridionale, possiamo quindi concentrare la nostra attenzione su uno di essi. L'emisfero è omeomorfo al disco chiuso

$$D^2 = \{(x, y) \text{ in } \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

tramite l'omeomorfismo dato da

$$(x, y, z) \sim (x, y)$$

con  $(x, y, z)$  in  $S^2$  e  $z = 0$ .

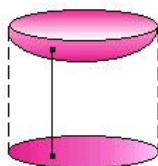


Figura 1.23: Emisfero e piano

Possiamo quindi rappresentare  $P^2$  come  $D^2/\sim$  con

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \text{ oppure } x, x' \in S^1 \subseteq D^2 \text{ e } x = -x'$$

Questa identificazione è rappresentata nella seguente figura 1.24:

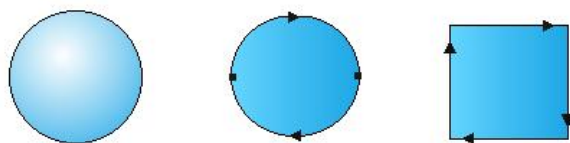


Figura 1.24: Identificazione

Se togliamo da  $P^2$  una piccola regione (omeomorfa all'interno di  $D_2$ ), ci resta un nastro di Moebius privo di bordo (figura 1.25).

## 1.4 CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

---

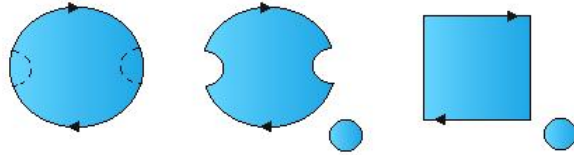


Figura 1.25: Nastro di Moebius privo di bordo

Possiamo quindi pensare al piano proiettivo reale come ad un disco a cui sia stato aggiunto un nastro di Moebius sul bordo. Dall'osservazione precedente, quindi, il piano proiettivo reale non è orientabile, poiché contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Moebius.

### 1.5 SCIOGLIERE IL NODO

#### 1.5.1 Il problema

1. Si prende una corda, si fa un nodo semplice nel centro (quello riportato in figura 1.26), e le estremità della corda si mettono attorno ai polsi della persona legandoli con un nodo (simile a manette). Obiettivo del gioco è sciogliere il nodo semplice senza togliersi le manette.

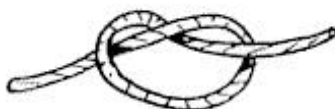


Figura 1.26: Nodo

2. Variante: si prendono due corde un po' più lunghe, si mette una corda ai polsi di una persona e l'altra ai polsi della seconda persona dopo averla fatta passare dentro alla circonferenza formata dalla prima persona con la propria corda. Si chiede ai due di sciogliersi.
3. Per cercare di far capire le differenze si può iniziare con quattro persone che tengono ognuno un capo di due corde, disposte come nel precedente gioco.
4. Di nuovo due persone che invece di avere i polsi legati alla corda, la tengono in mano ma si trovano esattamente come nel punto 2.

#### 1.5.2 Un po' di storia

Con questo gioco ci addentriamo in quella che si chiama Teoria dei nodi.

La teoria dei nodi è nata con intenti per lo più di carattere pratico (i lavori di Gauss sul calcolo dell'induttanza di un sistema di fili elettrici circolari concatenati tra loro ne sono un esempio); successivamente si sviluppò nell'ambito della cosiddetta matematica "pura" e oggi torna ad occuparsi di questioni pratiche.

Il nodo a otto e il nodo trifoglio (due dei nodi più semplici) nel XIX secolo furono utilizzati come modelli atomici.

Il matematico e fisico Lord William Thomson Kelvin (1824-1907) diede una spinta alla teoria matematica dei nodi nel corso dei suoi tentativi per formulare un modello degli atomi, i quali, ipotizzava, erano in realtà nodi diversi intrecciati nell'etere che, secondo Kelvin, permeava lo spazio. Egli propose





Figura 1.27: Rispettivamente da sinistra a destra: un nodo banale, un nodo trifoglio e un nodo ad otto.

che gli atomi fossero sottili stringhe annodate e che i tipi di nodi determinassero il tipo di atomi. I fisici e i matematici suoi contemporanei iniziarono a mettere insieme una tavola di nodi distinti, ritenendo di stare compilando una tavola degli elementi. La definizione di Kelvin di un nodo era la stessa utilizzata dai topologi: un nodo è una curva chiusa che non ha intersezioni e che non può essere svolta per dare origine ad una semplice circonferenza. La stabilità topologica e la varietà dei nodi sembravano giustificare la stabilità della materia e la varietà degli elementi chimici.

Gli scienziati presero seriamente la teoria di Kelvin sui “vortici di atomi” per circa due decenni. Anche il famoso fisico James Clerk Maxwell (1831-1879) pensava che “soddisfacesse più condizioni di qualunque modello atomico finora considerato”. La teoria di Kelvin indusse anche il fisico scozzese Peter Tait (1831-1901) a iniziare uno studio intensivo e un catalogo dei nodi per aiutarlo a capire quando due nodi erano realmente diversi. Tuttavia tutto questo entusiasmo nei confronti della teoria dei nodi scemò improvvisamente quando si scoprì che l’invisibile etere dello spazio non esisteva. Purtroppo, però, l’interesse per i nodi continuò a declinare per decenni.

I chimici hanno fatto un lungo cammino dai tempi di Kelvin. Oggi sono in grado di realizzare il difficile compito di sintetizzare effettivamente molecole annodate, comprese molecole con nodo trifoglio.

Essi hanno anche costruito nodi trifoglio e a otto di DNA. Molecole circolari di DNA, come i plasmidi, possono venire annodate e differenti DNA annodati possono essere separati sperimentalmente con una tecnica di laboratorio chiamata elettroforesi su gel, nella quale un campo elettrico spinge le molecole ad attraversare un blocchetto di gel. Le proprietà di una molecola determinano la velocità con cui un campo elettrico fa viaggiare la molecola attraverso il gel gelatinoso. I nodi con un diverso numero di incroci hanno velocità differenti di spostamento nel gel e quindi producono bande distinte nel mezzo.

I nodi vengono studiati in settori come la genetica molecolare - contribuiscono a capire come individuare un avvolgimento di DNA- e la fisica delle particelle, nel tentativo di rappresentare la natura fondamentale delle parti-

## 1.5 SCIUGLIERE IL NODO

---

celle elementari. Per esempio, Phoebe Hoidn e Andrzej Stasiak dell'università di Losanna, in Svizzera, e Robert Kusner dell'università di Massachusetts, studiano la complessità matematica di certi nodi per sviluppare nuove teorie che potrebbero spiegare alcune proprietà di particelle elementari come gli elettroni.

I biochimici che lavorano sulle proteine sono a loro volta affascinati dai nodi che possono esistere all'interno delle macromolecole biologiche. Nel 2000 William R. Taylor, un matematico che si occupa di biologia, ha sviluppato un algoritmo per scoprire i nodi presenti nello scheletro delle proteine, nodi le cui coordinate sono immagazzinate nei database delle proteine. In particolare, egli ha indagato più di 3000 diverse strutture proteiche, conservate presso il Protein Data Bank, un archivio a livello mondiale dei dati relativi alle strutture tridimensionali delle macromolecole biologiche.

Nodi come il trifoglio e il nodo ad otto hanno ispirato l'umanità per centinaia di anni. Una forma appuntita del nodo trifoglio fu utilizzata dalla chiesa cristiana celtica per rappresentare simbolicamente la Trinità (successivamente simbolo celtico apparve nella serie televisiva *Streghe* e nella copertina del quarto album dei Led Zeppelin).

Non è esagerato affermare che i nodi hanno svolto un ruolo cruciale nello sviluppo della civiltà, dal momento che sono stati utilizzati per tenere insieme gli abiti, appendere al corpo le armi, costruire ripari e consentire all'uomo di navigare ed esplorare il mondo. Schemi di nodi sono stati rinvenuti sulle pietre tombali incise dalle popolazioni del Neolitico. Gli Inca utilizzavano i nodi per fare i conti e anche come linguaggio scritto su stringhe note come quipu. Anche gli antichi cinesi li usavano, anche come promemoria. Alcuni nodi hanno la loro origine nel medioevo, epoca in cui venivano usati in combinazioni con le carrucole per sollevare e trascinare le merci che erano di solito legate con nodi opportuni. I marinai hanno utilizzato e inventato nodi per ormeggiare le imbarcazioni, unire le funi tra loro, armare le vele, issare le merci. Nel corso di pochi millenni, l'umanità ha trasformato i nodi da semplici incisioni ornamentali sulle rocce a modelli della vera natura della realtà.

### 1.5.3 Topologia dei nodi

Definiamo il nodo come l'immersione di una circonferenza  $S^1$  nello spazio Euclideo tridimensionale  $R^3$ .

In matematica un nodo è qualcosa di diverso dall'idea usuale, che ci fa pensare ad un pezzo di corda intrecciata con le estremità libere; esso può essere pensato come una cordicella che viene saldata alle estremità dopo essere stata annodata in modo comunque complicato.

Un nodo ad esempio banale non può essere portato, con alcuna trasformazione, in un nodo trifoglio o in un nodo ad otto. Se questa trasformazione esiste parleremo di nodo sciolto altrimenti parleremo di nodo intrecciato.

Formalmente, diremo che un nodo  $K$  è intrecciato se non esiste un omeomorfismo  $h : R^3 \rightarrow R^3$  tale che  $K = h(S^1)$ , dove  $S^1 = \{(x, y, 0) \in R^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  è la circonferenza standard nel piano  $xy$ .

Un intreccio di due o più nodi è chiamato link, e ciascuno dei nodi che costituiscono il link viene chiamato componente del link.

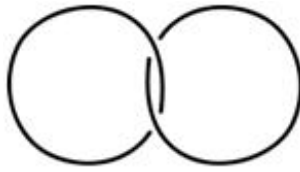


Figura 1.28: Link di Hopf : è un link a due componenti.

Se prendiamo un nodo trifoglio e lo mettiamo allo specchio esso sarà in realtà un altro nodo; esistono infatti un trifoglio destro e un trifoglio sinistro che non si riescono a far coincidere l'uno con l'altro con un movimento continuo nello spazio, quindi le due figure non rappresentano lo stesso nodo. Possiamo comunque dire che il trifoglio destro e il trifoglio sinistro sono equivalenti. Infatti, secondo la definizione, due nodi (o link) si dicono equivalenti se esiste un omeomorfismo su  $R^3$  che trasforma un nodo nell'altro.

La riflessione rispetto ad un piano, necessaria per trasformare il trifoglio destro nel trifoglio sinistro (o viceversa) è un'operazione che “non conserva l'orientazione”, ossia trasforma una “terna destrorsa” in una “terna sinistrorsa” e non può essere realizzata con un movimento continuo nello spazio  $R^3$ . Un omeomorfismo, però, non è necessariamente una trasformazione che può essere ottenuta con un movimento continuo dello spazio a partire dall'identità, quindi non è detto che conservi l'orientazione. Si dice che un omeomorfismo  $h : R^3 \rightarrow R^3$  conserva l'orientazione se  $h$  trasforma una terna destrorsa in un'altra terna destrorsa.

Il fatto che l'equivalenza sia definita sulla base degli omeomorfismi fa sì che un nodo e la sua immagine speculare siano considerati equivalenti. Esiste invece un tipo di equivalenza che fa distinzione anche tra le immagini speculari: l'isotopia.

Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici, diciamo che la funzione  $H$  è un'omotopia di  $X$  in  $Y$  se è tale che  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  ed è continua. In pratica, l'omotopia è una famiglia “continua” di funzioni continue  $(h_t : X \rightarrow Y)_{t \in [0, 1]}$ , definite in modo che  $h_t(x) = H(x, t)$ .

## 1.5 SCIOGLIERE IL NODO

---

L'isotopia è un'omotopia di omeomorfismi e infatti due nodi si dicono isotopicamente equivalenti o, più semplicemente, isotopi se esiste un'omotopia  $H : R^3 \times [0, 1] \rightarrow R^3$ , che trasforma un nodo nell'altro, tale che  $h_t : R^3 \rightarrow R^3$  è un omeomorfismo per ogni  $t \in [0, 1]$ , ovvero, se esiste una famiglia "continua" di omeomorfismi che trasforma un nodo nell'altro; questo ci consente di affermare che esiste un omeomorfismo su  $R^3$  che trasforma un nodo nell'altro conservando l'orientazione. Dire che questa condizione è valida, è equivalente a dire che un nodo può essere deformato nello spazio fino ad assumere la stessa forma dell'altro. Non è consentito ad esempio tagliare il nodo, né farlo passare attraverso se stesso. Pertanto possiamo dire che tra i due trifogli c'è equivalenza, ma non c'è isotopia: infatti non c'è modo di trasportare il trifoglio sinistro su quello destro senza fare una delle operazioni sopra "vietate", a meno di operare una riflessione.

I nodi con questa caratteristica sono conosciuti come nodi chirali, quelli che non hanno questa caratteristica achirali, infatti, a differenza del trifoglio, esistono alcuni nodi con la peculiarità di essere isotopi alla loro immagine speculare.

Nella pratica rimane comunque difficile stabilire se due nodi sono equivalenti e gran parte della teoria è rivolta a sviluppare tecniche che aiutino a risolvere questo problema.

Se immaginiamo di proiettare il nostro nodo su di un piano otteniamo quello che viene chiamato diagramma del nodo ed è sicuramente il modo più immediato per visualizzarlo.

Già nel 1935 Reidemeister dimostrò che due nodi sono isotopicamente equivalenti se e solo se la proiezione di uno può essere convertita nella proiezione dell'altro attraverso l'uso di tre semplici movimenti, a meno di isotopie del diagramma nel piano. I movimenti di Reidemeister sono mostrati in figura 1.29: ogni illustrazione in figura rappresenta una classe di movimenti.

**Teorema 16.** *Due nodi si dicono isotopicamente equivalenti se e solo se le loro proiezioni sono correlate da movimenti di Reidemeister.*

**Teorema 17.** *Due nodi si dicono equivalenti se e solo se le loro proiezioni sono correlate da movimenti di Reidemeister e/o riflesses rispetto all'asse  $y$  in un riferimento di assi cartesiani del tipo  $xyz$ .*

Osservando i movimenti di Reidemeister risulta evidente che ogni nodo ha infinite proiezioni possibili sul piano. Per questo motivo, spesso si sceglie come diagramma rappresentante uno di quelli che mostrano il minor numero di incroci tra tutte le possibili proiezioni (in generale accade che ce ne siano più di uno). A questi diagrammi viene dato il nome di proiezione minima

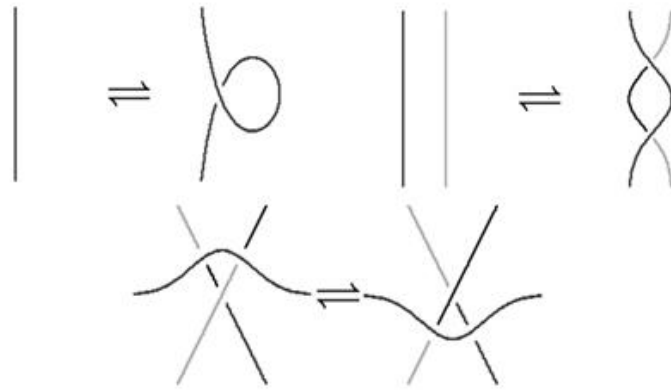


Figura 1.29: Mosse di Reidemeister

del nodo e il numero di incroci che vi si possono contare prende il nome di *crossing number* del nodo stesso.

Sottolineiamo inoltre che in  $R^3$  esistono nodi non banali come abbiamo visto, mentre ogni nodo in  $R^m$  con  $m \neq 3$  è banale, cioè equivalente a  $S^1 \subset R^m$ .

Per  $m = 2$  ciò segue dal teorema di Schönflies.

**Teorema 18** (di Schönflies). *Data una curva di Jordan  $C \subset R^2$  allora esiste  $k : R^2 \rightarrow R^2$  omeomorfismo tale che  $k(S^1) = C$  ( $\forall h : S^1 \rightarrow R^2$  immersione tale che  $h(S^1) = C \exists k$  tale che  $k|_{S^1} = h$ )*

Non abbiamo finora visto un modo per distinguere due tipi di nodi. Ne accennerò di seguito due: il primo usa la colorazione degli archi che formano il nodo e li classifica in colorabili e non (proprietà topologica), l'altro (il Linking Number) assegna un numero ad ogni nodo distinguendo nodi a più componenti.

### COLORAZIONE

Il concetto base della colorazione di un diagramma è semplice. Scelgo tre colori diversi.

**Definizione 20.** Il diagramma di un nodo è colorabile se e solo se a ciascun arco può essere assegnato uno di tre colori disponibili rispettando le seguenti regole :

1. Nel nodo appaiono almeno due colori;
2. In ciascun incrocio in cui appaiono due colori, allora appaiono tre colori.

## 1.5 SCIOGLIERE IL NODO

---

Se volessimo ad esempio determinare se il nodo banale, trifoglio ed ad otto fossero colorabili dovremmo proseguire nel seguente modo.

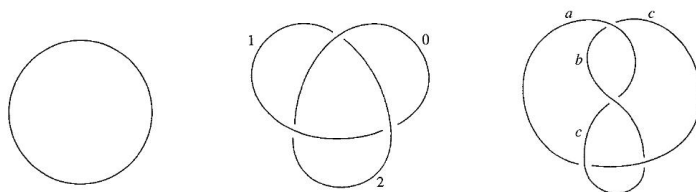


Figura 1.30: Colorazione di un nodo banale, un nodo trifoglio e un nodo ad otto

Il diagramma del nodo banale è formato da un solo arco quindi non si riesce a colorare con più di un colore. Non è così rispettata la prima condizione.

I tre archi del nodo trifoglio sono colorabili con tre colori diversi, inoltre tutti e tre i colori appaiono in ognuno dei tre incroci. Riusciamo così ad ottenere una colorazione del diagramma.

Nel diagramma del nodo ad otto consideriamo l'incrocio in alto, ai tre archi che si incrociano assegniamo i tre diversi colori  $a, b, c$  come in figura 1.30;  $a$  e  $b$  si incrociano anche al centro del diagramma quindi il quarto arco del diagramma deve avere il colore  $c$ ; così facendo entrambi gli incroci rimanenti hanno due colori e si viola la seconda condizione.

L'altra possibilità è che i tre archi dell'incrocio superiore abbiano tutti e tre lo stesso colore, ma così facendo anche il quarto arco dovrebbe avere lo stesso colore, violando ancora la prima condizione. Il diagramma del nodo ad otto non è colorabile.

**Teorema 19.** *La colorazione di un diagramma di un nodo è una proprietà topologicamente invariante per i nodi.*

*Dimostrazione.* Una proprietà è invariante per nodi se essa non cambia applicando mosse di Reidemeister o per riflessione rispetto all'asse  $y$ .

Durante la riflessione la colorazione non cambia perché il nodo porta con sé i tre colori senza alcun cambiamento, invece nelle mosse di Reidemeister i colori subiscono alcuni cambiamenti. Analizziamone una alla volta e dimostriamo che la colorazione non cambia.

La prima mossa di Reidemeister introduce un nuovo incrocio che rompe l'arco iniziale in due archi. Questi due archi hanno lo stesso colore. La prima mossa di Reidemeister o il suo inverso non presenteranno cambiamenti alla colorazione del diagramma.

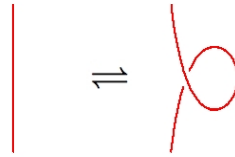


Figura 1.31: Prima mossa di Reidemeister



Figura 1.32: Seconda mossa di Reidemeister

Nella seconda mossa una porzione di un arco passa sopra un altro arco, formandone uno nuovo. Ora, se i due archi iniziali sono dello stesso colore, il nuovo sarà obbligatoriamente dello stesso colore, se i due archi sono di colori diversi, al nuovo arco deve essere assegnato un terzo colore cosicché continua a valere che in ogni incrocio sono presenti tutti e tre i colori. Stessa situazione si presenta per l'inverso della seconda mossa di Reidemeister infatti se tutti gli archi hanno lo stesso colore lo mantengono anche se vengono separati, mentre se hanno colori diversi una volta separati possono riprendere il colore originale. La seconda mossa di Reidemeister o il suo inverso non cambiano la colorazione del nodo.

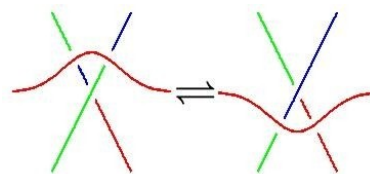


Figura 1.33: Terza mossa di Reidemeister

La terza mossa di Reidemeister coinvolge tre componenti del nodo: diremo che la prima componente è quella che passa sopra le altre due, la seconda componente quella che passa sotto le altre due e la terza è quella che passa sotto la prima ma sopra la seconda. Se la prima e la terza componente hanno lo stesso colore, la seconda può essere interamente dello stesso colore oppure può essere di un secondo colore e cambiarlo quando passa sotto una delle

## 1.5 SCIOGLIERE IL NODO

---

altre due componenti e tornare al secondo colore una volta passato sotto l'ultima componente.

Se la terza componente cambia colore quando passa sotto la prima componente ci sono tre possibili schemi di colori per la seconda componente (per approfondimenti [15]). L'inverso della mossa di tipo tre non è differente da una mossa di tipo tre.  $\square$

La proprietà invariante della colorazione è un buon punto di partenza per distinguere i nodi. In particolare il nodo trifoglio è colorabile, il nodo banale no. Abbiamo così avuto la dimostrazione dell'esistenza di nodi non banali. I diagrammi però di molti nodi non sono colorabili, come il nodo banale, uno tra tutti il nodo ad otto. Dovremmo riuscire a provare che questi in effetti non sono nodi banali e si vorrebbe distinguere tra i nodi non colorabili i diversi tipi di nodi. La colorazione è soltanto il più semplice di una sequenza di invarianti che coinvolgono la colorazione di archi di un diagramma (per approfondimenti [15]).

### LINKING NUMBER

Per link con due o più componenti, un semplice invariante topologico più potente del numero di componenti è il *linking number* o numero di allacciamento. Questo può essere definito in diversi modi, ma il più semplice, in termini di diagramma del nodo, prende in considerazione gli incroci in cui una componente passa sopra un'altra (le auto-intersezioni vengono ignorate). Ad ogni incrocio viene assegnato un valore che può essere  $-1$  o  $+1$ . Si noti che, per poter dare un segno all'incrocio, ciascuna componente deve essere orientata.

Se  $\alpha$  e  $\beta$  son due componenti del nodo  $L$ , una volta orientato il nodo possiamo definire il linking number  $lk(\alpha, \beta) = lk(L)$  dove  $L = \alpha \cup \beta \subset S^3$ , come ad esempio nella figura 1.2:

$$lk \left[ \begin{array}{c} \text{diagramma} \end{array} \right] = +1$$


Figura 1.34: Esempio di linking number

Il segno  $\epsilon$  all'incrocio viene assegnato grazie alla regola della mano destra: bisogna porre la mano destra, di taglio, sulla componente che passa sopra, con il mignolo sulla freccia, e spostare la mano seguendo l'angolo minore (convesso) fino a sovrapporsi all'altra freccia. Se il movimento è nel ver-



so della chiusura del pugno, allora l'incrocio è destrorso, e quindi positivo, altrimenti è sinistrorso e negativo (figura 1.35).

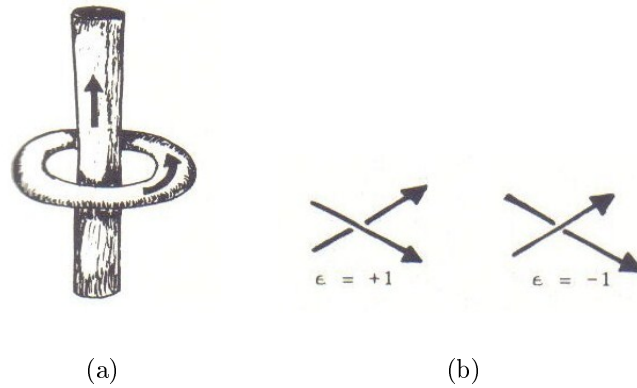


Figura 1.35: Orientazione degli incroci

**Definizione 21.** Sia  $L = \alpha \cup \beta$  un link a due componenti. Indichiamo con  $\alpha \Pi \beta$  l'insieme degli incroci di  $\alpha$  con  $\beta$ . Per ogni diagramma dato definiamo il linking number come

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \Pi \beta} \epsilon(p)$$

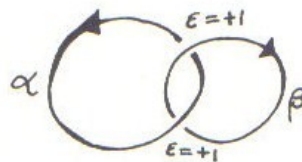


Figura 1.36: Linking number del link di Hopf:  $lk(\alpha, \beta) = 1/2(1 + 1) = 1$

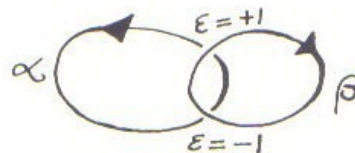


Figura 1.37: Linking number di un finto link di Hopf:  $lk(\alpha, \beta) = 1/2(1 - 1) = 0$

## 1.5 SCIOGLIERE IL NODO

---

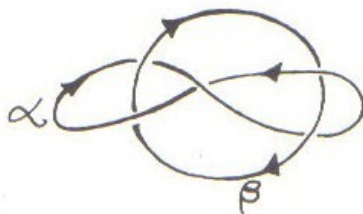


Figura 1.38: Linking number del link di Whitehead:  $lk(\alpha, \beta) = 0$

**Teorema 20.** *Il linking number è un invariante topologico per i nodi.*

*Dimostrazione.* Esso non varia per mosse di Reidemeister. Durante la riflessione tutti i segni degli incroci si invertono e  $lk(\alpha, \beta)$  cambia segno. Quindi in realtà  $lk(\alpha, \beta)$  è invariante per isotopia mentre  $|lk(\alpha, \beta)|$  è invariante per nodi equivalenti (non isotopicamente). Inoltre anche se cambiassimo l'orientazione di una componente cambierebbe il segno del linking number.  $\square$

Grazie al linking number possiamo sostenere che ad esempio il link di Hopf non è equivalente ad un nodo banale.

Tuttavia, la figura ci mostra che l'invariante non è completo: i due nodi rappresentati in figura 1.39 sono differenti, ma il loro linking number è il medesimo.

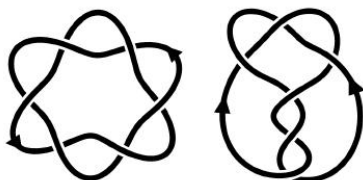


Figura 1.39: Due nodi non equivalenti aventi stesso linking number

### 1.5.4 Concludendo

Riformulando i nostri problemi iniziali, nel caso 1 ci troviamo ad avere un nodo che, essendo legato alle nostre braccia, è topologicamente equivalente ad un nodo trifoglio. Questo in  $R^3$  è impossibile da sciogliere così l'unico modo, è quello di tagliare la corda. Dobbiamo dunque trovare una mossa che simuli un taglio. L'unico modo è quello di far scivolare il nodo all'interno della manetta, di far passare la mano nel cappio che si è formato e sciogliere così il nodo.

## 1.5 SCIOGLIERE IL NODO

---

Molto simile è la soluzione del problema al punto 2. La posizione che si assume è topologicamente equivalente ad un link di Hopf, anche esso impossibile da sciogliere in  $R^3$ . L'unica maniera di eseguire il taglio è quello di prendere la corda del compagno e fare la stessa mossa del punto 1.

Nel punto 3 la situazione riproduce la figura seguente 1.40:

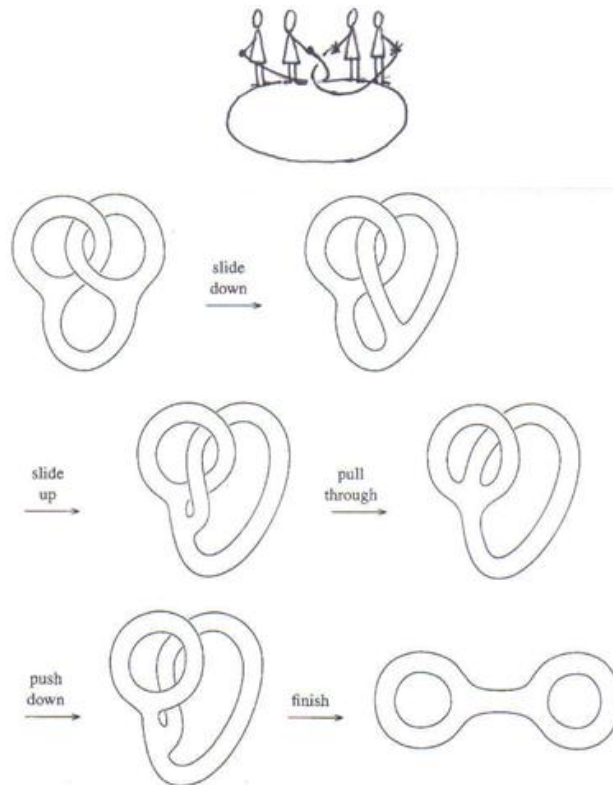


Figura 1.40: Gioco con quattro persone

Questa superficie è topologicamente, come si vede nell'immagine 1.40, e fisicamente possibile da sciogliere in quanto facilmente le quattro persone riusciranno a farlo, senza però alzare le gambe che equivarrebbe a fare un taglio della superficie stessa.

Nel caso 4 la situazione è identica alla 3 ma, pur essendo topologicamente possibile sciogliere il "nodo", la fattezze del nostro corpo non ce lo permette. Questo ultimo caso è dunque impossibile.

# Capitolo 2

## 2.1 IL TIROCINIO

<sup>1</sup> In questo capitolo, come detto nell'introduzione, presenterò quello che effettivamente ho realizzato.

La prima parte del capitolo è dedicata al tirocinio e sono presenti l'unità didattica pensata inizialmente, le dispense date ai ragazzi giorno per giorno (potrebbero essere presenti delle piccole ripetizioni di quanto detto nel primo capitolo ma ho ritenuto comunque opportuno inserire in modo integrale le dispense per far vedere come effettivamente ogni problema è stato affrontato con i ragazzi) e la prova finale con i relativi risultati.

La seconda parte è la descrizione del tavolo su cui avevo in bella mostra i miei oggetti matematici durante la manifestazione Tuttoingioco di Civitanova Alta.

Per quanto riguarda il tirocinio sono state fatte alcune scelte, ad esempio la distinzione dei nodi attraverso il polinomio di Alexander, per questioni puramente scolastiche discusse con la professoressa-tutor (il polinomio è stato usato per l'introduzione delle matrici).

La parte sulla teoria dei nodi è stata usata come approfondimento per i ragazzi più bravi, che non dovevano sostenere le interrogazioni di recupero.

---

<sup>1</sup>Il sito consultato per le immagini è [www.matematica.it](http://www.matematica.it) e l'attività didattica è basata su un progetto per le scuole superiori dell'Università degli studi di Milano

### 2.1.1 Il progetto formativo

Strutturerò un'unità didattica sul tema: "Proprietà topologiche di curve e superficie: dall'osservazione del quotidiano a qualche formalizzazione".

Tale unità prevede l'esplicitazione:

- 1) dei prerequisiti;
- 2) degli obiettivi da raggiungere;
- 3) del percorso di attività da svolgere (strumenti, tempi, modalità) in classe;
- 4) della verifica del "feed-back".

Lo scopo formativo che ci si prefigge è, in senso generale, quello di indurre negli studenti di una classe III PNI di liceo scientifico la consapevolezza che la matematica non si esaurisce nelle tecniche algebriche e geometriche che troppo spesso costituiscono l'unico orizzonte nell'insegnamento secondario.

### 2.1.2 Unità didattica prevista inizialmente

L'unità didattica sul tema "Proprietà topologiche di curve e superficie: dall'osservazione del quotidiano a qualche formalizzazione" verrà svolta nella classe terza sez. D del liceo scientifico T. C. Onesti di Fermo nel periodo complessivo di circa un mese da Sara Mattioli, studentessa del terzo anno del corso di laurea Matematica e Applicazioni presso l'università degli studi di Camerino.

#### PREREQUISITI

Ciò che si andrà a proporre alla classe non necessita di prerequisiti specifici in quanto ciò che verrà detto punta a incuriosire i ragazzi mostrando loro una matematica "nuova".

#### OBIETTIVI

L'obiettivo formativo è quello di indurre negli studenti la consapevolezza che la matematica non si esaurisce nelle tecniche algebriche e geometriche viste fino ad ora; si cercherà di raggiungere lo scopo attraverso la scoperta di prime proprietà topologiche, partendo dalla teoria dei grafi e arrivando a classificare alcune superficie fondamentali (quali il piano, il cilindro, il toro e il nastro di Moebius).

I ragazzi dovranno saper risolvere piccoli problemi con i grafi (euleriani ed hamiltoniani) e saper classificare le superfici topologiche anche tramite la caratteristica di Eulero.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

### CONTENUTI

Si tratterà la topologia nelle sue linee generali in particolare per ciò che riguarda i grafi e le superfici.

Le varie lezioni saranno affrontate con metodologie diverse: alcuni problemi saranno affrontati con uno stile “problem solving” (dove la classe sarà guidata attraverso passaggi successivi alla soluzione del problema), cercheranno di risolvere problemi in gruppi da 4/5 ragazzi (cercando di sviluppare un buon metodo di lavoro di gruppo dove ogni ragazzo porterà il proprio contributo per la soluzione del problema), lezioni frontali (anche con l’aiuto del computer e di presentazioni).

Il periodo complessivo dell’unità didattica sarà di un mese circa, il tempo specifico per ogni argomento sarà indicato di seguito.

Alla lezione seguirà la consegna ad ogni ragazzo di una piccola dispensa su quanto fatto nella giornata e verranno assegnati degli esercizi per casa.

La scansione dei contenuti sarà la seguente:

- Dopo un piccolo momento di presentazione e di conoscenza dei ragazzi sarà affrontato il primo argomento: i grafi euleriani. Sarà presentato alla classe il problema dei sette ponti di Königsberg da cui partirà la conoscenza dei grafi euleriani. Verrà affrontato un altro problema che si può risolvere con un grafo. Esercizi  
(2 ore)
- Costruzione di un decaedro rombico e di un decaedro regolare. Costruzione del grafo hamiltoniano dei due dodecaedri anche attraverso i diagrammi di Schlegel. Problema irrisolto sui cicli hamiltoniani. Esercizi.  
(1 ora)
- Problema delle tre case e dei tre servizi. Soluzione sul piano, sul cilindro, sul toro e sul nastro di Moebius. Introduzione delle differenze tra queste superfici e teorema di Jordan.  
(2ore)
- Superfici: costruire superfici topologiche partendo da poligoni e unendo i lati in diverse maniere. Classificazione di queste superfici attraverso il numero di “buchi” e osservazione del quotidiano per trovare superfici topologicamente equivalenti. Differenze fondamentali tra nastro di Moebius e cilindro (costruzione e manipolazione di tali oggetti).  
(2 ore)
- Arrivare alla relazione di Eulero e osservare che il risultato ottenuto è diverso nelle varie superfici (caratteristica di Eulero). Dimostrazione.  
(1 ora)

### FEED-BACK

E' prevista una prova di verifica che aiuterà a capire se i ragazzi sono riusciti ad arrivare agli obiettivi prefissati. Essa comprenderà la conoscenza di definizioni, l'applicazione delle conoscenze (esercizi simili a quelli visti in classe) e l'elaborazione personale (un esercizio ex novo).

Ogni lezione cercherà comunque di verificare se è stato chiaro ciò che viene detto attraverso domande dirette ai ragazzi sugli argomenti svolti.

Ciò che è stato scritto inizialmente nell'unità didattica è stato rispettato quasi interamente. Il programma giornaliero è stato rispettato in modo più "fiscale" nella prima parte (risultato emerso anche dalla verifica fatta in classe), mentre la seconda parte è stata accorciata e accorpata in alcuni passaggi. Alla verifica finale, inoltre, è stato aggiunto un piccolo test personale ed anonimo sullo svolgimento di queste lezioni.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

### 2.1.3 Prima lezione

(in questo caso è stata utilizzata una presentazione power point ed è stato affrontato il tutto il stile problem solving )

La topologia o studio dei luoghi (dal greco  $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$ , luogo, e  $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ , studio) è una delle più importanti branche della matematica moderna. Si caratterizza come lo studio delle proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza “strappi”, “sovrapposizioni” o “incollature”. (non preoccupatevi: chiariremo più avanti che si intende con queste parole)

#### IL PROBLEMA DEI SETTE PONTI DI KÖNIGSBERG

Questo è un problema matematico piuttosto famoso da cui nasce la topologia, il primo che lo risolse fu Eulero (nel 1736).

Il problema dei sette ponti di Königsberg è un problema ispirato da una città reale e da una situazione concreta. La città di Königsberg, già facente parte della Prussia Orientale ed ora chiamata Kaliningrad ed enclave della Russia, famosa per aver dato i natali al filosofo Immanuel Kant (1724-1804), è percorsa dal fiume Pregel e da suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. Ci si pone la questione se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una volta sola e tornare al punto di partenza.

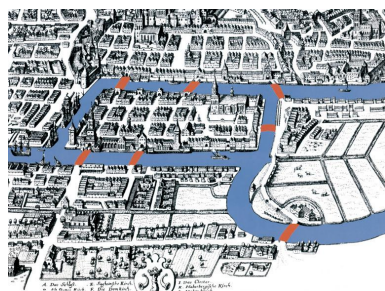


Figura 2.1: Città di Königsberg

Per risolvere il problema costruiamo il relativo grafo <sup>2</sup> : (trasformando i 4 punti della città nei 4 vertici del grafo e i ponti negli spigoli del grafo.)

---

<sup>2</sup>Un grafo è una coppia  $G = (V, E)$  dove  $V$  è un insieme di punti, detti vertici, ed  $E$  è un insieme di archi tali che ogni arco  $e$  di  $E$  collega due vertici  $v, w$  di  $V$  (l'arco può essere identificato con la coppia  $(v, w)$  dei due vertici che collega).



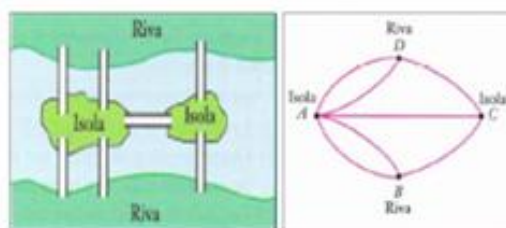


Figura 2.2: Grafo relativo alla città

Abbiamo detto che il nostro problema si riduce a trovare un cammino euleriano sul grafo <sup>3</sup>.

Eulero stabilì che un grafo composto soltanto da nodi pari (o molteplicità del vertice pari), collegato cioè a un numero pari di archi, è sempre percorribile e si può ritornare al punto di partenza senza sovrapposizioni di percorso. Se un grafo contiene nodi pari e soltanto due nodi dispari è ancora percorribile, ma non si può più ritornare al punto di partenza; è necessario partire da uno dei nodi dispari, e si terminerà sull'altro nodo dispari. Se il grafo contiene invece più di due nodi dispari, non è più percorribile, senza sovrapposizioni di percorso.

Concluderemo allora dicendo che la passeggiata sui ponti di Königsberg è impossibile.

**RICORDA:** abbiamo detto che quelle che vengono chiamate le caratteristiche metriche del problema sono superflue, non importa cioè quanto siano lunghi i ponti, quanto sia estesa la superficie delle isole, la disposizione delle terre . . . quello che è fondamentale è il numero delle terre (numero di vertici) e come sono tra loro collegate (spigoli).

Abbiamo affrontato un problema pratico che è possibile risolvere con i grafi:

### IL TORNEO DI CALCIO

Un gruppo di sei squadre devono sfidarsi in un torneo di calcio. Il torneo deve essere circolare e di sola andata, cioè ogni squadra deve giocare una sola partita contro ciascuna altra squadra. Costruite un grafo che rappresenti la

<sup>3</sup>Un cammino euleriano in un grafo è un cammino che in un grafo percorre (una e una sola volta) tutti gli spigoli. Si può inoltre imporre la condizione che il cammino si chiuda (punto di partenza e punto di arrivo coincidono) e allora si parlerà di cicli euleriani.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

situazione del torneo (in modo che siano rappresentate le squadre e le partite).  
Che caratteristiche ha questo grafo?

1) Utilizzando il grafo che avete costruito provate a determinare quante partite vengono giocate in totale.

2) Rispondete alla domanda precedente nel caso in cui le squadre siano 100.

SOLUZIONE:

Abbiamo disegnato il seguente grafo:

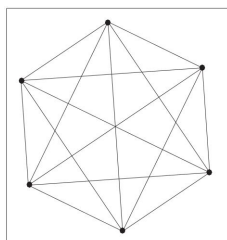


Figura 2.3: Grafo completo del torneo

Abbiamo osservato che questo grafo è completo<sup>4</sup> e il numero di partite in questo caso è 15.

Il numero 15 viene dalla somma  $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ .

Anche nel caso delle 100 partite la soluzione viene dalla somma dei primi 99 numeri naturali.

Il primo a trovare una formula per contare in realtà i primi 100 numeri naturali fu Gauss che si racconta abbia ricevuto dalla sua maestra (all'età di 9 anni!!) questo compito e dopo poco abbia dato la soluzione essendosi accorto che mettendo in riga tutti i numeri da 1 a 100 e nella riga sottostante i numeri da 100 a 1, ogni colonna dava come somma 101: fece dunque il prodotto  $100 \times 101$  e divise per 2 ( $n(n + 1)/2$ ), ottenendo facilmente il risultato.

Nel nostro caso  $n = 99$  quindi il risultato ci sarà fornito dall'espressione  $99 \times (100)/2 = 4950$ .

### ESERCIZI PER CASA:

#### ESERCIZIO 1 - SEDICI PONTI A PARIGI

A Parigi ci sono due isole (di Nôtre Dame e di St. Louis), collegate tra loro da un ponte.

---

<sup>4</sup>I grafi completi sono i grafi che contengono ogni possibile spigolo tra i vertici dati.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

L'isola di Nôtre Dame è collegata a una riva da quattro ponti, e all'altra riva da cinque ponti, mentre l'isola di St. Louis ha tre ponti verso una riva e due verso l'altra. Inoltre, immediatamente a sinistra dell'isola di Nôtre Dame, un altro ponte (il Pont des Arts) collega fra loro le due rive.

È possibile trovare un tragitto che, partendo da una qualunque zona della città, consenta di attraversare ciascuno di questi sedici ponti una ed una sola volta e tornare al punto di partenza? E escludendo il Pont des Arts? Eliminate tutto ciò che c'è di superfluo nel problema quindi riproducete la situazione in un grafo. Se secondo voi esiste questo tragitto, disegnatelo; altrimenti, spiegate perché non ci può essere.

E cosa si può dire senza la condizione di tornare al punto di partenza?



Figura 2.4: Ponti di Parigi

### ESERCIZIO 2 - LETTERE DELL'ALFABETO

Dividi le lettere dell'alfabeto in due gruppi: quelle che di possono scrivere senza mai staccare la penna dal foglio e quelle in cui questa operazione non è possibile.

Come fai ad essere sicuro che una lettera appartenga ad un gruppo oppure all'altro?

(sviluppi del dodecaedro rombico e di quello regolare da riportare su cartoncino e “montare” per la lezione successiva)

## 2.1 IL TIROCINIO

---

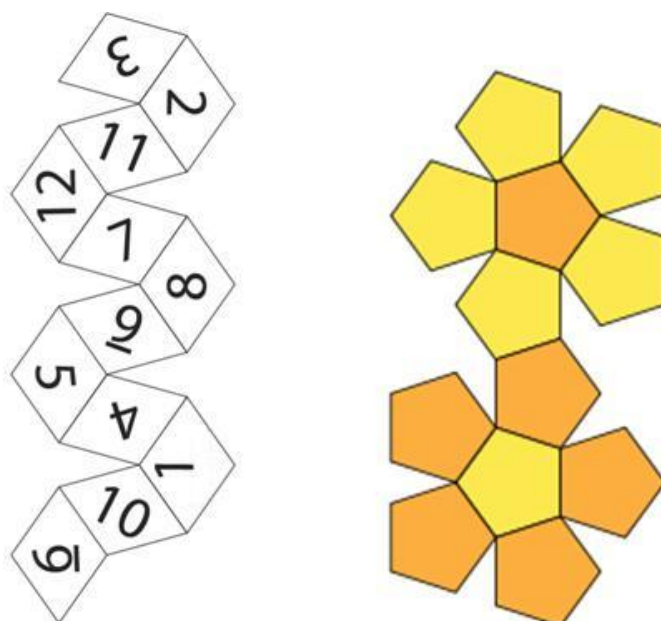


Figura 2.5: Sviluppi del dodecaedro

### 2.1.4 Seconda lezione

(affrontata in gruppetti di ragazzi sui modelli di dodecaedri costruiti da loro, come compito a casa)

**Soluzione esercizi della scorsa lezione:**

PROBLEMA 1

I grafi relativi ai problemi sono quelli in figura 2.6

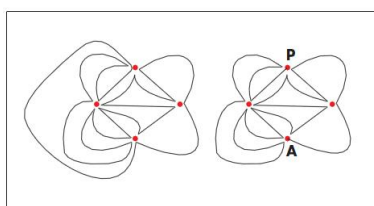


Figura 2.6: Soluzione dell'esercizio

Nel primo caso possiamo, con una passeggiata, attraversare tutti i ponti e tornare al punto di partenza poiché la molteplicità di tutti i nodi è pari, mentre nel secondo caso non è possibile con una passeggiata attraversare

tutti i ponti e tornare al punto di partenza ma è comunque possibile fare una passeggiata che parta dal nodo in alto (con molteplicità 7) ed, attraversando tutti i ponti, arrivare al nodo in basso (con molteplicità 7).

### PROBLEMA 2

Non staccare mai la penna dal foglio coincide a fare un percorso euleriano sulla nostra lettera rappresentata come grafo. Quindi le lettere si divideranno in quelle che di riescono a scrivere senza staccare la penna dal foglio (Q, O, B, ...) e quelle in cui questa operazione non è possibile (A, E, H, ...) per un problema di molteplicità di nodi.

Abbiamo, durante la lezione, cercato un percorso chiuso che passasse su tutti i vertici di due tipi di dodecaedro: quello regolare e quello rombico. In particolare il dodecaedro regolare è quel poliedro che ha per facce dodici pentagoni regolari, tre per ogni vertice mentre il dodecaedro rombico ha dodici facce, rombiche, tutte uguali fra loro, e che si uniscono in alcuni vertici nel numero di 3, in altre nel numero di 4: precisamente, dove i rombi hanno un angolo acuto si incontrano 4 facce, dove hanno un angolo ottuso se ne uniscono 3.

Anche in questo problema non è importante la lunghezza degli spigoli, la regolarità della figura, l'estensione della superficie... È' invece fondamentale la struttura combinatoria dello scheletro formato dai vertici e dagli spigoli dei due solidi, ovvero il grafo che indica come i vertici sono connessi dagli spigoli.

Abbiamo "appiattito" il solido senza considerare più la forma ma solo le connessioni (bisognerà conservare le proprietà che ci interessano: quanti vertici, quanti spigoli, quali spigoli connettono quali vertici...) ottenendo così quello che viene chiamato diagramma di Schlegel.

Il diagramma di Schlegel di un poliedro nello spazio è un diagramma nel piano, ottenuto proiettando il poliedro sul piano. Il diagramma è in realtà un grafo, con vertici e spigoli. Più in generale, un diagramma di Schlegel è un oggetto geometrico ottenuto proiettando<sup>5</sup> un politopo di dimensione  $n$ , contenuto nello spazio euclideo, su un iperpiano di dimensione  $n - 1$ . Ad esempio, un diagramma di Schlegel di un politopo quadridimensionale come l'ipercubo è un oggetto contenuto nello spazio tridimensionale, che ne descrive una proiezione. Tale oggetto è generalmente formato da vertici, spigoli e facce corrispondenti a quelle del politopo.

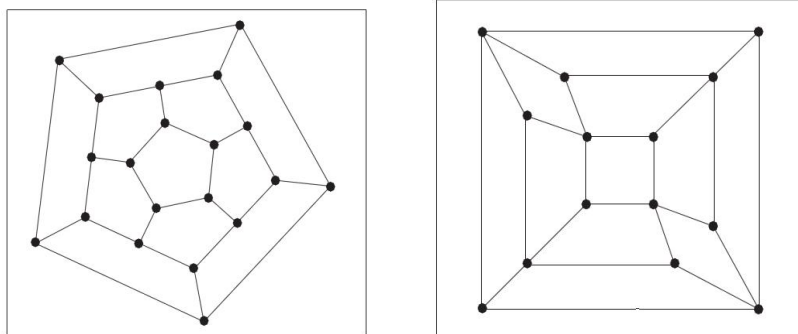
---

<sup>5</sup>Una proiezione ortogonale su un determinato sottospazio  $m$  (ad esempio, una retta o un piano) è una funzione  $P$  che sposta ogni punto dello spazio su un punto di  $m$  lungo una direzione perpendicolare ad  $m$ .

## 2.1 IL TIROCINIO

---

Otteniamo quindi i due diagrammi di Schlegel (figura 2.7).



(a) Dodecaedro regolare

(b) Dodecaedro rombico

Figura 2.7: Diagrammi di Schlegel

Riformulando ora il problema diciamo: è possibile trovare, nei grafi, un percorso che passi per tutti i vertici una ed una sola volta ritornando al punto di partenza?

Abbiamo cercato quindi quello che viene chiamato un cammino hamiltoniano cioè un cammino che passa (una sola volta) per tutti i vertici di un grafo; possiamo imporre l'ulteriore condizione che il cammino si chiuda (punto di partenza e punto di arrivo coincidono) e allora si parlerà di cicli hamiltoniani. In effetti un ciclo hamiltoniano in un grafo è proprio un qualsiasi cammino semplice (ovvero senza incroci), chiuso, contenente tutti i vertici del grafo e un grafo è hamiltoniano se contiene un ciclo hamiltoniano. Cerchiamo un ciclo hamiltoniano sui nostri diagrammi.

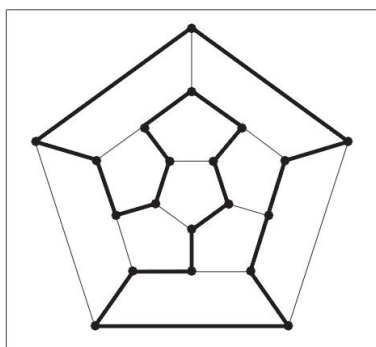


Figura 2.8: Uno dei possibili cicli hamiltoniani sul diagramma di Schlegel del dodecaedro regolare

Possiamo trovarne diversi sul dodecaedro regolare, ma non siamo riusciti a trovare un circuito hamiltoniano sul grafo del dodecaedro rombico. Riusciamo a dimostrare che il grafo del dodecaedro rombico non è hamiltoniano?

(Attenzione: questa domanda è molto più difficile della precedente in quanto non chiede se siamo riusciti a costruire il percorso ma vuole una dimostrazione del fatto che nessuno riuscirà a costruirne uno!)

Per dare una risposta a questa domanda osserviamo che la molteplicità dei vertici nel dodecaedro rombico è sempre 3 o 4 e i vertici di molteplicità 3 e quelli di molteplicità 4 sono alternati, nel senso che ciascun vertice di molteplicità 3 è collegato a 3 vertici, tutti di molteplicità 4 e ciascun vertice di molteplicità 4 è collegato a 4 vertici, tutti di molteplicità 3. Diventa allora abbastanza semplice concludere: un qualsiasi cammino semplice per i vertici del dodecaedro rombico deve necessariamente contenere vertici di molteplicità 3 alternati a quelli di molteplicità 4, ma in questo modo non può contenere tutti i vertici del poliedro, perché i vertici con molteplicità 4 sono sei e quelli con molteplicità 3 sono otto.

Si tratta però di un ragionamento costruito ad hoc sull'esempio in questione, e non si vede come si può eventualmente riportarlo ad altre situazioni (salvo casi molto particolari, in grafi che godano di proprietà analoghe). La situazione è molto diversa, quindi, rispetto all'analisi che abbiamo fatto con i grafi euleriani. In effetti questo è un problema famoso, e irrisolto: non si conosce un algoritmo (praticabile e soddisfacente) che, dato un grafo, permetta di costruire un ciclo hamiltoniano nel grafo (o di dimostrare che un tale circuito non esiste). Trattandosi di grafi finiti, c'è naturalmente la possibilità di elencare tutti i possibili circuiti (che sono comunque un numero finito) e controllare, per ciascuno di essi, se questo passa per tutti i vertici: si tratta però di una possibilità non praticabile, in quanto il numero dei possibili circuiti cresce esponenzialmente con il numero dei vertici.

### ESERCIZI PER CASA - IL CAVALLO DEGLI SCACCHI

Sapete tutti come si muove il cavallo nel gioco degli scacchi. Ecco qualche problema per il quale può essere utile una schematizzazione attraverso un grafo:

#### PROBLEMA 1

Un problema classico è quello di decidere se è possibile trovare un circuito (cioè un percorso chiuso) del cavallo che passi, una e una sola volta, attraverso tutte le caselle di una scacchiera e torni al punto di partenza. Ve lo propongo

## 2.1 IL TIROCINIO

---

qui (figura 2.9) su due mini-scacchiere, una scacchiera quadrata  $5 \times 5$  e una scacchiera a forma di croce. Se il percorso è possibile, descrivetelo; se non è possibile, giustificate questa impossibilità.

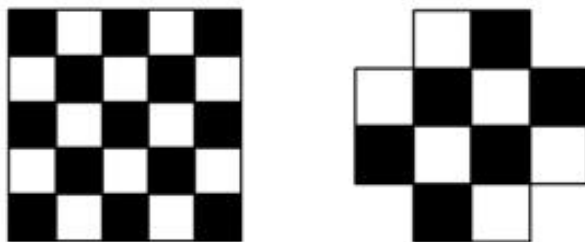


Figura 2.9: I due tipi di scacchiera

### PROBLEMA 2

Partiamo ora da una scacchiera ancora più piccola, di sole 9 caselle ( $3 \times 3$ ) e disponiamo nei quattro angoli i quattro cavalli, precisamente mettiamo i due cavalli bianchi (B) nei due angoli superiori e i due cavalli neri (N) negli angoli inferiori. (figura 2.10)

È possibile con una serie di mosse spostare i cavalli in modo da arrivare alla situazione invertita (come nella figura 2.10 qui sotto centrale)? Ed è possibile spostarli in modo da arrivare alla posizione nella figura 2.10 qui sotto a destra? Se è possibile, descrivete come; se non è possibile, giustificate questa impossibilità.

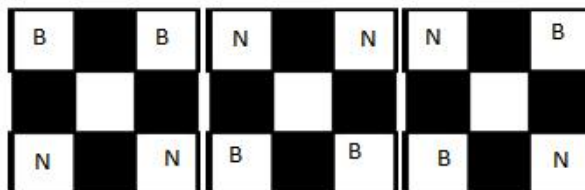


Figura 2.10: Spostamenti del cavallo



### 2.1.5 Terza lezione

(in gruppetti di 4 ragazzi)

**Soluzioni degli esercizi della scorsa lezione:**

PROBLEMA 1:

Dobbiamo tradurre il problema in un problema di grafi, considerando un grafo che abbia come vertici le caselle delle scacchiere e come spigoli le mosse consentite dal salto del cavallo: il problema proposto si traduce quindi nel chiedersi se esiste un cammino chiuso che tocchi tutti i vertici del grafo, ovvero se il grafo è hamiltoniano. Tuttavia, come abbiamo detto a lezione, non disponiamo di un criterio che ci dia immediatamente la risposta, quindi questa traduzione non ci fornisce automaticamente la soluzione del problema.

Sicuramente avrete trovato, per tentativi, una soluzione alla seconda parte del problema ma non alla prima parte. Come nel caso del dodecaedro rombico, però, anche qui è possibile un ragionamento ad hoc abbastanza semplice per giustificare il fatto che il grafo corrispondente alla scacchiera  $5 \times 5$  non è hamiltoniano. Osserviamo dunque il colore delle caselle: ogni mossa del cavallo collega una casella bianca con una nera e quindi un circuito su un grafo in cui gli spigoli corrispondono alle mosse del cavallo dovrà necessariamente alternare vertici corrispondenti alle caselle bianche e vertici corrispondenti a quelle nere. Nella scacchiera  $5 \times 5$  (e, generalizzando, in ogni scacchiera in cui il lato consista di un numero dispari di caselle) il numero delle caselle bianche (13) è maggiore di quello delle caselle nere (12) e quindi non esiste nel grafo un circuito chiuso che tocchi tutti i vertici una sola volta. Contrariamente al caso del dodecaedro rombico (in cui la struttura della dimostrazione dell'impossibilità era del tutto analoga, anche se basata su considerazioni diverse), in questo caso la dimostrazione ci garantisce solo che non c'è un circuito chiuso, ma potrebbe esserci - e in effetti c'è - un cammino che parte da una casella bianca e arriva a un'altra casella bianca.

PROBLEMA 2

Anche il questo problema, probabilmente per tentativi, avrete trovato una soluzione alla prima parte del problema mentre non ci sarete riusciti per la seconda parte. Per vedere la ragione di questa differenza di comportamento, si può osservare che un cavallo (bianco o nero) non può mai occupare la casella centrale e, per quanto riguarda le altre otto caselle, si può muovere solo secondo un circuito obbligato. Numerando le caselle, come nella figura 2.13, si vede che dalla posizione 1, ad esempio, il cavallo può andare solo nella posizione 8 o nella 6. Se “districhiamo” la configurazione delle posizioni,

## 2.1 IL TIROCINIO

---

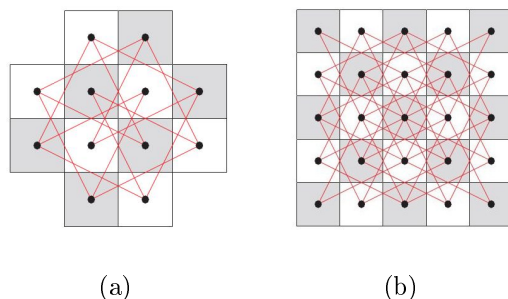


Figura 2.11: Grafi del problema nei due casi (sono indicate tutte le possibili posizioni del cavallo e tutti i possibili spostamenti)

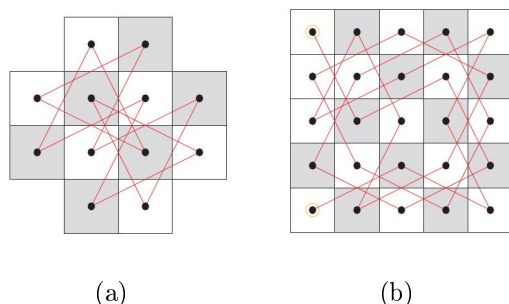


Figura 2.12: Una delle possibili soluzioni rispettivamente nel primo e nel secondo caso del problema

otteniamo un grafo i cui vertici sono le caselle e gli spigoli le mosse possibili. Il grafo è molto semplice da descrivere, perché è composto da un unico ciclo, e risulta quindi chiaro che i cavalli non si possono “sorpassare” lungo il circuito, senza che in qualche momento due cavalli occupino la stessa casella, e dunque l’ordinamento (ciclico) che avevano in partenza non può cambiare. Questo dimostra perché il secondo quesito è impossibile, mentre si può trovare una soluzione al primo spostando tutti i cavalli di quattro vertici (o caselle) lungo il circuito (e quindi in sedici mosse).

Abbiamo iniziato questa lezione con un nuovo problema: in uno spiazzo ci sono tre case e tre fonti: una d’acqua, una di elettricità e una di gas. E’ possibile collegare ciascuna casa (1, 2, 3) con ciascuna fonte (A, L, G)? Non ci importa la lunghezza o il tragitto delle linee, ma per problemi di varia natura, i cavi non possono incrociarsi. È possibile? Potete provare a riformulare il problema facendo riferimento anche a un grafo.

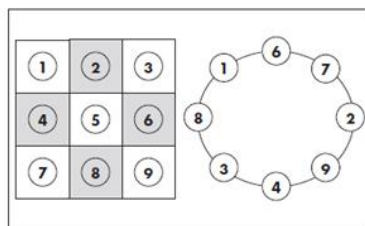


Figura 2.13: Grafo circolare



Figura 2.14: Il problema delle tre case e dei tre servizi

Siamo giunti alla conclusione che il problema è impossibile infatti se proviamo a disegnare solo sei delle nove linee che occorrono (ad esempio colleghiamo la prima casa solo ad acqua e luce, la seconda casa solo a luce e gas e la terza casa solo ad acqua e gas) questi formano una curva semplice (cioè senza incroci) e chiusa; è importante osservare che questo dipende solo dal modo in cui sono connessi i sei vertici, non dalla loro posizione o distanza, e neppure dal percorso scelto per le diverse linee (purché queste non si intersechino al di fuori dei vertici). Una qualunque curva semplice e chiusa divide il piano in due regioni, una limitata all'interno e una illimitata all'esterno, entrambe che hanno come bordo la curva in questione: questo fatto all'apparenza così "innocuo" e certamente molto intuitivo costituisce l'enunciato del teorema di Jordan ed è in realtà assai complicato da dimostrare. (N.B. il teorema non vale se la curva non è semplice, o se la curva non è chiusa)

Abbiamo visto che il problema non cambia se spostiamo l'ordine dei punti, l'importante è che la curva continui ad essere chiusa e semplice.

Affinché il problema dato all'inizio sia risolubile, ogni nuovo cammino deve essere tutto interno o tutto esterno alla curva, e per completare la soluzione occorre aggiungere i tre cammini mancanti (quello dalla prima casa al gas, quello dalla seconda casa all'acqua e quello dalla terza casa alla luce). Tracciando uno dei tre cammini rimanenti all'interno della curva, questo impedirà il passaggio per l'interno agli altri due (dato che i cammini non possono incrociarsi); tracciando uno dei tre cammini all'esterno della curva,

## 2.1 IL TIROCINIO

---

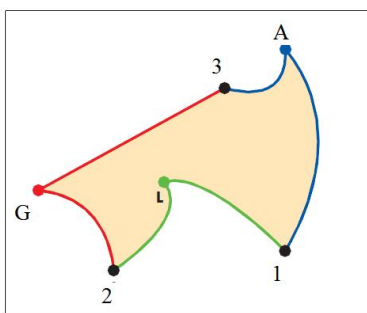


Figura 2.15: Sei dei nove collegamenti del problema

per lo stesso motivo questo impedirà il passaggio per l'esterno agli altri due. Il terzo cammino è quindi comunque bloccato.

Abbiamo cambiato le regole del gioco che ci hanno portato a tre diverse situazioni. Proviamo a risolvere il problema con la regola che è possibile passare dietro al nostro foglio . . . . Abbiamo così fatto 3 situazioni:

- la prima dà la possibilità di entrare ed uscire sui 4 lati nel seguente modo: se si esce da sopra si può rientrare di sotto e viceversa; se si esce a sx si può rientrare a dx; se si esce ad esempio in alto a dx bisogna rientrare in basso sempre a dx.
- la seconda dà la possibilità di passare solo da dx a sx ma con una regola diversa rispetto al caso precedente. Se si esce, infatti, a dx in basso bisogna rientrare a sx in alto.
- la terza dà la possibilità, come la seconda, di passare solo da dx a sx ma rimanendo, come nel primo caso, alla stessa altezza: se esco cioè a dx in basso rientro a sx in basso.

(nel caso delle figure qui sotto 2.16 basta seguire i colori che indicano le strade permesse)

Con queste nuove regole il problema resta sempre lo stesso: riuscite nei diversi casi ad unire le tre case ai tre diversi servizi senza fare incrociare le linee?!?

Nei primi due casi il problema ha soluzione.

Qui sotto si trova un esempio che parte dai primi sei cammini disegnati precedentemente e sfrutta le nuove a “regole” per aggiungere gli altri tre cammini.

Nel terzo caso il problema è impossibile come nel caso del piano; il punto cruciale, infatti, non è tanto il “poter passare per dietro”, ma proprio il teorema di Jordan.

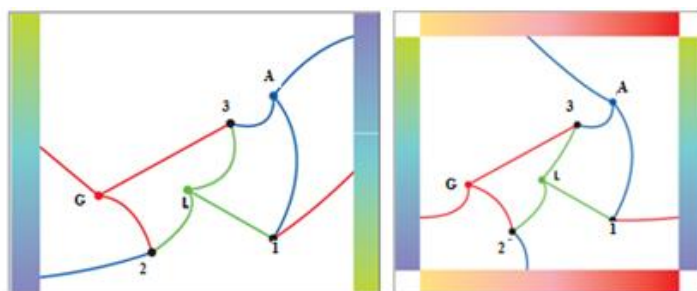


Figura 2.16: Soluzioni nei vari casi

Risolvere il problema con queste regole è equivalente a risolverlo su una superficie diversa dal piano. Risolvere il problema nel primo caso equivale a risolverlo su un toro (o ciambella) che si ottiene unendo i lati con lo stesso colore.

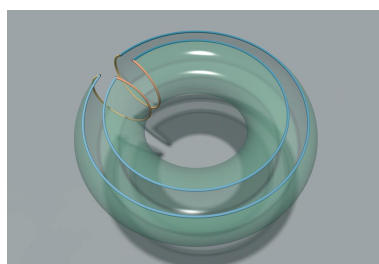


Figura 2.17: Soluzione sul toro

Risolvere il problema nel secondo caso equivale a risolverlo su un nastro di Moebius.

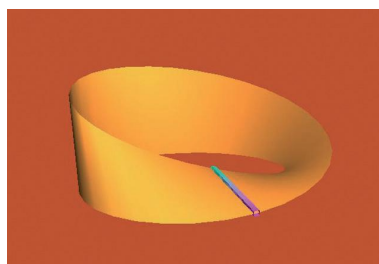


Figura 2.18: Soluzione sul nastro

Risolvere il problema nel terzo caso equivale a risolverlo su un cilindro.

Abbiamo detto che la motivazione risiede nel fatto che sul nastro di Moebius e sul toro è possibile tracciare una curva semplice e chiusa senza dividere la superficie in due regioni. In figura 2.20 si vede un esempio.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

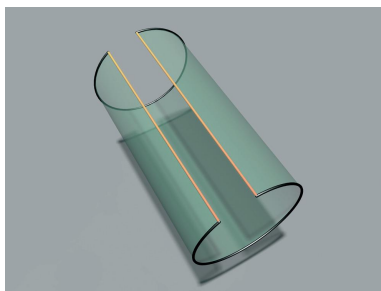


Figura 2.19: Soluzione sul cilindro

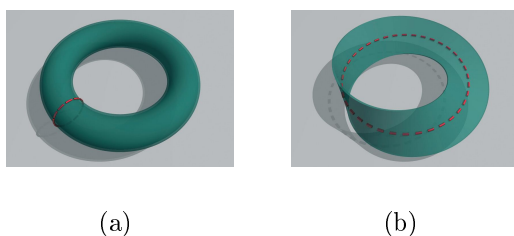


Figura 2.20: Taglio sul cilindro e sul nastro

Naturalmente, questo giustifica soltanto il fatto che non si applica a queste due situazioni il ragionamento che ci ha portato a dimostrare l'impossibilità nel caso piano, e non basterebbe a dire che il problema è risolvibile ma abbiamo già trovato la soluzione esplicita sul solido che ci vale come "dimostrazione".

Nel caso del cilindro, invece, una giustificazione rigorosa è più riposta, perché passa attraverso il fatto che anche sul cilindro, come sul piano, ogni curva chiusa e semplice sconnette (intuitivamente: la divide in più pezzi) la superficie, anche se questa volta non si può più parlare di "interno" ed "esterno" e ci sono due situazioni possibili: la curva può dividere il cilindro in due cilindri oppure in un disco e un cilindro bucoato (figura 2.21).

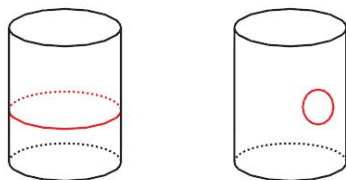


Figura 2.21: Taglio sul cilindro

### 2.1.6 Quarta lezione

(di 20 minuti)

È stata fatta una breve introduzione sui poligoni e sul modo di identificare i lati; poi è stato assegnato loro per casa il compito di identificare alcune superfici partendo dai poligoni qui di seguito:

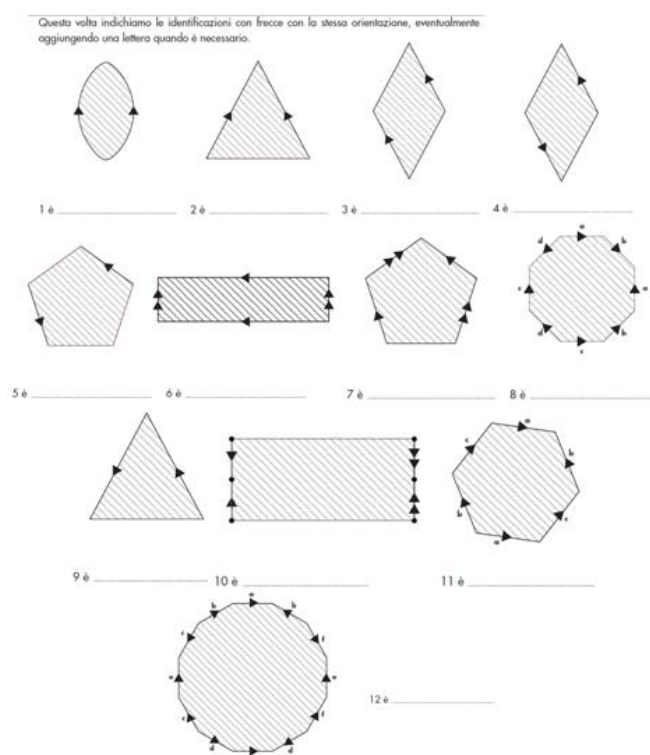


Figura 2.22: Poligoni da identificare

## 2.1 IL TIROCINIO

### 2.1.7 Quinta lezione

(lezione frontale)

Nella scorsa lezione abbiamo visto come partendo da un rettangolo si possano costruire un cilindro, un nastro di Moebius e un toro, incollando i lati secondo le indicazioni date dal problema. Avete provato ad utilizzare la stessa tecnica per costruire altre superfici, partendo dalle identificazioni date. Questa volta indichiamo le identificazioni con frecce con la stessa orientazione, eventualmente aggiungendo una lettera quando è necessario. Ricordiamoci sempre che parliamo di topologia e che quindi possiamo pensare di “stiracchiare” la carta quanto vogliamo: potrà accadere che una prima manipolazione coi modelli reali di carta faccia vedere il risultato “a mezza strada” e che l’immaginazione poi debba fare il resto. Quindi le costruzioni che effettuerete con la carta sono solo un supporto all’immaginazione.

Le figure che abbiamo visto sono le seguenti:

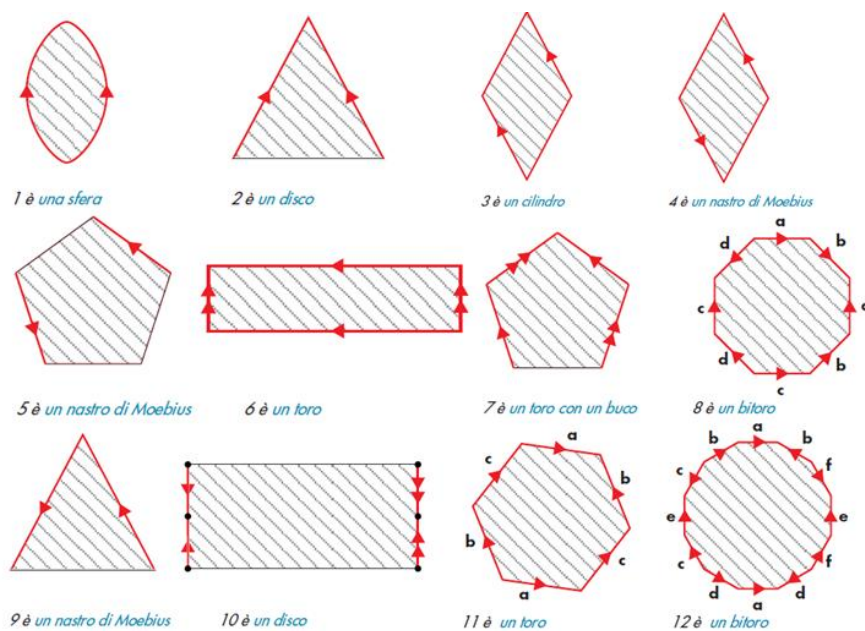
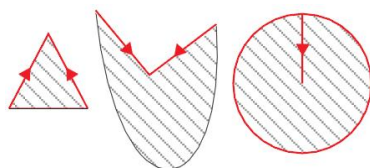


Figura 2.23: Poligoni



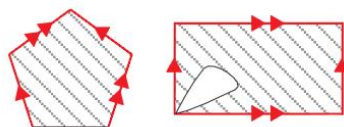
Alcune precisazioni:

2 - potrebbe sembrare un cono, e la risposta è corretta. Dobbiamo però osservare che un cono è la stessa cosa di un disco, pensiamo, ad esempio, di effettuare le identificazioni con un materiale non rigido in modo da poterla realizzare restando su un piano.



3,4,5,6 - sono sostanzialmente casi già esaminati con il problema delle tre case: l'unica cosa che dobbiamo sottolineare è che non importa quale sia la forma del poligono di partenza.

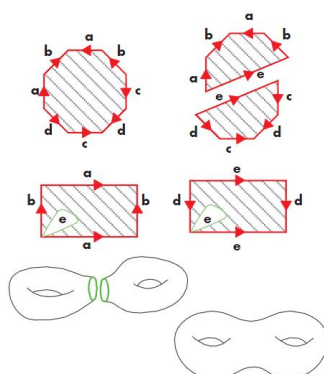
7 - la figura seguente può aiutare a visualizzare che si tratta di un toro con un buco, riportando il problema a un altro già esaminato.



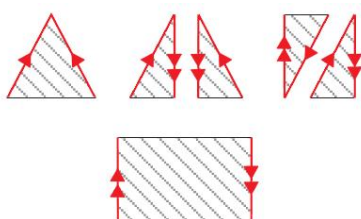
8 - può essere utile immaginare di suddividere il poligono in due parti, una che contiene i lati su cui sono tracciate le frecce  $a$  e  $b$  e l'altra su cui sono tracciate le frecce  $c$  e  $d$ . Nella suddivisione si creano due nuovi lati (uno su ogni parte) che alla fine ci dovremo ricordare di incollare nuovamente. Le due parti ottenute con il taglio appena fatto sono due tori bucati (è proprio il caso 7) e i due lati generati con il taglio diventano le due circonferenze di bordo in ciascun toro bucato. Resta ora da incollare tali circonferenze, e si ottiene così un bitoro. Potrebbero esserci dubbi sulla liceità di questa operazione (dopo tutto si è detto che in topologia si può deformare finché si vuole, ma non si può tagliare e incollare) ma è bene sottolineare che le operazioni "taglia-e-cuci" sono consentite purchè, quando si riincolla, si abbia cura di farlo attaccando insieme punti che erano identificati fra loro prima del taglio.

## 2.1 IL TIROCINIO

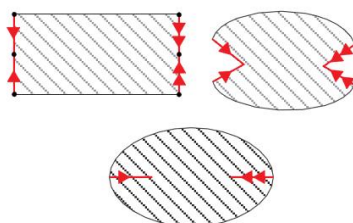
---



9 - Un modo per rendersi conto che si tratta di un nastro di Moebius è quello di immaginare di tagliare il triangolo lungo l'altezza e poi rincollare i due triangoli ottenuti lungo la freccia rossa (rispettando il verso!): si ottiene allora il nastro di Moebius nella posizione "familiare" di rettangolo con lati opposti identificati, che abbiamo già imparato a riconoscere.

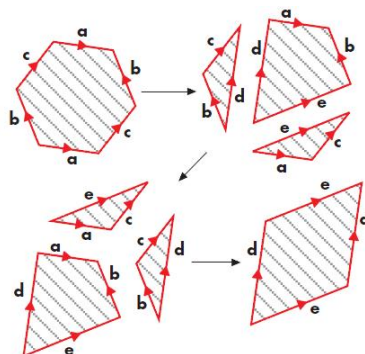


10 - potrebbe sembrare un rettangolo piegato a metà, il che va benissimo, ma, dal punto di vista della topologia, è la stessa cosa di un disco. Il problema è analogo a quello del numero 2.

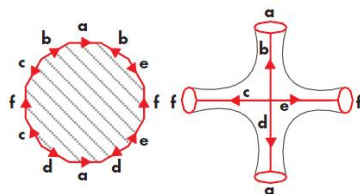


## 2.1 IL TIROCINIO

11 - una maniera per riconoscere che si tratta di un toro, riconducendosi a uno degli esempi già visti, è quello di effettuare le operazioni di “taglia e cuci” descritte nella figura seguente.



12 - Si può cominciare per esempio a immaginare di identificare le 4 coppie di lati  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ . Si ottiene una specie di croce a 4 braccia e dobbiamo ancora identificare fra loro a due a due le 4 circonferenze (due  $a$  e due  $f$ ) che figurano come bordo: si ottiene un bitoro.



### IL GENERE DI UNA SUPERFICIE

Vediamo qui sotto (figura 2.24) un numero sempre crescente di ciambelle.

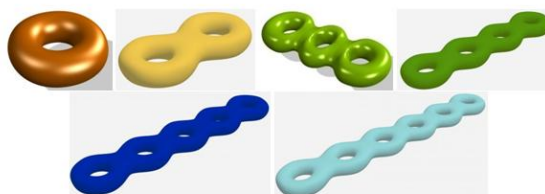


Figura 2.24: Ciambelle

## 2.1 IL TIROCINIO

---

Indichiamo con  $g$  il numero di buchi:  $g = 1, g = 2, \dots, g = 6$ .

Ora qui sotto (figura 2.25) abbiamo delle sfere con manici in numero sempre crescente

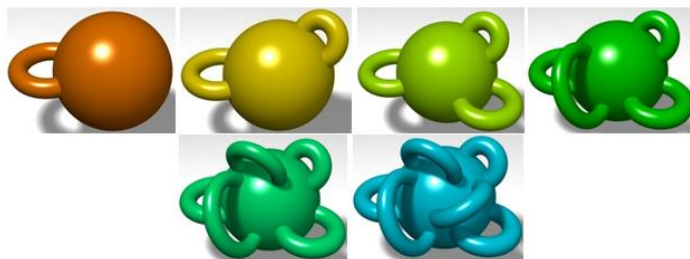


Figura 2.25: Manici

Questa volta indichiamo con  $g$  il numero dei manici.

Dal punto di vista topologico manici e ciambelle sono due diverse interpretazioni della stessa situazione. In effetti ogni immagine delle ciambelle è deformabile in una di quelle con i manici (e, precisamente, in quella associata allo stesso numero  $g$ ) e quindi le due famiglie sono la stessa cosa dal punto di vista della topologia.

Il numero  $g$  è un invariante cruciale per distinguere le superfici:  $g$  si dice il genere della superficie, e si può definire come il massimo numero di curve semplici e chiuse, fra loro disgiunte, che si possono disegnare sulla superficie senza tagliarle in due pezzi.

E' quindi questa la "vera" definizione di  $g$  e non il numero di manici o di buchi. Considerare il numero di manici e di buchi resta comunque valido nel caso di superfici disposte nello spazio analogamente a quelle viste sopra. Ci possono però essere delle superfici che sono sì topologicamente la stessa cosa di una ciambella - questo vale in effetti per tutte le superfici -, ma sono disposte nello spazio in modo tale che non sia così ovvio capire cosa sono i "buchi" (pensate ad esempio ad una superficie che sembra intrecciata ma che in realtà è un semplice toro).

Di più, si può dimostrare (e questo è il contenuto del teorema di classificazione delle superfici) che qualunque superficie (connessa, compatta, orientabile e senza bordo<sup>6</sup>) è deformabile in una sfera con  $g$  manici o, equivalentemente, in una ciambella a  $g$  buchi.

---

<sup>6</sup>Dire che la superficie è connessa significa che non è l'unione di due pezzi staccati; dire che è orientabile significa che non contiene un nastro di Moebius; dire che è senza bordo significa che intorno a ogni punto c'è un intero dischetto nella superficie (non si sono quindi fatti dei fori: un punto sul bordo di questi fori non avrebbe intorno un disco,

Abbiamo dunque identificato gli oggetti intorno a noi con una delle superfici sopra viste: tazze (magari una tazza senza manici, una con un solo manico, una con due manici...), portapenne, zaini, forbici, ... (figura 2.26)

Ricordatevi che a noi interessa la superficie (quindi non l'oggetto tridimensionale, ma la "buccia" di questo oggetto). Nel momento in cui vorremmo essere più formali, "riconoscere" la superficie significherebbe determinarne il genere (e, usando il teorema di classificazione delle superfici, questo ci garantirebbe che la superficie è omeomorfa, ovvero topologicamente equivalente, a quelle nei disegni con lo stesso genere).



Figura 2.26: Il genere di vari oggetti

### LA CARATTERISTICA DI EULERO

La caratteristica di Eulero è un numero intero, facilmente calcolabile, che si può associare a ogni superficie e che, come il genere, è un invariante che permette di distinguere due superfici topologicamente non equivalenti.

ma un semidisco); dire che è compatta significa imporre un'ipotesi più tecnica che nel caso che ci interessa (superfici nello spazio tridimensionale) equivale a richiedere che la superficie sia limitata e che non ci siano dei fori come quelli che si potrebbero ottenere togliendo a una superficie un punto, o un disco chiuso. Quindi, ad esempio, un disco o un cilindro non fanno parte di questa lista: né se li si pensa comprendendo le circonferenze di bordo (in tal caso sono superfici compatta, ma con bordo), né se li si pensa escludendo le circonferenze di bordo (in tal caso sono superfici non compatte). Si può poi dimostrare anche che ogni superficie compatta connessa e orientabile è deformabile in una sfera a  $g$  manici a cui siano stati praticati un certo numero  $k > 0$  di fori, togliendo dei dischi aperti: e si ritrova così il disco (una sfera con un foro) e il cilindro (una sfera con due fori).

## 2.1 IL TIROCINIO

Abbiamo incontrato vari esempi di grafi che si possono disegnare su un foglio di carta, (senza che i loro spigoli si intersechino al di fuori dei vertici) (grafi planari) e almeno un esempio di grafo che non si può disegnare su un foglio di carta (il grafo relativo al problema delle tre case).

Qui sotto avete qualche esempio di grafi planari. Nelle prime righe della tabella abbiamo inserito per ciascuno di essi il numero dei vertici ( $V$ ) e il numero degli spigoli ( $S$ ). Provate ora a contare il numero delle regioni in cui il grafo divide il piano e inseritelo nella tabella alla colonna  $F$  (che sta per facce).

Attenzione: fra queste regioni è compresa anche la regione esterna, illimitata.

	grafo A	grafo B	grafo C	grafo D	grafo E
	<b>V</b>	<b>S</b>	<b>F</b>	...	...
	Grafo A	20	30	.....	.....
	Grafo B	14	24	.....	.....
	Grafo C	6	12	.....	.....
	Grafo D	9	17	.....	.....
	Grafo E	8	12	.....	.....

Stessa cosa (contare facce, spigoli e vertici) si può fare con i poligoni, anche perché abbiamo visto che questi grafi sono lo sviluppo di alcuni di essi. La relazione che lega questi “oggetti” è  $V - S + F = 2$ ; abbiamo però visto che questa relazione non è valida sempre ad esempio se facciamo il conto sul grafo del problema delle tre case sul toro o sui poliedri qui sotto vediamo che il risultato è differente.

poliedro A	poliedro B	poliedro C		
	<b>V</b>	<b>S</b>	<b>F</b>	<b>V-S+F</b>
	Grafo tre case	6	9	.....
	Poliedro A	9	18	.....
	Poliedro B	28	60	.....
	Poliedro C	16	32	.....

Riuscire a proiettare su un piano il grafo di vertici e spigoli di un poliedro in modo che gli spigoli non si incontrino (e quindi ottenendo un grafo planare) equivale a richiedere che il poliedro sia semplicemente connesso, ovvero topologicamente equivalente a una sfera. Questa condizione si può semplicemente descrivere immaginando di “gonfiare” il poliedro, come se fosse un palloncino: tutti i poliedri relativi ai grafi planari si gonfierebbero in una sfera, mentre i poliedri  $ABC$  si gonfierebbero in un salvagente, o in un salvagente “a due piazza”: ritroviamo quindi manici e ciambelle! Ecco allora che la caratteristica di Eulero (ovvero il numero  $\chi = V - S + F$ ) interviene a saldare tutto il lavoro fatto: quello sui grafi (è un numero che permette di distinguere se il grafo è planare oppure no, quindi si lega al problema che si è considerato con le tre case) e quello sulle superfici (è un numero che, esattamente come il genere a cui in effetti è legato, permette di distinguere superfici che non sono topologicamente equivalenti). In generale, per una superficie qualsiasi, si può dimostrare che il numero  $V - S + F$  non è mai maggiore di due, è due solo nel caso della sfera, ed è legato al genere dalla relazione  $V - S + F = 2 - 2g$ .

### CILINDRI E NASTRI DI MOEBIUS

Prendete vari rettangoli di carta lunghi e stretti, forbici e scotch. Provate a costruire un nastro di Moebius e a osservarlo: come abbiamo visto basta unire i due lati corti di un rettangolo dopo aver dato al rettangolo una mezza torsione. Costruiamo anche un cilindro che ci serve per il confronto. Un cilindro ha per bordo due circonferenze; mentre un nastro di Moebius ha per bordo una sola circonferenza (può servire seguire col dito il bordo dell’oggetto, dopo aver segnato un punto di partenza).

Se si taglia a metà un cilindro lungo la circonferenza “centrale” si ottengono due cilindri di altezza metà; se si taglia a metà un nastro di Moebius lungo la circonferenza “centrale” si ottiene... un solo oggetto. Questo oggetto però, cos’è? In effetti si tratta di un “cilindro” (lo si può constatare, seguendo il bordo con il dito), ma immerso nello spazio tridimensionale in un modo inusuale. Per dare senso a questa affermazione, si può osservare che le due circonferenze di bordo sono allacciate (mentre nel cilindro “normale” non lo sono).

Se si taglia un cilindro lungo una circonferenza a  $1/3$  dell’altezza si ottengono due cilindri, uno di altezza  $1/3$  e l’altro di altezza  $2/3$  rispetto all’altezza del cilindro di partenza; se si fa la stessa cosa con un nastro di Moebius si ottiene... un nastro di Moebius allacciato a un “cilindro”, del tipo di quello che era stato ottenuto nella “mossa” precedente.

Quindi abbiamo visto che otteniamo un cilindro attaccando insieme i

## 2.1 IL TIROCINIO

---

due lati corti di un rettangolo senza introdurre torsioni, mentre otteniamo un nastro di Moebius se li attacchiamo dopo aver dato una mezza torsione. Potete continuare questa indagine, provando a costruire altre superfici nella stessa maniera ma con 2, o 3, o 4 o ... mezze torsioni e su ciascuna di queste controllare per esempio come è fatto il bordo e cosa succede tagliandole a metà. Possiamo registrare le osservazioni in una tabella.

mezze torsioni	bordo	tagliando a metà
0 cilindro	due circonferenze	due cilindri
1 moebius	.....	.....
2	.....	.....
3	.....	.....
4	.....	.....
5	.....	.....

Aumentando il numero di mezze torsioni, lo schema con cui si alternano le risposte non cambia. Con un numero pari di mezze torsioni si ottiene sempre un “cilindro”, mentre con un numero dispari di mezze torsioni si ottiene sempre un “nastro di Moebius” (nel senso che specificheremo tra poco). Nel caso di un numero pari di mezze torsioni, il bordo è formato da due circonferenze, mentre nel caso di un numero dispari di mezze torsioni il bordo è formato da una sola circonferenza. Tagliando a metà i “cilindri” (numero pari di mezze torsioni) si ottengono sempre due oggetti e tagliando a metà i “nastri di Moebius” (numero dispari di mezze torsioni) si ottiene sempre un solo oggetto. Tutti questi oggetti sono poi a loro volta dei “cilindri”.

In che senso secondo voi possiamo dire che tutti gli oggetti che si ottengono in questa maniera con un numero pari di mezze torsioni sono dei cilindri e tutti quelli ottenuti con un numero dispari di mezze torsioni sono dei nastri di Moebius?

Per dare una risposta a questa domanda possiamo fare riferimento alle operazioni ammesse in topologia, ovvero deformazioni e operazioni del tipo “taglia e cuci”, avendo cura di incollare esattamente seguendo le identificazioni che avevamo prima del taglio.

Possiamo fare un’operazione “taglia e cuci” per riportare in un nastro di Moebius uno qualunque di questi oggetti con un numero dispari di mezze torsioni nel modo seguente: si taglia l’oggetto lungo una linea che congiunge due punti “uno sopra l’altro” sull’unica circonferenza di bordo, dopo aver segnato dei punti di riferimento che serviranno poi per rincollarlo; si eliminano le mezze torsioni in eccesso e si rincollano poi le due estremità, avendo cura



## 2.1 IL TIROCINIO

---

di rispettare i punti di riferimento fissati. In questo modo, si vede che si può ritornare a un nastro di Moebius (nella forma usuale).

Allo stesso modo, partendo da un oggetto con un numero pari di mezze torsioni, si riesce a fare un'operazione "taglia e cuci" che lo riporta ad un cilindro (nella forma usuale).

È importante notare che non si può invece, con lo stesso tipo di operazione, riportare un cilindro (o un qualsiasi "cilindro") in un nastro di Moebius, o viceversa.

Riuscite a vedere qualcosa che distingua il cilindro "normale" (senza torsioni) da quello ottenuto con due mezze torsioni? E il nastro di Moebius "normale" (quello ottenuto con una mezza torsione) da quello ottenuto con tre mezze torsioni? (Suggerimento: osservate il bordo)

Seguendo il suggerimento, osserviamo che nel cilindro "normale", rispetto a quello ottenuto con due mezze torsioni, cambia il modo in cui sono disposte le circonferenze di bordo. Infatti, nel cilindro ottenuto senza torsioni le due circonferenze sono "slacciate", mentre in quello con due mezze torsioni sono "allacciate".

Analogamente, il bordo del nastro di Moebius ottenuto con una mezza torsione è formato da una curva non "annodata" (come nelle figure qui sotto 2.27 a sinistra), mentre il bordo del "nastro di Moebius" ottenuto con tre mezze torsioni è una circonferenza annodata (come nelle figure qui sotto 2.27 a destra). Possiamo anche a questo punto ritornare sul problema di identificare l'oggetto ottenuto tagliando a metà un nastro di Moebius, e riconoscere che si tratta di un "cilindro" (con due mezze torsioni).

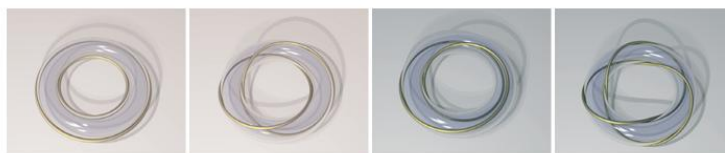


Figura 2.27: Differenza dei vari bordi

In questa lezione non sono stati trattati i temi del cilindro e del nastro di Moebius e alcune parti sono state accorciate ma l'intera dispensa è stata fornita ai ragazzi. E' stata fatta vedere ai ragazzi la dimostrazione della caratteristica di Eulero riportata nel libro "Che cos'è la matematica?" di Courant-Robbins [6] che riporto qui di seguito.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

*Dimostrazione.* Per dimostrare la formula di Eulero, immaginiamo che il poliedro semplice sia cavo, con una superficie fatta di gomma sottile. Se si asporta allora una delle facce del poliedro cavo, si può deformare la superficie rimanente fino a distenderla su un piano. Naturalmente, le aree delle facce e gli angoli determinati dagli spigoli del poliedro saranno alterati da questo procedimento, ma il reticolato piano dei vertici e degli spigoli conterrà lo stesso numero di vertici e di spigoli del poliedro originale, mentre il numero dei poligoni sarà diminuito di uno, perché si è eliminata una faccia. Faremo ora vedere che, per il reticolato piano,  $V - E + F = 2$ .

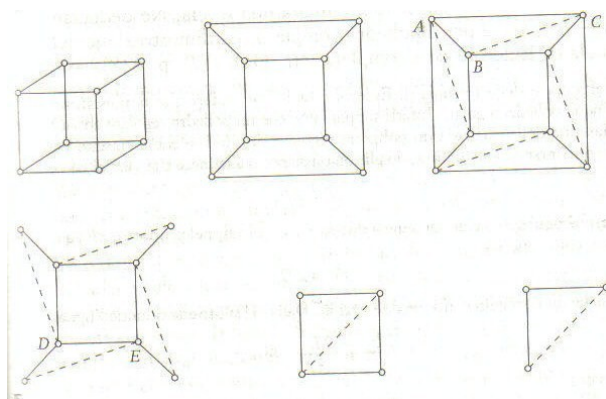


Figura 2.28: Dimostrazione della caratteristica di Eulero

Prima di tutto effettuiamo una triangolazione del reticolato piano procedendo come segue: tracciamo una diagonale di un poligono del reticolato che non sia già un triangolo. L'effetto di questa operazione è di aumentare di uno sia  $E$  che  $F$ , mantenendo così inalterato il valore di  $V - E + F$ . Si continuano a tracciare diagonali finché la figura risulta interamente formata di triangoli. Nel reticolato diviso in triangoli,  $V - E + F$  ha lo stesso valore che aveva prima, perché l'operazione di tracciare diagonali non lo ha alterato. Alcuni dei triangoli hanno dei lati sul contorno del reticolo piano. Di questi qualcuno, come  $ABC$ , ha soltanto un lato sul contorno, mentre altri possono averne due. Prendiamo uno di questi triangoli e asportiamo quella parte del perimetro che non appartiene a qualche altro triangolo. Così da  $ABC$  asportiamo il lato  $AC$  e la faccia da questo limitata, lasciando i vertici  $A, B, C$  e i due lati  $AB$  e  $BC$ ; mentre da  $DEF$ , asportiamo la faccia racchiusa, i due lati  $DF$  e  $FE$ , e il vertice  $F$ . L'eliminazione di un triangolo del tipo  $ABC$  fa diminuire  $E$  e  $F$  di uno e lascia  $V$  inalterato, cosicché il valore di  $V - E + F$  rimane lo stesso. L'eliminazione di un triangolo del tipo  $DEF$  fa diminuire  $V$  di uno,  $E$  di due, e  $F$  di uno cosicché il valore  $V - E + F$  rimane ancora lo stesso. Con una successione opportunamente scelta di queste operazioni

si possono eliminare i triangoli aventi dei lati sul contorno (che muta ad ogni eliminazione), finché rimane un solo triangolo, con tre lati, tre vertici e una faccia. Per questo semplice reticolato si ha  $V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1$ . Ma abbiamo visto che il valore di  $V - E + F$  rimane inalterato, perciò, anche nel reticolo originario piano,  $V - E + F$  deve essere uguale a 1, e quindi è uguale a 1 per il poliedro da cui sia stata eliminata una faccia. Ne deduciamo che  $V - E + F = 2$  per il poliedro completo. La dimostrazione della formula di Eulero per i poliedri è così completa.  $\square$

## 2.1 IL TIROCINIO

---

### 2.1.8 Teoria dei nodi

Contemporaneamente alle lezioni di topologia per l'intera classe è stata affrontata la teoria dei nodi con una quindicina di ragazzi (le lezioni effettive sono state due delle tre previste). Questa parte non è stata oggetto di verifica.

Il programma pensato inizialmente è il seguente:

#### ARGOMENTI

A - Manipolazione e prime definizioni di nodi:

- Definizione di nodo;
- Nodi equivalenti;
- Diagramma di un nodo;
- Chiralità del nodo.

B - Mosse di Reidemeister e teorema di Reidemeister.

C - Invarianti di un nodo e polinomio di Alexander. (matrici)

[D - Polinomio di Jones.]

E - Nodi borromei e nodi taurini.

A e B sono stati trattati nella prima lezione.

C nella seconda lezione.

D ed E non sono stati affrontati.

### Prima lezione

(con l'aiuto di una presentazione power point e di corde per "fare" i nodi)

Esiste una branca della topologia chiamata teoria dei nodi che, come dice il nome stesso, studia quelli che sono definiti nodi, questi sono così importanti perché trovano riscontro in varie applicazioni di tipo pratico: inizialmente furono studiati perché si era convinti che l'atomo avesse le caratteristiche di un nodo, abbandonata questa idea i nodi continuano ad avere applicazioni nel campo della genetica e della biologia (DNA) ma anche della fisica.

Fate un nodo, uno qualsiasi . . . quello che meglio sapete fare: un nodo semplice, uno scorsoio . . . questa categoria dei nodi come li avete ora davanti non è ancora quella di cui si occupa la teoria dei nodi in quanto le due estremità libere creano qualche problema perché equivalgono ad aver fatto un taglio. . . Se ora infatti voi unite le due estremità libere con dello scotch otteniamo gli oggetti di studio di questa branca della matematica.

Riuscite ora a sciogliere il vostro nodo senza fare tagli?

In questo modo avrete in un certo senso "fissato" il nodo indissolubilmente: ad esempio, se avete annodato la corda con un nodo semplice, unendo i capi trovate un nodo che in matematica viene chiamato nodo trifoglio. Potrete anche ridisporlo sul tavolo in molti modi diversi, ma, se non tagliate la corda, si tratterà sempre di questo nodo.

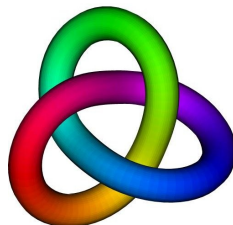


Figura 2.29: Nodo trifoglio

Se invece avete annodato la corda con un nodo come nella prima immagine di sotto (figura 2.30 quando unite i capi troverete che la corda, una volta adagiata sul tavolo, potrà assumere l'aspetto del nodo che in matematica si chiama "nodo ad otto" e che forse conoscete già come "nodo savoia").

Se poi non annodate per nulla la corda, dopo averne unito i capi, potrete disporla sul tavolo in una forma più o meno circolare: si tratta di un "finto nodo" che in matematica si chiama nodo banale.

Diamo quindi una definizione di nodo: un nodo è una curva semplice chiusa nello spazio tridimensionale.

## 2.1 IL TIROCINIO

---



(a)

(b)

Figura 2.30: Nodo savoia

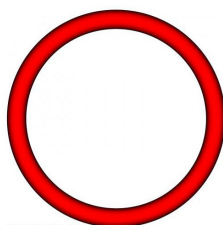


Figura 2.31: Nodo banale

Questo oggetto matematico modella un nodo di corda molto fine, i cui estremi sono stati incollati.

Ora provate a manipolare questi nodi, senza mai staccare i capi che avete unito. Qualunque cosa ne facciate, rigirandoli, “annodandoli” ulteriormente etc.:

- non potrete mai ottenere dal nodo trifoglio il finto nodo, né dal finto nodo il nodo trifoglio
- non potrete mai ottenere dal nodo trifoglio il nodo a otto, né viceversa;
- qualunque “groviglio” facciate al finto nodo, potrete poi riportarlo nella forma della circonferenza, sempre senza tagliare la corda, cosa che per i nodi “veri” non è possibile;
- se invece avete annodato la corda con un nodo scorsoio, e poi ne avete unito i capi, potrete scioglierlo e disporlo come il finto nodo; potrete anche partire dal finto nodo per ottenere lo stesso nodo scorsoio. Quindi il nodo scorsoio è in realtà un finto nodo.

E l’elenco potrebbe continuare...

I nodi rappresentano una situazione in cui ciò che conta non è l'oggetto in sé ma la maniera in cui l'oggetto è immerso nello spazio tridimensionale. Se ci interessasse solo l'oggetto in sé, sarebbe molto facile classificare i nodi: basterebbe contare quante sono le loro componenti.

Vediamo ad esempio nodi a più componenti che in realtà si chiamano link ma per semplicità continueremo a chiamarli nodi e indicheremo il numero di componenti.

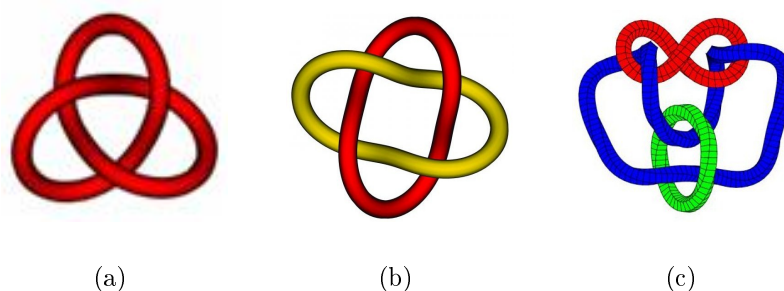


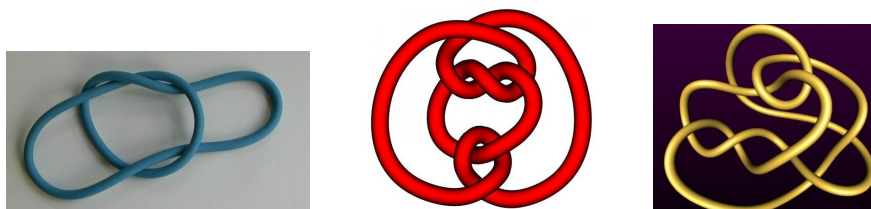
Figura 2.32: Rispettivamente nodi a una componente, a due componenti (link di Hopf) e a tre componenti

Noi ci occuperemo di nodi a una sola componente.

In realtà il problema di classificare i nodi è una questione molto difficile (e tutt'ora aperta): ciò che ci interessa è la maniera in cui la curva è immersa nello spazio tridimensionale e non è affatto ovvio decidere se due curve sono o non sono lo stesso nodo.

Alcune volte è facile vedere che manipolando una curva se ne può ottenere un'altra che rappresenta lo stesso nodo ma tuttora non esiste un algoritmo generale per distinguere due nodi e neppure per distinguere se un nodo è o no un finto nodo.

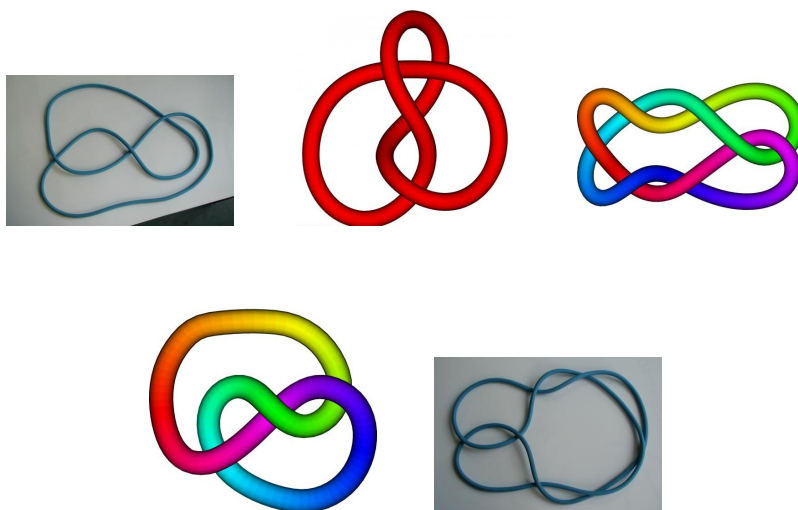
Abbiamo visto che i seguenti nodi:



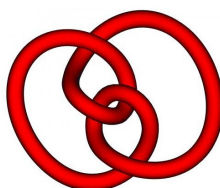
sono in realtà tre nodi banali;

## 2.1 IL TIROCINIO

---



sono in realtà cinque nodi trifoglio;



quest'ultima figura è un nodo ad otto.

Appena il nodo diventa un po' più complicato, non è per nulla facile accorgersi "a occhio" se due nodi sono o non sono la stessa cosa, e nemmeno se un nodo è un nodo vero o è in realtà un finto nodo.

A molti sarà successo di perdere la pazienza nel districare un gomitolo di lana caduto a terra e con cui magari ha giocato un gatto: se immaginate, in un caso di quel genere, che per qualche motivo i due capi del gomitolo siano stati uniti uno con l'altro, potete avere un'idea delle difficoltà che si possono incontrare nel distinguere un nodo effettivo da un finto nodo.

In realtà la questione è assai più complicata di così: non solo non è facile accorgersi a occhio se due nodi sono o non sono la stessa cosa, ma finora nessuno ha trovato un algoritmo che permetta di risolvere il problema in generale! Ovvero: la classificazione dei nodi è tuttora un problema aperto in matematica.

Per uno studio serio dei nostri nodi dobbiamo iniziarli a rappresentare, non possiamo usare sempre le corde ma dobbiamo riportarli su un foglio:



mettete un foglio di carta sotto di voi, lasciateci cadere il nodo e provate a riprodurlo!!!

Si capisce, nei punti in cui le corde si incrociano, quale delle due si trova sopra e quale delle due si trova sotto?!?!?.....dobbiamo trovare un modo per farlo capire: interromperemo il tratto di penna quando la corda passa sotto.

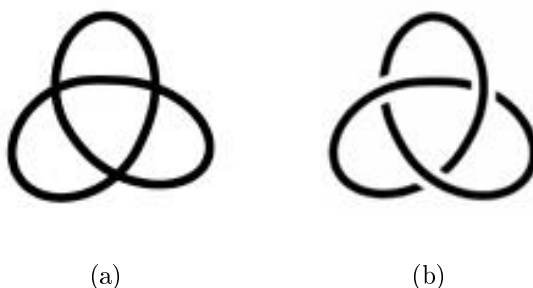


Figura 2.33: Diagramma del nodo trifoglio

Abbiamo così realizzato il diagramma del nostro nodo.

Un nodo, infatti, è solitamente descritto tramite un diagramma, cioè un disegno nel piano con alcuni incroci. Ovviamente, è importante specificare per ciascun incrocio quale delle due strisce è quella che “passa sopra”.

Lo stesso nodo è descrivibile tramite una infinità di diagrammi diversi (ad esempio potete buttare la corda in un verso o nell’altro e il diagramma cambia.)

Il numero di incroci necessari per descrivere un nodo è una misura usata per descriverne la complessità anche se questo può dipendere dal diagramma scelto del nodo.

Ricordiamoci comunque che lo studio dei nodi è di natura topologica, e ciò significa fra l’altro che non dovete necessariamente pensare ai nodi come ad oggetti rigidi. Potete immaginare che siano lunghi a piacimento ed estensibili, e potete maneggiarli come volete ottenendo nodi indistinguibili da quello di partenza, purchè queste operazioni mantengano il nodo chiuso: non è lecito tagliare la cordicella, fare operazioni a corda aperta e poi richiudere. E quindi potete avere anche legittimi diagrammi dello stesso nodo, in cui il numero degli incroci è molto aumentato rispetto a quello di partenza.

Confrontiamo ad esempio un nodo trifoglio con il suo nodo equivalente figura 2.34.

In effetti, per numero di incrocio di un nodo non si intende (e non si potrebbe intendere!) il numero di incroci di una sua qualsiasi proiezione, ma

## 2.1 IL TIROCINIO

---

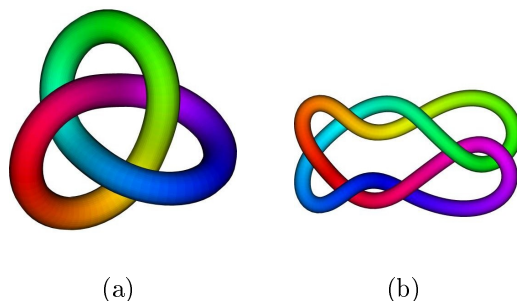


Figura 2.34: Due nodi trifoglio

si intende il minimo numero di incroci di una sua possibile proiezione, in una qualunque delle posizioni che il nodo stesso può assumere “maneggiandolo”.

Non è affatto semplice determinare questo numero; se appoggiando la cordicella sul tavolo trovate una curva con sette incroci, prima di dire che il numero di incroci di quel nodo è sette dovete essere sicuri che non si può trovare alcun altro modo di appoggiarla in cui ci sia un numero minore di incroci.

Il numero di incroci del “finto nodo” è 0; il numero di incroci del nodo trifoglio è 3; e non c’è alcun nodo con numero di incroci 1 oppure 2: in effetti, ogni nodo che si possa disegnare con uno o due incroci è in realtà il finto nodo, cioè può essere manipolato fino a “diventare” una circonferenza. I due nodi trifoglio (trifoglio destro e trifoglio sinistro) sono gli unici nodi con numero di incroci 3; e il nodo ad otto è l’unico con numero di incroci 4. Però il numero dei possibili nodi; diversi fra loro, con un dato numero di incroci, sale molto velocemente al crescere del numero degli incroci: già con solo nove incroci si arriva a un centinaio di possibilità!

Già dalla fine del 1800 si iniziarono a fare tabelle che classificavano i nodi in base al numero di incroci.

3	4	5	5	6	6	6

Figura 2.35: Tabella di classificazione dei nodi

Prendiamo ora un nodo trifoglio e un nodo ad otto e mettiamoli davanti ad uno specchio: quello riflesso è lo stesso nodo?

Nel caso del nodo trifoglio la risposta è no in quanto ci sono due tipi di questo nodo: uno destro e l'altro sinistro e non si riesce a portare l'uno nell'altro giocando con la corda mentre nel caso del nodo ad otto riusciamo a “trasformarlo” nella sua immagine speculare, giocando con la corda.

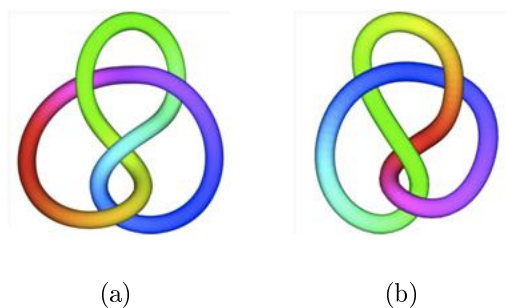


Figura 2.36: Nodo ad otto allo specchio

La prima affermazione, però, non è facile da giustificare: in effetti, se, manipolando una corda, riusciamo a portare un nodo nella posizione di un altro, siamo sicuri che i due nodi rappresentano in realtà lo stesso nodo. Ma se non ci riusciamo, come facciamo a sapere che la cosa è davvero impossibile e che non si tratta invece del fatto che noi non siamo stati capaci di farlo e che magari un altro ce l'avrebbe fatta? In questo caso sappiamo che esistono due tipi di trifoglio ma in altri casi potremmo non avere informazioni e la risposta no alla nostra domanda non sarebbe così facile da giustificare.

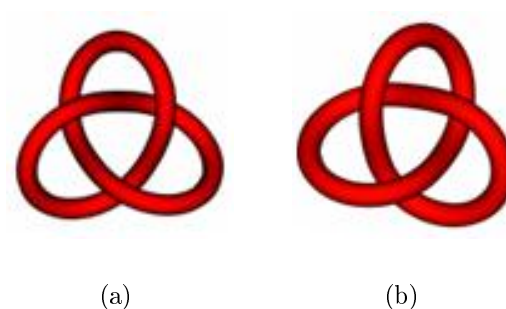


Figura 2.37: Nodo trifoglio allo specchio

In matematica, un oggetto geometrico si dice chirale se è differente dalla sua immagine riflessa. Più precisamente, per “differente” si intende che non è possibile sovrapporre l'immagine riflessa con l'oggetto originario tramite traslazioni e rotazioni.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

Il concetto di chiralità si applica alle figure geometriche piane e spaziali ma anche ai nodi topologici.

Diciamo quindi che il nodo trifoglio è chirale a differenza del nodo a otto.

Come abbiamo detto prima, quando abbiamo di fronte a noi due nodi non riusciamo a capire a prescindere se questi rappresentano o no lo stesso nodo.

Nel 1927 Reidemeister rispose parzialmente a questo problema, proponendo tre operazioni, dette mosse di Reidemeister. Ciascuna di queste mosse non cambia il nodo. Esse consistono nella formazione/scioglimento di un ricciolo, nella separazione/sovrapposizione di due tratti di corda non incrociati, e nello scavalcamento di un incrocio da parte di un tratto di corda.

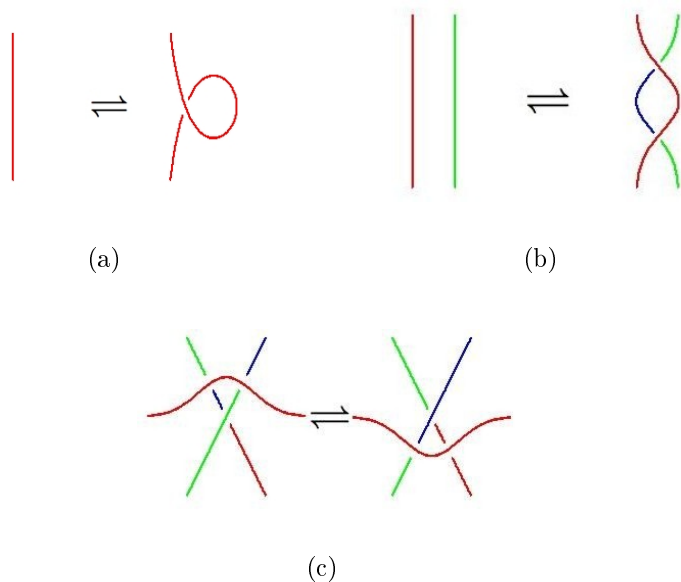


Figura 2.38: Mosse di Reidemeister

In realtà giunse anche ad affermare quello che prende il nome di teorema di Reidemeister (1930):

**Teorema 21.** *Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti se e solo se si può passare dall'uno all'altro con una sequenza finita di mosse elementari (dette mosse di Reidemeister), che consistono nel deformare localmente (prendendo porzioni del nodo e deformandole) il diagramma.*

Il teorema di Reidemeister permette quindi di provare che due diagrammi sono lo stesso nodo qualora si riesca a trovare una sequenza di mosse che li trasforma l'uno sull'altro (e quindi questo risultato sembra apparentemente

rispondere al problema), ma non fornisce in verità un vero e proprio algoritmo per determinare l'equivalenza fra due nodi descritti come diagramma nel piano: questo perché, non essendo noto a priori il numero di mosse necessarie per trasformare un diagramma in un altro, non è possibile sapere con certezza in un tempo finito se due nodi non sono equivalenti.

Il problema fondamentale, che le mosse di Reidemeister non risolvono, è quindi quello di distinguere due nodi diversi.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

### Seconda lezione

Qualche chiarimento:

- In  $R^3$  esistono nodi non banali (come abbiamo visto), mentre ogni “nodo” in  $R^m$  con  $m \neq 3$  è banale, cioè equivalente ad una circonferenza contenuta in  $R^m$ .
- Le geometrie non euclidee variano la geometria e non la topologia di ciò che studiano, quindi non variano i nostri nodi.
- Il DNA è una specie di scala a chiocciola fatta da due fili collegati tra loro da pioli. Possiamo pensarla come un nastro intrecciato nello spazio: una specie di nodo, cioè, fatto di nastro. Gli enzimi tagliano e cuciono il DNA, modificandone quindi la geometria: la teoria dei nodi fornisce uno strumento per studiare tali cambiamenti, ricostruendo in questo modo l'azione degli enzimi sul DNA.

Abbiamo iniziato la lezione di oggi con un argomento che si allontana momentaneamente dalla nostra teoria dei nodi ma che ci servirà nel nostro problema generale di classificazione dei nodi stessi.

Introduciamo allora le matrici <sup>7</sup>: una matrice è una tabella di numeri disposti su righe e colonne.

Ad esempio la tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

costituisce una matrice formata da due righe e tre colonne; essa viene anche detta matrice rettangolare  $2 \times 3$ . Se il numero delle righe è uguale a

---

<sup>7</sup>Lo studio delle matrici è antico. I quadrati latini (una scacchiera quadrata di lato  $n$  con dei simboli su ogni casella, disposti in modo che ognuno compaia una e una sola volta in ogni riga e in ogni colonna) e i quadrati magici (uno schieramento di numeri interi distinti in una tabella quadrata tale che la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna e in entrambe le diagonali dia sempre lo stesso numero) sono stati studiati fin dalla nascita delle prime civiltà. Il reperto più antico noto contenente una matrice come strumento di risoluzione di sistemi lineari è cinese, scritto tra il 300 a.C. e il 200 d.C. Nel testo compare anche il concetto di determinante (per una matrice  $2 \times 2$ ). In Occidente, fu Leibniz a sviluppare la teoria nel 1693, ampliata successivamente da Cramer, che presentò l'algoritmo ora noto come regola di Cramer nel 1693. Successivamente Gauss e il geodeta Wilhelm Jordan svilupparono l'algoritmo di Gauss-Jordan nel XIX secolo. Il termine “matrice” fu usato inizialmente nel 1848 da Sylvester. Cayley, Hamilton, Grassmann, Frobenius e von Neumann sono alcuni dei matematici che hanno dato dei contributi importanti alla teoria delle matrici nella storia più recente.

quello delle colonne la matrice si dice quadrata e il comune numero di righe e di colonne si dice ordine della matrice quadrata.

Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata  $2 \times 2$  di ordine 2.

Generalmente una matrice è indicata con una lettera dell'alfabeto (spesso maiuscola):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

L'elemento di una matrice appartenente alla riga  $i$  e alla colonna  $j$  si indica con  $a_{ij}$ , così nella matrice considerata sopra si ha:

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 7 \quad a_{21} = -5 \quad a_{22} = 3$$

Gli elementi con i due indici di riga e di colonna uguali, cioè gli elementi della forma  $a_{ii}$  costituiscono la diagonale principale della matrice.

Una matrice quadrata si dice diagonale se sono nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale.

La matrice diagonale con gli elementi della diagonale principale uguali a 1 si dice matrice identità o unità.

Ad esempio la matrice identità di ordine 2 è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identità di ordine 3 è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dice trasposta della matrice quadrata  $A$  la matrice, indicata con  $A^T$ , ottenuta da  $A$  scambiando le righe con le colonne.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice si dice simmetrica se coincide con la sua trasposta:

$$A = A^T$$

## 2.1 IL TIROCINIO

---

Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sull'insieme delle matrici si possono definire numerose operazioni tra cui somma, moltiplicazione, prodotto per un numero, prodotto tra matrici, prodotto matrice vettore.

Un' importante quantità definita a partire da una matrice quadrata  $A$  è il suo DETERMINANTE.

Data una matrice quadrata di ordine 2:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si definisce determinante di  $A$ , e si indica con  $\det A$ , il numero reale:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

ottenuto come differenza tra il prodotto degli elementi della diagonale principale e quello degli elementi dell'altra diagonale.

Esempio: Data

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

si ha  $\det A = 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 26$

Sia invece  $A$  una matrice quadrata di ordine 3:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si definisce determinante di  $A$  il numero reale:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Prepariamo la tabella formata da  $A$  e dalle sue due prime colonne ripetute alla sua destra:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

La formula del determinante risulta così essere analoga a quanto definito nel caso dell'ordine 2, cioè:  $\det A =$  somma dei prodotti relativi alle diagonali discendenti  $-$  somma dei prodotti relativi a quelle ascendenti.



Esempio. Data la matrice:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

La tabella è:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 3 & 6 & 8 \end{array}$$

E di conseguenza  $\det A = 1 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 \cdot 8 - 6 \cdot 7 \cdot 5 - 8 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -87$

Torniamo alla teoria dei nodi... Ricorderete sicuramente il nostro problema di classificazione dei nodi e ci siamo lasciati dicendo che il problema fondamentale, che le mosse di Reidemeister non risolvono, è quindi quello di distinguere due nodi diversi. Nel 1928 viene fatto un significativo passo in avanti in questa direzione: l'introduzione di invarianti, ovvero di oggetti algebrici (numeri, polinomi, etc) che non variano all'applicazione di una mossa di Reidemeister, e quindi sono intrinsecamente assegnati al nodo. Il polinomio di Alexander è un invariante di questo tipo: ad ogni nodo è associato un polinomio, che può essere calcolato in modo combinatorio a partire da un diagramma. Due nodi che hanno polinomi diversi sono quindi necessariamente diversi.

Vediamo dunque come funziona questo polinomio di Alexander.

Il diagramma del nodo ci dà gli elementi della matrice dalla quale, calcolando il determinante, otteniamo il polinomio di Alexander. Alexander usa incroci e regioni del diagramma del nodo, si determineranno infatti gli elementi della matrice dai ponti e dagli incroci del diagramma. Oltre agli incroci, infatti, in un diagramma possiamo distinguere anche i "ponti" e gli "archi", a seconda di come consideriamo i tratti di curva che collegano gli incroci: un ponte è un pezzo di curva che va da un sottopassaggio fino al successivo, mentre un arco è un tratto di curva compreso tra due incroci consecutivi.

Nella figura qui sotto 2.39 possiamo vedere il trifoglio suddiviso in ponti e in archi; si noti che i ponti sono tanti quanti gli incroci, mentre gli archi sono esattamente il doppio.

Iniziamo dunque a costruire il nostro polinomio e indichiamo gli incroci con  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  e i ponti con  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . La seconda cosa che dobbiamo fare è quella di orientare il nodo, dobbiamo cioè scegliere il verso in cui percorrerlo. Prendiamo ora in considerazione un incrocio (per esempio  $x_1$ ) ed etichettiamo i tre tratti di arco che formano l'incrocio: indichiamo

## 2.1 IL TIROCINIO

---

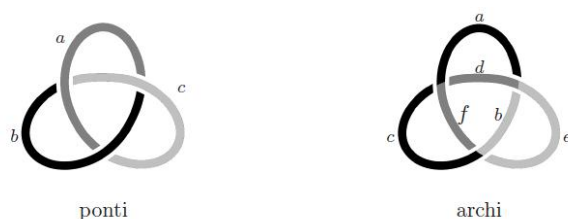


Figura 2.39: Ponti e archi

con  $1 - t$  il tratto di arco che passa sopra all'incrocio e immaginiamo di camminare proprio su questo tratto nel verso deciso precedentemente, sotto di noi vediamo le due estremità del tratto sottostante e etichettiamo quella alla nostra destra con  $-1$  e quella alla nostra sinistra con  $t$ . Ripetiamo la stessa operazione per ogni incrocio.

Esempio: nel caso del nodo trifoglio otteniamo la figura 2.40

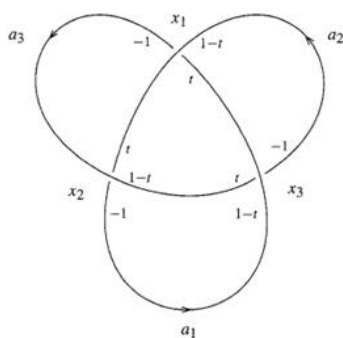


Figura 2.40: Esempio sul trifoglio

Formiamo una matrice  $n \times n$  dove il generico elemento  $ij$  è dato dall'etichetta del tratto dell'arco  $a_j$  con l'incrocio  $x_i$ .

Esempio: la matrice relativa al trifoglio appena visto è

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 \begin{bmatrix}
 x_1 & \begin{bmatrix} t & 1-t & -1 \end{bmatrix} \\
 x_2 & \begin{bmatrix} -1 & t & 1-t \end{bmatrix} \\
 x_3 & \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Successivamente cancelliamo una riga e una colonna della nostra matrice (che diventa quindi una matrice  $(n - 1) \times (n - 1)$ ) e calcoliamo il relativo determinante. Otterremo dunque un polinomio nella variabile  $t$ .

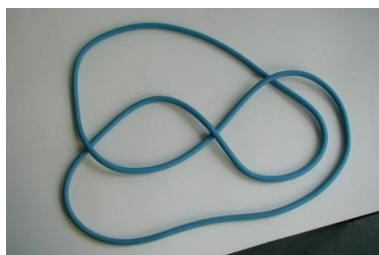
Nel nostro esempio se cancelliamo la terza riga e la terza colonna otteniamo una matrice  $2 \times 2$  il cui determinante è:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1-t \\ -1 & t \end{bmatrix} = t^2 - (-1)(1-t) = t^2 - t + 1$$

Abbiamo costruito questo polinomio scegliendo come indicare incroci e ponti, il verso di percorrenza e quale riga e colonna eliminare . . . non abbiamo detto niente sulla scelta di un diagramma particolare del nodo. Diverse scelte producono dei polinomi diversi che tra loro che si differenziano per una potenza di  $t$ ; se noi però normalizziamo il polinomio (cioè raccogliamo un termine pari a  $\pm t^k$  che ci permetterà di ottenere il termine noto positivo) ciò che otterremo sarà il polinomio di Alexander invariante per i nodi.

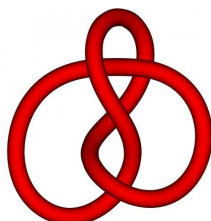
ESERCIZI FATTI IN CLASSE:

Dato il seguente nodo determinare il polinomio di Alexander:



Per prima cosa dobbiamo fare il diagramma del nodo. Etichettiamo ponti e incroci e successivamente tutti i tratti di arco vicino all'incrocio. Scegliamo l'orientazione e costruiamo la matrice. Cancelliamo una riga e una colonna e calcoliamo il determinante. Infine normalizziamo moltiplicando per  $-1$ . Otteniamo lo stesso polinomio di Alexander del trifoglio e infatti avevamo visto che questo nodo è equivalente al trifoglio stesso.

Calcoliamo il polinomio di Alexander anche del seguente nodo:



## 2.1 IL TIROCINIO

---

(anche esso è un trifoglio ma va normalizzato)

ESERCIZI PER CASA:

Calcola il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcola il polinomio di Alexander di almeno due nodi diversi visti fino ad oggi (puoi prendere anche due rappresentazioni diverse dello stesso nodo MA attenzione perché se il nodo ha più di 4 incroci e 4 ponti non sai risolvere il determinante).

## 2.1.9 Verifica scritta

(il 5 giugno è stata proposta loro una verifica scritta)

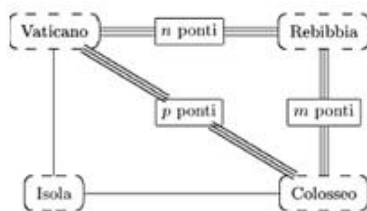
GRAFI

Domande:

- Che cos' è un *grafo*?
- Che si intende per *molteplicità di un vertice*?
- Che cos' è un *ciclo/cammino euleriano*? E un *ciclo hamiltoniano*?
- Hai capito la differenza fra caratteristiche metriche e topologiche di un problema?
- Dal punto di vista dei grafi, in che cosa si differenziano un dodecaedro regolare (a facce pentagonali) e un dodecaedro rombico?

**Problema 1** : È domenica mattina, il signor B. esce dalla sua residenza romana in bicicletta con l'intenzione di fare un percorso che attraversi tutti i ponti di Roma una ed una sola volta ciascuno. Sapendo che il signor B. può scegliere sia il punto iniziale che il punto finale del percorso, sarà egli in grado di mantenere il suo proposito? E se vuole tornare al punto di partenza? Specifica le condizioni su  $m$ ,  $n$ ,  $p$  affinché il cammino sia possibile.

(Tanto per intenderci, per Roma intendiamo la zona interna al grande raccordo anulare e consideriamo solamente i ponti sul Tevere e sull'Aniene. Ricordiamo, per chi non è pratico, che Roma è divisa in tre zone "continentali" dal fiume Tevere e dal suo affluente Aniene e che l'isola Tiberina è situata in mezzo al Tevere ed è collegata con un ponte ad entrambe le sponde. Questa è la mappa di Roma.)

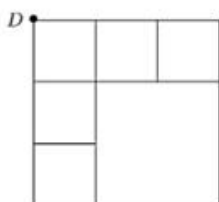


**Problema 2:** Il signor V., quando venne eletto sindaco della città di Settevasche, la cui rete stradale è formata esclusivamente da 16 vie di lunghezza 1 km e 2 vie di lunghezza 2 km come nella figura, si accorse che l'automezzo

## 2.1 IL TIROCINIO

---

per la pulizia delle strade consumava carburante per ben 24 km. Egli accusò quindi l'autista di furto di carburante. A sua volta l'autista affermò che il carburante consumato era necessario per uscire dal deposito, pulire tutte le strade e rientrare al deposito. Se voi foste il giudice, a chi avreste dato ragione?



La città di Settevasche ed il deposito  $D$ .

**Problema 3:** Lorenzo è un appassionato di bicicletta e ogni giorno si allena usando questo mezzo, con qualunque tempo. In particolare, ogni mattina, parte dal suo quartiere di Sant'Ambrogio (dove abita) e raggiunge la strada provinciale attraverso una delle sette vie secondarie disegnate in figura. Poi percorre un pezzo della provinciale - che è a senso unico - per rientrare la sera, a casa, attraverso un'altra delle strade secondarie disegnate in figura. Quanti sono i diversi percorsi che Lorenzo può seguire?



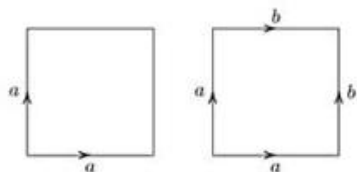
## SUPERFICIE

Domande:

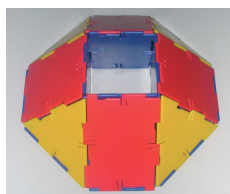
- Che cosa dice il *teorema di Jordan*?
- Come definiamo il *genere* di una superficie connessa ed orientabile?
- Che cos'è la *caratteristica di Eulero* per una superficie connessa ed orientabile?
- Quant'è la caratteristica di Eulero di un dodecaedro rombico?
- Conosci il collegamento fra genere e caratteristica di Eulero?

- Quando una superficie si dice connessa?

**Problema1:** Prova a dire di che superfici si tratta:



**Problema2:** Indica la caratteristica di Eulero e il genere del poliedro qui di seguito. (facendo anche un conteggio di facce, spigoli e vertici)



## 2.1 IL TIROCINIO

---

### Risultati della verifica

Il compito aveva la seguente valutazione: è stato fatto noto ai ragazzi, prima di consegnare la verifica, che ogni domanda valeva 10 punti; i problemi sui grafi valevano 30 punti ognuno e i problemi sulle superfici valevano 15 punti ognuno. Il voto massimo era raggiunto con un punteggio di 150/230. La proporzione dei voto era di tipo lineare così la sufficienza è stata raggiunta con un punteggio di 90/230.

Risultati prova																			
	D1	D2	D3	D4	D5	P1	P2	P3	D1	D2	D3	D4	D5	D6	P1	P2	Punteg. grezzo	Voto	
Mattia	10	10	9	10	10	27	30	30	0	10	10	0	5	0	7	9	117	10,0	
Luca	7	10	10	2	6	18	30	20	0	10	0	0	0	0	7	0	120	8,0	
Valentina	10	10	9	7	6	25	30	30	0	10	6	10	0	2	7	15	177	10,0	
Sasca	4	10	3	2	5	10	20	5	0	5	0	0	0	0	0	0	64	4,3	
Niccolò	9	10	10	8	10	25	30	10	8	10	10	10	0	0	7	15	172	10,0	
Francesco	10	8	10	0	0	22	22	30	0	0	0	0	0	0	7	0	109	7,3	
Lucia	10	10	10		10	30	30	30	0	10	9	10	10	2	7	15	193	10,0	
Marco	2	10	10	8	10	12	20	30	0	10	5	0	0	0	7	10	134	8,9	
Sara	0	10	7	6	7	25	20	30	0	10	5	10	0	8	7	15	160	10,0	
Lorenzo	3	10	8	6	8	15	30	30	0	5	5	0	0	0	7	5	132	8,8	
Eleonora	5	3	2	2	2	15	30	30	0	5	0	0	0	0	5	4	103	6,9	
Alfredo	0	6	2	2	5	12	30	30	0	10	5	10	0	0	2	2	116	7,7	
Federica	5	10	9	0	9	7	0	30	0	10	7	10	10	10	15	10	142	9,5	
Ilaria	8	8	10	5	10	5	0	20	0	2	5	0	2	0	15	4	94	6,3	
Samuele	10	10	10	8	7	25	30	30	10	10		10	10	2	7	10	189	10,0	
Davide	8	9	6	0	7	12	0	30	0	0	0	0	0	0	8	0	80	5,3	
Lori	10	10	7	0	10	10	0	30	0	10	5	0	0	0	7	7	106	7,1	
<i>medie</i>	6,5	9,1	7,8	4,1	7,2	17,4	20,7	26,2	1,1	7,5	4,5	4,1	2,2	1,4	7,2	7,1	133,4	8,2	

Tabella 2.1: Risultati della verifica



**Valutazione degli alunni dell'attività svolta  
(foglio consegnato insieme alla prova)**

	mai	quasi mai	qualche volta	spesso	sempre
Cambio il mio tono di voce durante le lezioni?					
Uso parole di cui non conoscete il significato e che non spiego?					
Parlo in modo complicato?					
Parlo di cose che non c'entrano con la lezione?					
Faccio esempi durante le lezioni per spiegare meglio?					
Se avete detto che faccio esempi, pensate che vi siano di aiuto per capire gli argomenti che presento?					
Cerco di farvi intervenire durante le lezioni?					
Vi rendo partecipi durante le mie lezioni?					
Guardo tutti gli alunni mentre parlo?					
Le domande che mi rivolgete vi infastidiscono?					
Durante le mie lezioni presto attenzione alle difficoltà di alcuni?					
Vi annoiate ascoltando le mie lezioni?					
Il mio modo di fare lezione vi coinvolge?					

Che impressione hai avuto di questa parte della matematica?

---



---

Quali osservazioni faresti sul lavoro svolto?

---



---

## 2.1 IL TIROCINIO

---

	mai	quasi mai	qualche volta	spesso	sempre	tot ragazzi
Cambio il mio tono di voce durante le lezioni?	7	8	2	0	0	17
Uso parole di cui non conoscete il significato e che non spiego?	10	7	0	0	0	17
Parlo in modo complicato?	3	11	3	0	0	17
Parlo di cose che non c'entrano con la lezione?	14	3	0	0	0	17
Faccio esempi durante le lezioni per spiegare meglio?	0	1	2	9	5	17
Se avete detto che faccio esempi, pensate che vi siano di aiuto per capire gli argomenti che presento?	0	0	4	7	5	16
Cerco di farvi intervenire durante le lezioni?	0	0	1	14	2	17
Vi rendo partecipi durante le mie lezioni?	0	0	5	10	2	17
Guardo tutti gli alunni mentre parlo?	0	0	5	7	4	16
Le domande che mi rivolgete vi infastidiscono?	13	3	0	0	0	16
Durante le mie lezioni presto attenzione alle difficoltà di alcuni?	0	1	4	7	5	17
Vi annoiate ascoltando le mie lezioni?	3	10	4	0	0	17
Il mio modo di fare lezione vi coinvolge?	0	0	3	11	3	17

Tabella 2.2: Risultati della valutazione

Il numero nelle caselle si riferisce a quanti ragazzi hanno indicato la casella come risposta

Riporto le impressioni scritte dai ragazzi:

- Molto interessante, curiosa e poco noiosa rispetto all' algebra.
- Sicuramente più interessante e divertente della matematica svolta in classe, ma anche più coinvolgente perché riguarda un ambito mai affrontato.
- È una parte a me nuova che mi affascina molto anche se non credo avrò occasione di approfondirla.
- È molto interessante anche se in alcuni casi può sembrare una materia astratta.
- Sicuramente è stato troppo poco il tempo in cui l' abbiamo praticata per poterla giudicare con precisione; interessante ma non ne vedo l'utilità.
- Non mi è piaciuta molto questa parte della matematica. Molto interessante è stato il problema dei sette ponti, il grafo euleriano.
- È una parte interessante ma complicata, della quale non conoscevo neppure l' esistenza.

- È un po' strana rispetto a quella che facciamo noi al liceo però è interessante perché può avere dei riscontri anche nella vita quotidiana, anche se mi rimane difficile l'astrazione.
- Credo che sia una parte interessante della matematica; credo anche però che nel farla sia necessario un buon pensiero astratto cosa che credo che ancora devo acquistare, ma forse serve solo dell'esercizio.
- È uno studio difficile e intricato, a volte è difficile ricreare lo spazio o il luogo su cui si sta lavorando.
- Mi è piaciuta molto perché non credevo che la matematica fosse fatta anche di nodi, tori o superfici modellabili.
- È molto più interessante di quella che conoscevo.
- Mi piace molto.
- È una branca della matematica interessante che può avere delle applicazioni nella nostra vita corrente, perciò abbastanza coinvolgente, anche se preferisco la matematica studiata durante gli anni scolastici.
- È molto affascinante ma credo che non faccia per me.

Due ragazzi non hanno risposto alla domanda.

Riporto le osservazioni scritte dai ragazzi:

- Sarebbe stato più utile fare qualche ora in più.
- Penso che sia un'attività da riproporre anche perché rende meno pesante il lavoro.
- È stato un lavoro molto interessante, e penso sia stata una buona idea quella di farci fare questa esperienza.
- Il lavoro svolto ci ha consentito di ampliare le nostre conoscenze in ambiti estranei dal programma annuale di matematica.
- Ottimo per fare finalmente qualcosa di diverso, anche se l'argomento non mi ha particolarmente coinvolto sebbene le lezioni siano risultate non pesanti e ben organizzate.
- Il lavoro svolto ritengo sia stato allo stesso tempo interessante e divertente, soprattutto la parte della teoria dei nodi dove forse gli esempi pratici per lo meno nella prima lezione hanno avuto maggiore spazio.

## 2.1 IL TIROCINIO

---

- Interessante per quanto mi riguarda in quanto ci ha distolto dalla matematica pesante di geometria analitica e in cui si è parlato di dimensioni superiori alla terza, di grandezze metriche inutili, che a mio parere stimolano la fantasia, il pensiero.
- Senza dubbio è stato utile, sebbene a tratti difficile da seguire.
- È stato molto buono, soprattutto interessante; avrei preferito che fossero stati fatti più esempi pratici in classe, in modo da poter anche suscitare più osservazioni, dubbi o domande di curiosità.
- È stato molto coinvolgente e alla nostra portata.
- Interessante e divertente.
- Abbiamo fatto un percorso nel quale abbiamo svolto problemi relativi a ponti, nodi, poliedri ecc . . . che abbiamo risolto attraverso la topologia. Tutto ciò è stato un lavoro apprezzabile che ha arricchito (se pur in minima parte) le mie conoscenze matematiche.
- È stato molto divertente e ci ha anticipato le possibili difficoltà che potremmo incontrare in seguito all' università.

Cinque ragazzi non hanno risposto a questa domanda.

## 2.2 TUTTOINGIOCO



*«Non conosco altra maniera  
di trattare i grandi compiti  
che non sia il gioco:  
fra i segni della grandezza,  
questo è presupposto essenziale»*

*Nietzsche*

## 2.2 TUTTOINGIOCO

---

Tuttoingioco è la prima biennale di arte, pensiero e società che si è tenuta in nove week-end da luglio a settembre a Civitanova Alta (MC) e che ha registrato più di 100000 presenze.

“Il bisogno di cultura è oggi un’ esigenza fondamentale. Tutte le Fondazioni bancarie stanno adottando nuovi criteri nell’ impegno culturale, con investimenti diretti e legati al territorio. Da questa consapevolezza nasce Tuttoingioco, un appuntamento biennale di pensiero arte e società promossa dalla Fondazione Carima e realizzata con il patrocinio del Ministero dei Beni Culturali, del Ministero della Gioventù, della Regione Marche, della Provincia di Macerata, della Camera di Commercio di Macerata, delle Università di Macerata e di Camerino e con il sostegno di Banca Marche.

Sede della Biennale sarà il centro storico di Civitanova Alta, che per tutta l’ estate sarà una vera e propria città dell’ arte, dello spettacolo e del pensiero al servizio di tutti i turisti della costa adriatica e non solo: una piccola città ideale, un luogo di intrattenimento, che stimoli il pensiero, la curiosità, la discussione e il piacere di stare insieme.[. . .] L’ evento è suddiviso in appuntamenti fissi che avranno luogo nel fine settimana e che spazieranno su temi vari , dalla musica alla politica, dalla parola ai numeri, dalla danza alla scienza, dall’ eros al pensiero, fino ad approdare ad un grande festival della filosofia, che concluderà l’ estate civitanovese.[. . .] ”

Il 14, 15 e 16 agosto era in scena la matematica.

Nel bel chiostro di Sant’ Agostino (spazio destinato agli spettacoli) si sono succedute nelle tre serate tre interviste. Nella prima serata Robert Ghattas ha intervistato il professor Carlo Toffalori e la matematica si è tinta di giallo; nella seconda serata Robert Ghattas ha intervistato Claudio Bartocci e due materie considerate agli antipodi, matematica e letteratura, si sono mescolate; nell’ultima serata Attilio Romita si è intrattenuto con i cruciverba e i giochi di Ennio Peres.

Alla fine di ogni intervista era attivo il laboratorio Unicam con alcune attività tra cui un tavolo di oggetti matematici o meglio topologici gestito da me.

Sono riuscita così a dimostrare ad un pubblico ampio che la matematica non è poi così astratta e volendo, si può anche “toccarla con mano”.

Cercherò di descrivere brevemente il mio tavolo.

### 2.2.1 Il tavolo

Su una lavagnetta erano posizionate tre case  $(1, 2, 3)$  e tre servizi  $(L, A, G)$  e si chiedeva ai passanti di unirle con un pennarello con le regole descritte nel capitolo 1 (ovviamente non riuscivano a farlo).

Avevo con me anche una palla e un salvagente e chiedevo loro di ripetere l'operazione prima sulla ciambella (in modo che la persona fosse portata a credere che il problema fosse nella tridimensionalità/bidimensionalità dell'oggetto su cui si risolve il problema) e poi sulla palla, concludendo con la spiegazione del teorema della curva di Jordan.

Erano presenti sul tavolo dei nastri di Moebius, in cui si riusciva a vedere il problema del taglio del nastro attraverso l'uso di cerniere appositamente cucite a  $1/2$ , a  $1/4$  e a  $1/3$  della larghezza della stoffa.

Per riuscire a far capire meglio quale fosse la stranezza di questo oggetto incollavo un nastro di carta e glielo facevo tagliare; prima di tutto chiedevo loro quanti pezzi, dopo il taglio, si sarebbero ritrovati tra le mani.

Molte corde erano disposte sul tavolo: tra i nodi banali, i nodi a otto e i nodi trifoglio spiccavano anche delle particolarità come il link di Whitehead, gli anelli Borromeo e un link a cinque componenti.

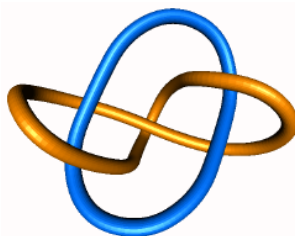


Figura 2.41: Link di Whitehead

Il link di Whitehead ha la particolarità di avere due componenti che prese da sole sono un nodo banale ma, data la loro disposizione nel link, risultano essere uno un nodo banale e l'altro no, non riuscendo a togliere la torsione; i due ruoli inoltre sono intercambiabili: il nodo banale può diventare quello non banale e viceversa.

Il link Borromeo ha la caratteristica di essere formato da tre nodi banali intrecciati tra loro in modo che tagliandone uno, gli altri due rimangono due componenti separate. Su due pannelli erano disposti due nodi ad otto e due nodi trifoglio come se si guardassero allo specchio.

Chiedevo ai passanti di prendere uno dei nodi che trovava sul tavolo e di passare al nodo speculare rispetto a quello che aveva in mano, muovendo

## 2.2 TUTTOINGIOCO

---

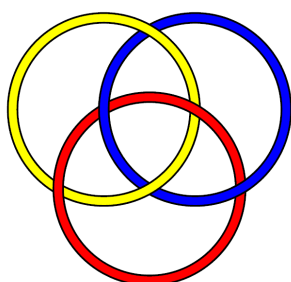


Figura 2.42: Anelli Borromeo



Figura 2.43: Nodi allo specchio

la corda. Ovviamente facevo iniziare loro questo “esperimento” dal nodo ad otto.

C'erano delle immagini con delle figure di nodi apparentemente complicati e loro dovevano dirmi in realtà di che nodo si trattasse (le immagini erano le stesse usate per il tirocinio a scuola).

Sul mio tavolo c'erano anche due dodecaedri, uno rombico e l'altro regolare, una palla da calcio e una specie di cubo con un buco nel centro.

Sostenevo ai passanti che se avessero avuto la pazienza di contare su ogni oggetto spigoli, facce e vertici, il numero ottenuto dall'equazione  $\text{facce} + \text{vertici} - \text{spigoli}$  avrebbe dato 2 nei primi tre casi e 0 nel quarto caso.

Una tazza mi serviva per fare esempi di superfici topologicamente equivalenti; essa è equivalente ad un toro, la palla ad una sfera e le forbici ad un bitoro.





Figura 2.44: Bolla di sapone

Sono riuscita a creare con il fil di ferro il bordo di un nastro di Moebius normale e di un nastro di Moebius con due mezze torsioni in più. Grazie alle bolle di sapone si veniva a creare, sul bordo, la superficie e riuscivo a sostenere che il nastro di Moebius ha un'unica curva come bordo e, nel secondo caso, questa curva è esattamente un nodo trifoglio.

A terra erano posizionati dei cartoncini che ricreavano la situazione della città di Königsberg come già visto nel paragrafo 1 del capitolo 1.

Grazie a delle corde legavo i passanti come nei punti 1 e 2 del paragrafo 5 nel capitolo 1.

## Capitolo 3

In questo capitolo cercherò di tirare un po' le conclusioni dei capitoli precedenti.

Sulla base delle esperienze fatte cercherò di capire se, portare “in strada” la topologia, è davvero una idea formativa buona e utile.

Entrambe le attività (a scuola e a Tuttoingioco) mi hanno portato alla coscienza di un bisogno di rinnovamento dell'immagine pubblica e scolastica della matematica.

Troppo spesso essa rimane nella mente della persona come uso di regole algebriche da imparare e applicare rigidamente senza che i loro scopi siano mai ben identificati.

Di fronte ad un problema di tipo topologico tutti questi preconcetti devono sparire, perché il suo taglio è del tutto nuovo, spesso non si hanno gli “strumenti” matematici per trattarlo e dunque bisogna affrontarlo senza pregiudizi.

Questo metodo di affrontare il problema è stato molto più evidente a scuola e meno per il pubblico di Tuttoingioco.

La professoressa, con cui ho collaborato, ha una visione molto ampia della matematica e la trasmette in modo naturale agli alunni che riescono a porsi numerose domande (anche piuttosto difficili) e a collegare temi anche molto lontani tra loro in modo del tutto appropriato. Probabilmente è proprio in questo ambiente così fertile che la proposta di alcune ore di teoria dei grafi e topologia è stata accolta così bene. A differenza di altre sperimentazioni dello stesso genere è stato ritenuto comunque opportuno “responsabilizzare” i ragazzi a queste lezioni extra curricolari fissando una prova di verifica su questi argomenti; a mio avviso questo non è stato un ostacolo alle lezioni bensì un incentivo. I ragazzi sono stati partecipi e interagivano con me senza problemi, chiedendo anche chiarimenti quando non ero abbastanza esaustiva. Spesso mi sono resa conto di dare per scontato alcune cose che invece per loro non erano proprio così ovvie. In questo la professoressa mi ha dato grande aiuto conoscendo bene i ragazzi e le materie che trattavo.

---

In realtà queste ore di lezione sono state fatte in un periodo un po' particolare: gite, compiti in classe e prove di recupero per gli alunni che non raggiungevano la sufficienza nelle varie materie si susseguivano. Quindi i ragazzi non erano neppure in una condizione psicologica di tranquillità, ma nonostante questa difficoltà non ho avuto problemi, anzi prendevano le ore di "topologia" come un momento per staccare dalla routine scolastica. Solo in alcune ore hanno preferito fare esercitazioni utili per la prova in classe di matematica o fisica, poiché sentito come bisogno.

La prova finale è stata fatta il 5 giugno, appena qualche giorno prima della fine della scuola, in un'atmosfera non tranquilla per i meno bravi e quasi di vacanza per gli altri ma nonostante questo abbiamo ottenuto un ottimo risultato, quasi sorprendente. I "bravi" hanno mantenuto un alto livello della prova, alcuni meno bravi sono restati più bassi nella qualità di risoluzione del compito mentre altri, che solitamente non riuscivano ad ottenere grandi risultati con le materie classiche, hanno dato prova di aver trovato in teoria dei grafi e topologia un nuovo e forse miglior approccio alla matematica.

Questo è stato notato, in particolar modo dalla professoressa, anche durante le lezioni, in quanto tra quelli che risolvevano per primi i quesiti c'erano anche alunni che non mostravano brillantezza di soluzione dei problemi classici scolastici.

Un altro spunto nato in classe è che si è vista un'attitudine migliore delle ragazze rispetto ai ragazzi ad affrontare queste tematiche; ragazzi molto bravi in matematica e fisica non trovavano abbastanza stimoli nei problemi proposti da me.

Anche da quello che è emerso dalle impressioni dei ragazzi, riportate nel capitolo 2, gli argomenti, soprattutto per qualcuno, sono stati molto interessanti, ma il tempo troppo ristretto rispetto alle effettive esigenze del programma e dei ragazzi.

Proprio per questa mancanza di tempo è stata affrontata meglio e in modo più dettagliato la teoria dei grafi rispetto alla parte di topologia, questa constatazione è visibile anche nella verifica in cui i risultati migliori sono stati ottenuti nella prima parte. Probabilmente non solo il tempo, ma anche la difficoltà di astrazione (fatta presente nelle osservazioni dei ragazzi) ha contribuito ad un'assimilazione migliore della teoria dei grafi. In fondo, anche il tipo di problema dato ai ragazzi nella prima parte di ogni lezione, era molto più di carattere pratico nelle prime due lezioni rispetto alle altre; questo è servito a far prendere coscienza che la matematica spesso non è propriamente legata a un problema reale. Ci sono alcuni casi nella storia in cui la soluzione matematica è nata prima del problema, senza poi menzionare il famoso brindisi di Hilbert a quella matematica che potesse essere considerata inutile.

---

Soprattutto in teoria dei nodi è stato visibile un attaccamento da parte dei ragazzi a quelle strutture a loro più consone. Nella prima lezione, in cui ho portato loro delle corde e gliele ho fatte manipolare, mi hanno fatto notare che la lezione era forse troppo “giocata”, mentre hanno avuto grande interesse per la nozione di matrice; questo strumento matematico era a loro sconosciuto ma riconoscevano a suo proposito regole a loro familiari.

Secondo me il modo scolastico di impostare la matematica devia un po' il ragazzo dal concetto generale di quello che realmente è la matematica; iniziative come l'introduzione di argomenti di topologia, nella scuola superiore, iniziano a dare un'idea più veritiera non solo della matematica ma anche, più in generale, dello spirito scientifico.

Per quanto riguarda il pubblico di Tuttoingioco esso era davvero eterogeneo per età (si andava dai bambini, ai genitori, ai nonni) e per formazione (dal bambino di scuola elementare al laureato).

La gestione di tale pubblico non è stata così semplice in quanto il materiale che avevo non era così ovvio per i bambini, forse anche inadatto per loro, mentre risultava una sfida (spesso persa) per adulti che arrivavano sicuri di saper risolvere velocemente il problema, e affascinante per altri.

Ho avuto minori occasioni di riscontro rispetto alla scuola, ma alcuni dati sono emersi anche da questa esperienza. La sensibilità della maggior parte degli adulti non era così spiccata come quella degli studenti, forse anche per una questione di scolarizzazione o comunque di visione della matematica come quella propriamente scolastica di cui parlavo prima.

Una delle questioni emerse è la difficoltà ad accettare la non esistenza di una soluzione. Spesso, dopo aver ragionato sul problema delle tre case e dei tre servizi sul piano, rimanevano delusi del fatto che il problema era impossibile, accusando me di prenderli in giro e non capendo che la dimostrazione della non esistenza di qualcosa è sempre più difficile della dimostrazione dell'eventuale esistenza. Mai nessuno ha messo in dubbio che quello che chiedevo potesse essere anche irrisolvibile, a differenza dei ragazzi del liceo che non solo hanno messo in dubbio la soluzione, ma spesso hanno trovato intuizioni utili alla dimostrazione di non esistenza.

Molto simile è la motivazione che spingeva qualcuno a prendere in mano le corde e cercare di sciogliere nodi trifoglio o ad otto senza porsi minimamente il dubbio che quei nodi non si sarebbero mai sciolti.

Alcuni sono comunque rimasti affascinati da questo mondo nuovo, da questa matematica diversa che forse neppure immaginavano. Penso che il pubblico possa aver avuto la sensazione che, soprattutto le due interviste delle prime sere, non avevano in realtà niente a che fare con la matematica.

---

Spesso questa è associata all'idea di numero, ma di numeri si è parlato ben poco durante questa manifestazione.

Anche questa volta, oltre alle persone comunque appassionate di matematica con una sensibilità diversa, i più "bravi" sono stati i ragazzi più o meno delle scuole medie (ragazzi delle scuole superiori ce n'erano davvero pochi): erano interessati ai problemi e, avendo la mente più libera da nozioni, provavano a risolvere tutti i quesiti da me proposti. Torna così l'idea che probabilmente è fondamentale un approccio davvero diverso alla matematica già dai primi anni di scuola.

In realtà, oltre il cambiamento di vedute fondamentale per tutti, c'è in gioco il fatto che queste due materie (teoria dei grafi e topologia) sono relativamente giovani e in forte sviluppo.

A dispetto della loro apparente semplicità, i grafi forniscono un contesto astratto universale per sviluppare tutta la matematica. Infatti qualunque struttura matematica si può tradurre nel linguaggio dei grafi.

Facciamo per esempio il caso di un insieme di tre punti  $\{a, b, c\}$  con una relazione binaria  $R$  costituita dalla sola coppia ordinata  $(a, b)$ . La struttura che ne risulta non è un grafo e tuttavia si può adeguatamente rappresentare con un grafo <sup>1</sup> nel modo seguente (figura 3.1). Si aggiungano ad ogni vecchio punto due rami con relativi estremi e si colleghino poi ad  $a$  e  $b$  due nuovi punti, uniti tra loro e collegati, il primo - quello di  $a$  -, ad altri 3 punti esterni, il secondo - quello di  $b$  -, a 4. Il grafo che ne risulta permette facilmente di identificare la struttura di partenza: i punti originari  $a, b, c$  sono quelli collegati a due punti che non raggiungono ulteriori vertici, la coppia  $(a, b)$  in  $R$  è identificata dalla costruzione che la coinvolge.

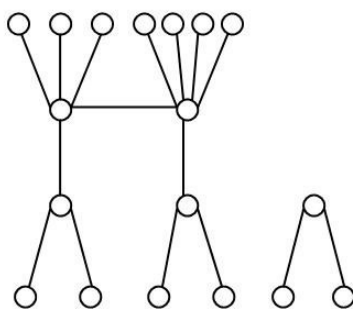


Figura 3.1: Grafo che descrive la situazione

---

<sup>1</sup>Questa volta per grafo non intendiamo una coppia di insiemi o una coppia formata da un insieme e una funzione ma una coppia formata da un insieme e una relazione  $R$  [11, pag. 115]

---

Non sorprende dunque che si scoprano tra i grafi alcuni dei massimi problemi irrisolti della matematica moderna. Ne cito qualcuno.

Faccio riferimento a un grafo finito  $G$  con  $n$  punti,  $E$  rappresenta la relazione del grafo.

1. Un sottoinsieme di  $G$  si dice *indipendente* se non c'è ramo che colleghi i suoi vertici.
2. Una *cricca* è invece un sottoinsieme di  $G$  in cui ogni coppia di vertici distinti è collegata da un ramo.
3. Un *ricoprimento* di  $G$  è un sottoinsieme di vertici tali che ogni ramo di  $G$  ha almeno uno di essi come estremo.

Ebbene, ci si può chiedere se, dato per input  $G$  e un numero intero positivo  $k \leq n$ ,  $G$  ammetta:

1. un sottoinsieme indipendente di  $k$  vertici, oppure
2. una cricca di  $k$  vertici, oppure
3. un ricoprimento di  $k$  vertici.

Ci sono algoritmi capaci di rispondere, ad esempio un esame sistematico di tutti i punti e tutti i rami di  $G$ . Ma ovviamente una tale procedura richiede tempi proibitivi di lavoro, almeno nei casi in cui  $n$  è molto grande.

Il fatto è che, sulla base delle convenzioni della moderna informatica teorica e in particolare alla tesi che sostiene che i problemi rapidi da risolvere sono quelli che ammettono un algoritmo di soluzione che impiega tempi di lavoro al più polinomiali rispetto alla lunghezza dell'input (la classe di questi problemi viene in genere denotata con  $P$ , a significare "polinomiale"), non è affatto chiaro se le 3 questioni sui grafi appena proposte hanno questa proprietà (stanno cioè in  $P$ ). Ma il discorso è ancora più sottile, perché se si trova o si esclude un algoritmo rapido che risolva uno qualunque dei tre, allora si risponde affermativamente o negativamente a un interrogativo chiave della matematica e dell'informatica moderna, quello che è noto come  $P = NP$  e che è ritenuto così difficile da finire tra i sette così detti "problemi del millennio" (i più impegnativi della matematica del duemila).

Lo stesso capita al problema della colorazione dei grafi planari, quando si pretende di farla con almeno 3 colori. Ricordo che una 3-colorazione di un grafo  $G$  è una funzione che assegna a ogni vertice di  $G$  un colore (da scegliere tra 3 valori prefissati, ad esempio blu, rosso e giallo) in modo tale che vertici estremi di uno stesso lato abbiano colori diversi.

---

Per intenderci: ammettiamo per esempio che i punti di  $G$  siano i paesi di una carta geografica e la relazione  $E$  corrisponda a “essere confinante”. In genere in queste situazioni si richiede che sulla carta paesi confinanti abbiano colori diversi. Ecco, questo è il problema (da risolvere, nel caso specifico, con 3 soli colori).

In generale, è dato come input un grafo finito  $G$  e ci si chiede se è possibile una sua 3-colorazione. Di più, si vuole che l'algoritmo che risponde lavori in tempi “rapidi”. Una questione banale, sembrerebbe. Eppure così complicata come le 3 precedenti, capace come loro di condizionare col suo esito  $P = NP$ .

A proposito di colorazione delle carte geografiche: c'è un'altra questione famosa, che chiede quale è il numero minimo di colori sufficiente per disegnare senza ambiguità una qualsiasi carta. Ci sono semplici esempi che mostrano che servono almeno 4 colori (una situazione del genere si registra tra Polonia, Russia e le repubbliche baltiche). Un teorema famoso e discusso di Appel e Haken del 1977 dice che 4 colori bastano in tutti i casi. Si tratta di un risultato importante di teoria dei grafi, che richiede un contributo decisivo dei calcolatori per la sua dimostrazione (e per questo è controverso, perché pare ad alcuni che una dimostrazione di matematica debba essere svolta, o almeno controllata, dalla mente umana, e mai delegata neppure in parte alle macchine).

I grafi sono largamente usati anche nella pratica dell'informatica, dove permettono di rappresentare l'evoluzione di una computazione, o la generazione delle parole di un linguaggio.

Insomma, sono strutture semplici da introdurre e difficili da trattare, e comunque impiegate largamente. Prenderne la dovuta confidenza può rappresentare una svolta didattica notevole per i ragazzi che si accostano alla matematica.

# Bibliografia

- [1] M. L. Ciminelli, *Immagini in opera. Nuove vie in antropologia dell'arte*, Liguori, 2007.
- [2] P. Cintiola, C. Toffalori, *Logica matematica*, McGraw-Hill Companies, 2000.
- [3] F. Ciuffoli, *Giochi, esercizi e test di creatività. Strategie e applicazioni di creative problem solving*, Franco Angeli, 2004.
- [4] G. Clifford, *Il nastro di Möbius*, Apogeo, 2006.
- [5] C. Toffalori, S. Mancini, F. Corradini, S. Leonesi, *Teoria della computabilità e della complessità*, McGraw-Hill Companies, 2005.
- [6] H. Courant, R. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri, 2000.
- [7] L. Eulero, *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sc. Petrog., 1741.
- [8] D. Hilbert, S. Cohn - Vossen, *Geometria intuitiva. Complemento: i primi fondamenti della topologia di P. S. Alexandrov*, Bollati Boringhieri, 1991.
- [9] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988.
- [10] D. Lenzi, *Leonardo Eulero e i ponti di Königsberg. La nascita della teoria dei grafi*, In corso di stampa su Lettera Matematica Pristem.
- [11] S. Leonesi, C. Toffalori, *Un invito all'algebra*, Springer, 2006.
- [12] G. Mainini, *Il problema dei ponti di Königsberg: soluzione di euler*, Bollettino dei docenti di matematica, (55), 2007.
- [13] G. Manaresi, *Matematica e cultura in Europa*, Springer, 2005.



## BIBLIOGRAFIA

---

- [14] P. Marcellini, C. Sbordone, *Elementi di Analisi Matematica Uno*  
*Versione semplificata per i nuovi corsi di laurea*, Liguori, 2002.
- [15] R. Messer, P. D. Straffin, *Topology now!*, M.A.A., 2006.
- [16] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, 1994.
- [17] G. Zammillo, *Il salto del cavallo (un problema di teoria dei grafi)*,  
Magazine Matematicamente.it, (8), 2008.