

a Simone e a nonna Ida

Indice

1	Preliminari	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Nodi e Link	1
1.2.1	Definizioni	2
1.2.2	Rappresentazione di nodi e link	3
1.2.3	Invarianti	7
1.3	Trecce	11
1.3.1	Definizioni e Proprietà	12
1.3.2	Trecce e Nodi	16
1.4	Rivestimenti	18
1.4.1	Definizioni	18
1.4.2	Rivestimenti Ramificati	20
1.5	Superfici e Omeomorfismi fra di esse	21
1.5.1	Definizioni	21
1.5.2	Omeomorfismi di Superfici	23
2	3–Varietà e loro Rappresentazioni	26

2.1	Introduzione	26
2.2	3–Varietà	26
2.3	Spezzamenti di Heegaard	28
2.3.1	Definizioni utili	28
2.3.2	Metodo	29
2.3.3	Diagrammi di Heegaard	32
2.3.4	Esempi	33
2.4	Metodo della Chirurgia	36
2.4.1	Introduzione	37
2.4.2	Metodo	37
2.4.3	Chirurgia in S^3	38
2.4.4	Esempi	39
2.4.5	Chirurgie Equivalenti	41
2.5	Rivestimenti Ramificati	43
2.5.1	Rivestimenti Ramificati di S^3	43
3	Colorazione di Nodi e Link	49
3.1	Introduzione	49
3.2	Diagrammi Colorati	49
3.3	Colorazione dei Diagrammi	51
3.3.1	Metodo di Colorazione	53
3.3.2	Algoritmo di Colorazione	62
4	Classificazione	68
4.1	Rivestimenti Doppi	68

4.1.1	Trecce dei Rivestimenti Doppi	70
4.2	Rivestimenti Tripli	78
4.2.1	Movimenti	79
4.2.2	Conclusioni	105
A	Appendice	106
A.1	Rivestimenti doppi	106
A.2	Rivestimenti tripli	112
A.3	Rivestimenti con $p = 4$	121
A.4	Rivestimenti con $p = 5$	123
	Bibliografia	124

Introduzione

Il lavoro svolto in questa tesi si colloca all'interno dello studio dei metodi di rappresentazione delle 3-varietà, in particolare nel cosiddetto metodo dei rivestimenti ramificati. Tale ambito della topologia è ancora molto aperto e oggetto di diversi interessi, di fatto non si è ancora in grado di fornire una classificazione effettiva per le 3-varietà e d'altra parte quest'ultime svolgono un ruolo principale in molti contesti sia prettamente matematici che non.

Particolarmente interessante è stato l'approfondimento e la comparazione di alcuni fra i principali metodi di rappresentazione, in quanto essi si basano su delle intuizioni che partono dai campi più disparati della topologia e spesso distanti dalle stesse 3-varietà, basti pensare per esempio ai collegamenti costruiti con la teoria delle trecce o anche con la teoria dei nodi. Per quanto riguarda poi in specifico i rivestimenti ramificati, siamo partiti dagli importanti risultati ottenuti dai tre matematici Hilden, Montesinos e Hirsch, i quali pur seguendo strade diverse hanno fornito uno spunto comune per arrivare a rappresentare le 3-varietà tramite dei nodi o dei link alle cui componenti associamo dei "colori", su tali nodi si è concentrata tutta la prima parte del nostro lavoro. Restringendo il campo d'interesse a tutti i nodi ed i link da zero a nove

incroci siamo andati a cercare poi tutte le loro possibili colorazioni corrette, questo ci ha portato alla costruzione di un metodo generale per la colorazione di nodi e link, che abbiamo successivamente anche implementato attraverso un opportuna codifica, utilizzando il Mathematica.

La seconda parte del nostro lavoro è stata incentrata sullo studio dei nodi e dei link colorati in precedenza con l'obbiettivo di risalire alle 3-varietà da essi rappresentate. Tale studio ci ha permesso nel campo dei rivestimenti doppi e cioè dei nodi o dei link ad un solo colore, di individuare quali fra di essi siano collegabili ad una particolare classe di 3-varietà, chiamate spazi lenticolari. Per quanto riguarda invece il campo dei rivestimenti tripli e cioè dei nodi o dei link colorati con tre colori, siamo arrivati a dimostrare che possono essere tutti ricondotti tramite opportune modifiche (movimenti ammissibili) ai rivestimenti doppi.

Reputiamo il nostro lavoro significativo in quanto presenta mediante la costruzione di diverse tabelle:

1. una classificazione completa delle possibili colorazioni corrette per tutti i nodi ed i link da zero a nove incroci;
2. una classificazione di tutti i nodi ed i link ad un colore rappresentabili mediante le trecce con quattro stringhe, completa degli spazi lenticolari da quest'ultime rappresentati;
3. una classificazione di tutti i rivestimenti tripli.

Vi è inoltre la costruzione di un metodo per la colorazione corretta di nodi e

link applicabile per qualsiasi numero di incroci, con relativa implementazione mediante un algoritmo.

La suddivisione nei quattro capitoli è così strutturata:

1. il primo capitolo è dedicato all'introduzione di alcuni concetti fondamentali della teoria dei nodi, delle trecce e dei rivestimenti in generale;
2. nel secondo capitolo vi è una carrellata e un confronto dei più importanti metodi di rappresentazione delle 3-varietà nell'ordine in cui storicamente sono stati introdotti;
3. il terzo capitolo è interamente dedicato alla colorazione dei nodi e dei link, tale argomento viene affrontato sia da un punto di vista teorico che pratico, con la descrizione di un metodo generale di colorazione;
4. il quarto capitolo presenta lo studio e la successiva classificazione svolti sui rivestimenti doppi e tripli costruiti a partire dai nodi e dai link da noi considerati.

Infine vi è anche un'appendice dove sono raccolte tutte le tabelle costruite a partire dai risultati ottenuti nel corso del presente lavoro.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Introduzione

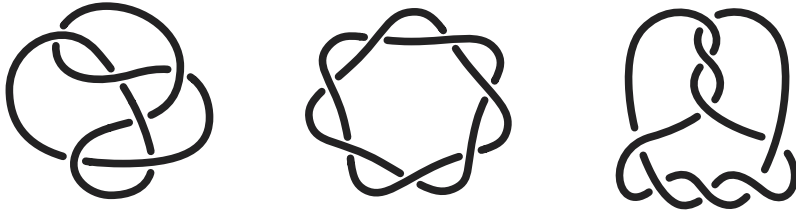
Questo primo capitolo contiene alcune definizioni e alcuni risultati di base della teoria dei nodi, della teoria delle trecce e infine alcuni accenni della teoria delle superfici. Tali nozioni oltre ad essere una parte affascinante della geometria moderna, rappresentano i concetti di base su cui il presente lavoro si è poi sviluppato.

1.2 Nodi e Link

Nodo: solo un aggrovigliarsi di funi?

In questo paragrafo definiremo e studieremo il concetto di nodo da un punto di vista topologico, ripercorrendo brevemente una classica parte della topologia in

dimensione 3 come la teoria dei nodi. Intuitivamente, in quest'ottica, possiamo pensare ad un link come all'unione di $\mu \geq 1$ curve semplici, chiuse e disgiunte in \mathbf{S}^3 , mentre per nodo si intende un link in cui μ è uguale ad 1. Prima di passare ad una più formale definizione di tali oggetti, ne consideriamo qui di seguito alcuni esempi:



Nodo a 6 incroci

Nodo a 7 incroci

Link a 2 componenti

1.2.1 Definizioni

Definizione 1.1. Un **nodo** è un sottospazio di \mathbb{R}^3 omeomorfo alla circonferenza S^1 .

Definizione 1.2. Più generalmente si definisce **link** se è omeomorfo all'unione disgiunta di una o più circonferenze.

Solitamente rappresentiamo e studiamo tali oggetti in \mathbb{R}^3 ma considerando l'aggiunta di un punto all'infinito li possiamo pensare come sottospazi di S^3 $K \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \infty \cong S^3$. Consideriamo ora la definizione di isotopia che ci servirà poi per l'introduzione del concetto di equivalenza di due link o nodi.

Definizione 1.3. Un omotopia $h_t : X \rightarrow X$ si dice **isotopia** se

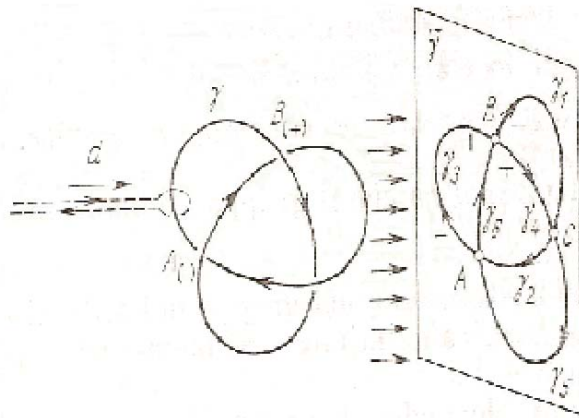
$$h_0 = \text{identità} \quad e \quad \forall t \quad h_t \quad \text{è un omeomorfismo}$$

Definizione 1.4. Due link K_0, K_1 si definiscono **equivalenti** se esiste un isotopia in \mathbb{R}^3 che trasforma K_0 in K_1 , in particolare quindi se

$$\exists h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con } t \in [0, 1] : h_0 = \text{identità}, h_1(K_0) = K_1$$

1.2.2 Rappresentazione di nodi e link

Per rappresentare un link o un nodo si utilizza generalmente un diagramma $D \subset \mathbb{R}^2$

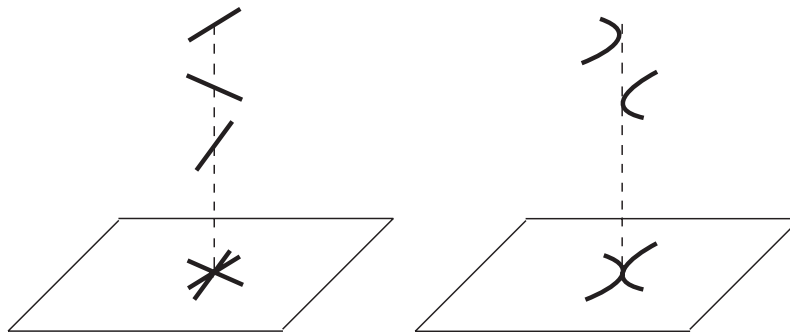


Tale diagramma si ottiene, come mostrato in figura, operando una proiezione ortogonale del link sul piano tale che:

1. Le linee tangenti al link in ogni punto sono proiettate in rette nel piano, cioè in altre parole le proiezioni delle tangenti non devono degenerare in punti;

2. Non più di due punti distinti vengono proiettati in un medesimo punto del piano;
3. L'insieme dei punti d'incrocio, quelli cioè in cui vengono proiettati due punti, è finito e le proiezioni delle due tangenti corrispondenti sono distinte;

Nella seguente figura abbiamo due esempi di situazioni non possibili

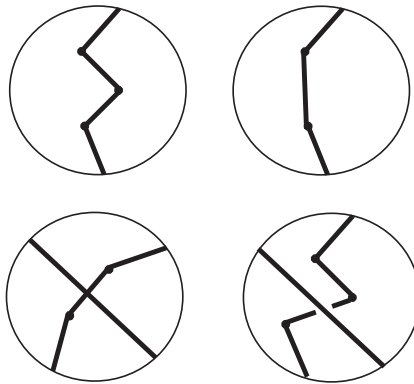


Ora va aggiunto che, a meno di isotopie, è sempre possibile modificare il link considerato in modo tale da ottenere una proiezione che verifichi le tre condizioni sopra elencate. Si può quindi assumere che per proiezione di un link si intenda: un insieme di curve con intersezioni trasversali e autointersezioni tali che ad ogni incrocio si abbia l'incontro di soli due archi.

Definizione 1.5. *Un link L è chiamato **banale** se è il bordo di un unione disgiunta di dischi in \mathbb{R}^3 .*

Nasce a questo punto la problematica di tradurre il concetto di equivalenza fra link in termini di diagrammi di link, ci si chiede cioè quando due diagrammi D_0, D_1 corrispondano a link equivalenti. Per risolvere tale questione sfruttiamo

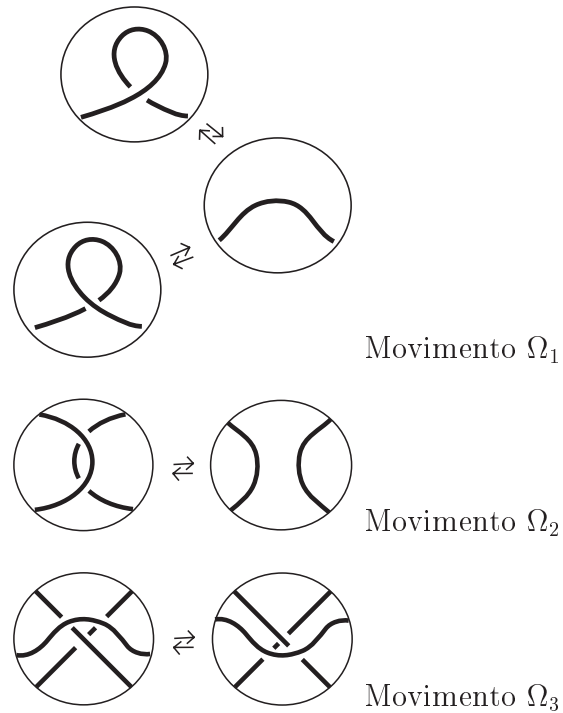
due importanti nuovi concetti: le isotopie del piano e i movimenti di Reidemeister. Nella seguente figura consideriamo alcuni esempi di possibili isotopie del piano.



Si noti che tali movimenti non modificano mai il numero di incroci, in particolare durante le isotopie del piano non potremo mai avere le seguenti situazioni:

1. L'introduzione di un nuovo punto di incrocio o la cancellazione di uno vecchio;
2. Le proiezioni di due archi divengono tangenti tra loro;
3. Punti di tre archi del link proiettati nello stesso punto;

Esistono inoltre alcune situazioni di isotopie del piano in cui le caratteristiche 1 – 3 sopra elencate non risultano verificate. Tali situazioni singolari possono essere prese in considerazione tramite i cosiddetti movimenti di Reidemeister, i quali sono così definiti:



Abbiamo a questo punto tutti gli elementi per poter rispondere alla problematica posta in precedenza, attraverso il seguente teorema

Teorema 1.1. (*Reidemeister*) *Due diagrammi corrispondono a link isotopi se e solo se possono essere ottenuti uno dall'altro attraverso una sequenza finita di movimenti di Reidemeister e di isotopie del piano.*

Per la dimostrazione si veda [19]

Possiamo quindi concludere che la rappresentazione di un link attraverso un diagramma planare $D \subset \mathbb{R}^2$ costruito come sopra descritto, determina univocamente a meno di isotopie il link.

1.2.3 Invarianti

All'interno della teoria dei nodi e link, un ruolo particolarmente importante è assunto dalla ricerca e dal calcolo dei cosiddetti invarianti. Sostanzialmente si tratta di assegnare ad ogni diagramma rappresentante un nodo, un qualche oggetto algebrico (numero, polinomio...) che dipenda solamente dalla classe di isotopia del nodo. Per quanto riguarda gli invarianti numerici possiamo citare: **Indice di allacciamento**, il quale misura il numero di volte per cui ogni coppia di componenti del link avvolge tutte le altre in senso algebrico. Possiamo considerare tale indice come la naturale generalizzazione dell'indice di una curva nel piano complesso rispetto ad un punto. Questo invariante risulta essere piuttosto semplice da calcolare, fornisce tuttavia solo una prima caratterizzazione delle proprietà dei link.

Numero di incroci, questo è il numero minimo di autointersezioni semplici che appaiono in un diagramma planare di un link o nodo di un dato tipo. Tale invariante è particolarmente usato per ordinare i link in molte delle tabelle esistenti, compresa quella su cui ci siamo basati per lavorare in questa tesi.

Si potrebbero elencare ancora diversi invarianti sui quali però sorvoliamo poiché non trattati all'interno di questo lavoro e difficili da illustrare senza la specifica di alcuni concetti preliminari.

Tra gli esempi più importanti abbiamo il polinomio di Alexander, il polinomio di Jones e il polinomio di Kauffman. Per la loro descrizione si veda [19].

In questa sezione, in linea con il lavoro svolto successivamente presentiamo in maniera approfondita la descrizione di un altro invariante il cosiddetto gruppo fondamentale del nodo.

Definizione 1.6. *Si consideri K un nodo in \mathbf{S}^3 e $x_0 \in \mathbf{S}^3 - K$, si definisce il **gruppo fondamentale del nodo K** il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K, x_0)$ del complementare di K .*

Tale gruppo, così definito, possiede due evidenti proprietà

Proprietà 1.1. $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K, x_0)$ *resta invariato per ogni isotopia del nodo.*

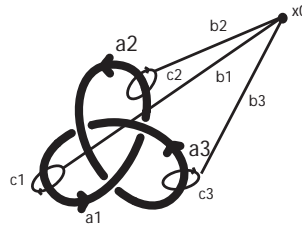
Proprietà 1.2. *Se il nodo K è banale si ha*

$$\pi_1(\mathbf{S}^3 - K, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

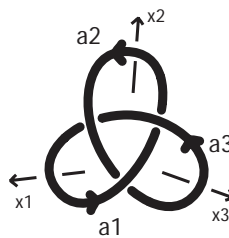
Dalla definizione di nodo banale possiamo infatti esprimere K come $\{z = 0; x^2 + y^2 = 1\}$ e quindi il dominio $\mathbf{S}^3 - K \subset \mathbf{S}^3$ si contrae in un cerchio \mathbf{S}^1 . In realtà si dimostra che $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K, x_0) \cong \mathbb{Z}$ è una condizione necessaria e sufficiente affinché un nodo K sia banale.

Illustriamo ora, nello specifico, un metodo per il calcolo del gruppo fondamentale di un link, la cosiddetta rappresentazione di Wirtinger. Dato un link, consideriamo innanzitutto il suo diagramma planare $D \subset \mathbb{R}^2$, scegliamo un verso di percorrenza su D e per ogni incrocio indichiamo quale dei due rami associati passa sopra e quale sotto. Per ogni componente che costituisce tale link, numeriamo poi tutti gli archi coerentemente al verso di percorrenza fissato. Otteniamo in questo modo un insieme finito di archi a_1, \dots, a_n . Individuiamo poi alcuni archi chiusi in $\mathbb{R}^3 - K$ per $i = 1, 2, \dots, n$, sia c_i una circonferenza con centro in K e raggio $< \epsilon$, la quale gira intorno all'arco a_i . Orientiamo ogni c_i in modo tale che il vettore tangente ad a_i risulti sempre positivo. Fissiamo poi un punto base $x_0 : x_0 \in \mathbb{R}^3 - K$, da cui consideriamo

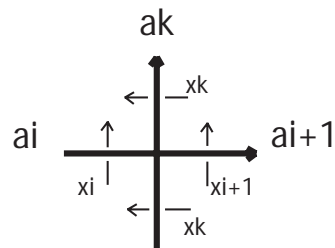
per $i = 1, 2, \dots, n$ un segmento b_i che lo congiunge con la circonferenza c_i .



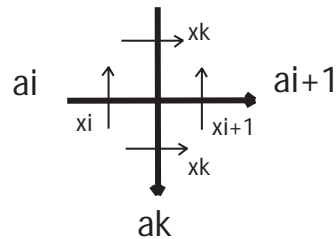
Sia infine γ_i l'arco chiuso di base x_0 che si ottiene percorrendo b_i, c_i nel verso specificato e di nuovo b_i ma in senso opposto. Si può pensare di schematizzare tali archi γ_i nel modo rappresentato nella seguente figura



cioè considerando una freccia x_i che passi sotto ogni arco a_i . Si hanno quindi ad ogni incrocio delle specifiche relazioni fra questi x_i che vengono chiamate relazioni di Wirtinger e sono le seguenti



$$r_i : x_k x_i = x_{i+1} x_k$$

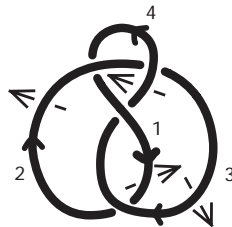


$$r_i : x_i x_k = x_k x_{i+1}$$

Dalla teoria dei gruppi fondamentali e in particolare usando il teorema di Van Kampen si riesce a dimostrare che il gruppo $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K, x_0)$ è generato da questi x_i ed ha una rappresentazione fatta in termini di tali generatori e delle relazioni di Wirtinger corrispondenti ad ogni incrocio di K [cfr 20]

$$\pi_1(\mathbf{S}^3 - K, x_0) = [x_1 \dots x_n; r_1 \dots r_n]$$

Esempio 1.1. Per un nodo del tipo rappresentato in figura



si ha una rappresentazione del suo gruppo fondamentale attraverso i generatori x_1, x_2, x_3, x_4 e le relazioni

$$x_1 x_3 = x_3 x_2$$

$$x_4 x_2 = x_3 x_4$$

$$x_3 x_1 = x_1 x_4$$

Facendo alcune semplificazioni possiamo eliminare x_2 e x_4 , si può esprimere infatti come $x_2 = x_3^{-1}x_1x_3$ e $x_4 = x_1^{-1}x_3x_1$. Otteniamo così

$$\pi_1(\mathbf{S}^3 - K) \cong [x_1, x_3, x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3x_1^{-1}x_3x_1]$$

Proposizione 1.1. *Sia L un link composto da n componenti allora*

$$H_1(\mathbf{S}^3 - L) \cong \mathbb{Z}^n$$

in particolare se K è un nodo allora

$$H_1(\mathbf{S}^3 - K) \cong \mathbb{Z}$$

dove con H_1 si intende l'abelianizzato di π_1 .

Dim

Si consideri per esempio la prima relazione di Wirtinger $r_i : x_kx_i = x_{i+1}x_k$, in tale relazione, poiché lavoriamo con l'abelianizzato di π_1 , possiamo scambiare x_{i+1} con x_k ottenendo $x_kx_i = x_kx_{i+1}$, a questo punto possiamo semplificare x_k da cui $x_i = x_{i+1}$, tale uguaglianza rende tutti i generatori del gruppo $H_1(\mathbf{S}^3 - L)$ equivalenti. Rimaniamo di fatto con un unico generatore da cui si ottiene quindi \mathbb{Z} .

□

1.3 Trecce

Un altro affascinante concetto della geometria moderna è quello di treccia, originariamente inventato da E. Artin come modello matematico per l'industria tessile, la sua applicazione si è rivelata in realtà molto utile in molti altri campi

sia in matematica che in fisica. In questo paragrafo cercheremo di illustrare i tratti fondamentali per lo studio delle trecce per poi soffermarci in maniera più dettagliata sulla descrizione di un collegamento fra la teoria di tali oggetti e quella dei nodi. All'interno del prossimo paragrafo aggiungeremo poi una relazione anche con la teoria di alcuni tipi di omeomorfismi. Tali collegamenti, in relazione al lavoro svolto in questa tesi, risulteranno, di fatto molto importanti in quanto rappresentano un ponte fra le trecce e lo studio delle 3-varietà.

1.3.1 Definizioni e Proprietà

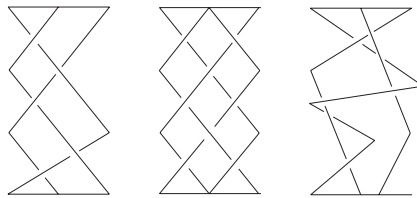
Si consideri in \mathbb{R}^3 i seguenti punti

$$A_i = (i, 0, 0) \quad \text{e} \quad B_i = (i, 0, 1) \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Definizione 1.7. *Una linea poligonale che collega uno dei punti A_i con uno dei punti B_j è definita **ascendente** se nel movimento di un punto fra A_i e B_j lungo tale linea la sua coordinata z cresce in maniera monotona.*

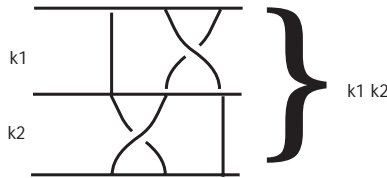
Definizione 1.8. *Si definisce **treccia** con n fili un insieme di linee poligonali ascendenti, fili, che vanno dai punti A_1, A_2, \dots, A_n ai punti B_1, B_2, \dots, B_n in qualunque ordine.*

Nella figura seguente ne vediamo alcuni esempi



Un altro modo forse più intuitivo di descrivere una treccia può essere quello di considerarla come una collezione di stringhe che al suo interno non presenta nè massimi nè minimi.

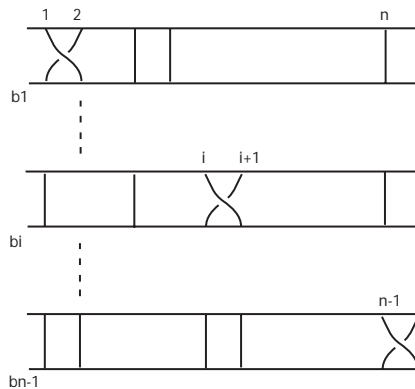
Come per i nodi e i link anche in questo contesto è naturale definire l'equivalenza fra due treccie in termini di isotopia. Si verifica, infatti, che le classi di equivalenza delle treccie rispetto all' isotopia formano un gruppo rispetto all'operazione di prodotto fra treccie che è definita nel seguente modo: si considerino due treccie K_1, K_2 , il loro prodotto si ottiene raccordando la base inferiore della treccia K_1 a quella superiore della treccia K_2 come mostrato nella seguente figura



La treccia inversa è una treccia simmetrica rispetto a quella considerata mentre la treccia unità è data da n fili verticali e paralleli.

Definizione 1.9. *L'insieme di tutte le treccie ad n fili con l'operazione prodotto appena definita viene chiamato **gruppo delle treccie** e si denota generalmente con B_n*

Come per il gruppo del nodo anche tale gruppo può essere espresso tramite i suoi generatori e le relazioni fra di essi. Osservando una qualsiasi treccia si nota immediatamente come questa può essere formata dal prodotto degli elementi $b_i^{\pm 1}$, dove b_i sono le treccie mostrate in figura



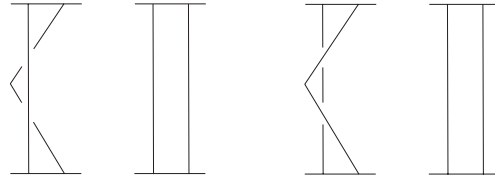
Tali elementi b_1, \dots, b_{n-1} sono quindi i generatori del gruppo B_n , rimangono a questo punto da specificare le relazioni che intercorrono fra di essi. Nella classe di equivalenza di una qualunque treccia possiamo considerare un rappresentante del quale prendiamo la proiezione sul piano xz con le seguenti proprietà:

1. Le proiezioni dei fili non sono tangenti a quelle di nessun altro;
2. Nessun punto del piano xz è la proiezione di tre o più punti di differenti fili;
3. L'insieme dei punti di incrocio è finito e le proiezioni delle due tangenti associate ad ognuno di essi sono distinte;

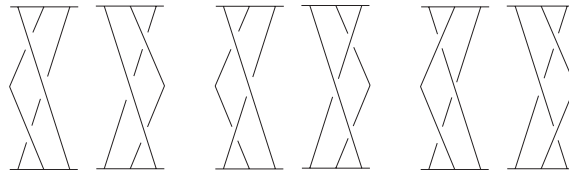
Anche in questo caso, come per i link, si dimostra che a meno di isotopie del piano è possibile proiettare ogni treccia rispettando le tre condizioni sopra elencate.

Ora l'idea di Artin per ricercare le relazioni fra i generatori del gruppo B_n è stata quella di partire proprio dalle tre proprietà sopra e studiare per quali trasformazioni, applicabili alle treccie, queste restano valide, riportiamo le tra-

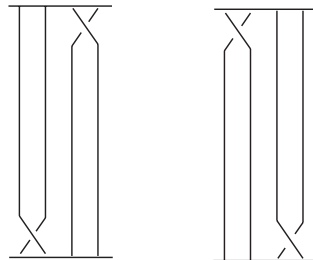
sformazioni trovate qui di seguito



Questa produce la relazione banale $b_i b_i^{-1} = 1$



La prima trasformazione in figura produce la relazione $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$, mentre la seconda e la terza producono relazioni per le quali si dimostra la riconducibilità alla precedente.[cfr 19]



Da quest'ultima infine si ha $b_i b_j = b_j b_i$ con $|i - j| \geq 2$.

Il seguente teorema sempre di Artin dimostra che le relazioni appena descritte sono effettivamente quelle sufficienti a caratterizzare algebricamente il gruppo delle trece B_n .

Teorema 1.2. (*Artin*) *Il gruppo delle trece B_n è isomorfo al gruppo generato*

dalle lettere b_1, \dots, b_{n-1} che soddisfano le relazioni

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$$

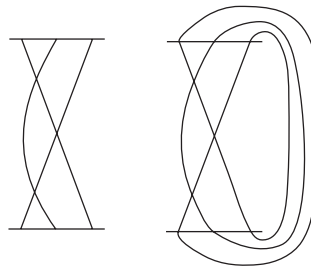
$$b_i b_j = b_j b_i \quad \text{con} \quad |i - j| \geq 2$$

per la dimostrazione si veda [19]

1.3.2 Treccie e Nodi

In questa sezione arriviamo finalmente ad illustrare la stretta relazione che intercorre fra i link e le treccie, relazione che abbiamo sfruttato molte volte nel lavoro svolto per questa tesi. I due concetti di link e treccia si collegano tramite la cosiddetta operazione di chiusura di una treccia che assegna un link ad ogni treccia in maniera naturale.

Definizione 1.10. La *chiusura* di una treccia t è definita come il link $\beta(t)$, ottenuto dall'unione dei punti superiori della treccia con quelli inferiori come mostrato in figura



Osservazione 1.1. Si osservi che, per come abbiamo definito le cose, esiste un canonico omeomorfismo che lega il gruppo delle treccie al gruppo delle permutazioni $\sigma : B_n \rightarrow S_n$. In termini dei generatori dei due gruppi σ è determinato

dal seguente assegnamento $b_i \rightarrow s_i$, dove s_i è la trasposizione dell'elemento i -esimo con quello $(i + 1)$ -esimo.

Proposizione 1.2. *La chiusura $\beta(t)$ di una treccia t risulta essere un nodo se e solo se la permutazione associata $\sigma(t)$ genera un sottogruppo di S_n ciclico di ordine n .*

Osservazione 1.2. *Si può anche osservare che l'operazione di chiusura di una treccia non è iniettiva, la chiusura di differenti trecce può portare allo stesso link. Si consideri infatti che, per esempio, la chiusura di una qualsiasi treccia $t_1 \in B_2$ coincide evidentemente con quella di t_1^{-1} .*

Per quanto riguarda invece la suriettività abbiamo il seguente teorema

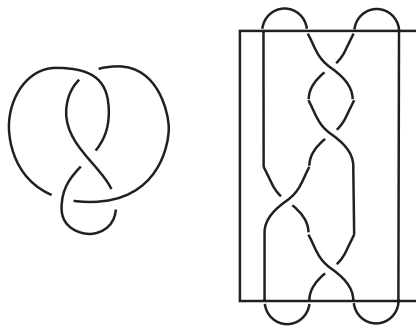
Teorema 1.3. *(Alexander) L'operazione di chiusura di una treccia è suriettiva, in altre parole ogni link è la chiusura di una qualche treccia.*

E' in particolare per la validità di tale teorema che, come descritto nel quarto capitolo, è stato possibile associare alla particolare classe di link studiati una rappresentazione in termini di trecce. Per quanto riguarda la dimostrazione data da Alexander [cfr 19] sebbene sia di tipo costruttivo, cioè fornisca un metodo effettivo per passare dal diagramma di un link a quello di una treccia, risulta essere però piuttosto macchinosa per i nostri scopi, ne omettiamo quindi la descrizione.

Per quanto riguarda il lavoro svolto in questa tesi, ci si è basati su un altro metodo di chiusura della treccia, chiamato *plat*.

Definizione 1.11. *Per **plat** si definisce una treccia i cui fili vengono chiusi a coppie sia sopra che sotto.*

Tale definizione di chiusura è ovviamente applicabile solo nei casi in cui si lavora con trecce formate da un numero pari di fili. In particolare però si osserva che ogni link può essere rappresentato tramite un plat, infatti utilizzando le isotopie del piano e i movimenti di Reidemeister si può modificare qualsiasi link in maniera tale da portare in alto tutti i punti di massimo e in basso tutti quelli di minimo. Un esempio di tale operazione è rappresentato nella figura seguente.



1.4 Rivestimenti

Ricordiamo ora alcune definizioni fondamentali dei rivestimenti ordinari, per poi passare a quelli ramificati, i quali hanno svolto un ruolo molto importante all' interno di questo lavoro.

1.4.1 Definizioni

Definizione 1.12. *Un' applicazione continua p fra due varietà M, N è un rivestimento se*

1. *E' suriettiva;*

2. $\forall y \in N$ esiste un intorno aperto U di y e una famiglia $\{U_j : j \in J\}$ di aperti di N tali che

$$p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j;$$

$$U_j \cap U_k = \emptyset \quad \text{se } j \neq k;$$

$$p|_{U_j} : U_j \rightarrow U \quad \text{è un omeomorfismo } \forall j \in J;$$

La varietà M viene di solito chiamata **spazio del rivestimento** ed N **base del rivestimento**

Definizione 1.13. Per **fibra** F del rivestimento si intende l'immagine reciproca di un punto $y \in N$, $F = p^{-1}(y)$.

Definizione 1.14. Si definisce **numero di fogli del rivestimento** il numero di aperti U_j di N .

In particolare se il numero di fogli di un rivestimento è finito ed uguale per esempio ad m si può anche dire che p è un m -fogli rivestimento.

Altro concetto importante legato ai rivestimenti è quello di monodromia. Si consideri $y_0 \in N$ come base del rivestimento $p : M \rightarrow N$, numeriamo poi i punti della fibra relativa ad y_0 nel seguente modo:

$$F = p^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Sia γ un cammino chiuso su N , con origine e fine in y_0 , questo sarà un elemento del gruppo $\pi_1(N, y_0)$. A questo punto rivestiamo lo spostamento di y_0 lungo il cammino γ rispetto ad un parametro t . Partendo da $x_i \in F$ e percorrendo il cammino γ ritorneremo quindi al punto $y_0 = \gamma(1)$. In tal modo abbiamo

quindi seguito un cammino $\mu(t)$, che riveste γ , fino a terminare in un punto $x_{\sigma(j)} = \mu(1)$ di F . Si è così costruita una corrispondenza $\gamma \rightarrow \sigma(\gamma)$, dove $\sigma(\gamma)$ è una permutazione dei punti della fibra F , cioè $\sigma(\gamma) : x_i \rightarrow x_{\sigma(j)}$. In particolare per il teorema di sollevamento delle omotopie $\sigma(\gamma)$ dipende solo dalla classe di omotopia $\gamma \in \pi(N, y_0)$ ed è inoltre evidente che

$$\begin{aligned}\sigma(\gamma^{-1}) &= \sigma(\gamma)^{-1} \\ \sigma(\gamma_1\gamma_2) &= \sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)\end{aligned}$$

il che ci fa concludere che σ è un omeomorfismo di $\pi(N, y_0)$ nel gruppo delle permutazioni dei punti della fibra F .

Definizione 1.15. *Un omeomorfismo σ costruito come sopra si definisce **monodromia** di rivestimento p .*

1.4.2 Rivestimenti Ramificati

Definizione 1.16. *Una mappa non degenera $p : M \rightarrow N$ fra due varietà compatte entrambe di dimensione m si definisce **rivestimento ramificato** se esiste un sottoinsieme di dimensione $m - 2$, $B_p \subset N$, tale che la restrizione $p|_U : M - p^{-1}(B_p) \rightarrow N - B_p$ sia un rivestimento ordinario di grado finito d .*

Definizione 1.17. *L'insieme B_p si definisce **insieme di ramificazione** del rivestimento p*

Definizione 1.18. *Due rivestimenti ramificati $p_0, p_1 : M \rightarrow N$ si dicono **equivalenti** se esistono due omeomorfismi $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$ tali che $gp_0 = p_1f$.*

Osservazione 1.3. *Nel caso specifico di un rivestimento ramificato in cui l'insieme di ramificazione B_p risulta essere una sottovarietà di N , per le proprietà relative ai rivestimenti, possiamo dire che, un rivestimento ordinario di n fogli di $N - B$ si estende univocamente ad un rivestimento ramificato di n fogli di N . Di conseguenza un rivestimento ramificato p sarà completamente determinato, a meno di omeomorfismi, dal suo associato rivestimento ordinario $p \downarrow$.*

Tale osservazione ci permette di concludere che un rivestimento ramificato p può essere descritto, senza ambiguità, in termini del suo insieme di ramificazione B_p e della monodromia associata a $p \downarrow$, $\omega_p : \pi(N - B_p, *) \rightarrow \Sigma_d$.

1.5 Superfici e Omeomorfismi fra di esse

In tale paragrafo ripercorreremo alcuni dei risultati fondamentali ottenuti nello studio delle 2-varietà, con una particolare attenzione alle caratteristiche degli omeomorfismi che è possibile considerare fra di esse. Tali omeomorfismi verranno poi, di fatto, più volte ripresi nella parte centrale del presente lavoro, in quanto svolgono, in un modo o nell'altro, un ruolo fondamentale all'interno dei diversi metodi di rappresentazione delle 3-varietà.

1.5.1 Definizioni

Definizione 1.19. *Si definisce una **superficie** una varietà di dimensione 2*

Alcuni esempi classici di superfici sono la sfera S^2 , il toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

Definizione 1.20. Una superficie si definisce **orientabile** se non contiene una striscia di Möbius.

Un esempio di superficie non orientabile è lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^2$.

D'ora in poi ci limiteremo a considerare le superfici compatte connesse e orientabili.

Definizione 1.21. Si definisce **somma connessa** fra due superfici M_1, M_2 una superficie ottenuta rimuovendo dei dischi aperti D_1 e D_2 da M_1 e M_2 e incollando $M_1 - D_1$ ad $M_2 - D_2$ mediante un omeomorfismo lungo i bordi di D_1 e D_2 , in formule

$$M_1 \# M_2 = (M_1 - \text{Int}D_1) \sqcup (M_2 - \text{Int}D_2) / p \sim h(p)$$

con $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ omeomorfismo.

Definizione 1.22. In particolare quando come M_2 si ha un toro T il sottoinsieme $M_2 - D_2 \subset M_1 \# M_2$ è chiamato **manico**

C'è un importante risultato che lega i tre esempi di superfici citati sopra e la somma connessa fra superfici, tutte le superfici possono, infatti, essere ottenute per somma connessa a partire da $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$, tale fatto è noto come teorema della classificazione delle superfici di cui diamo la seguente formulazione

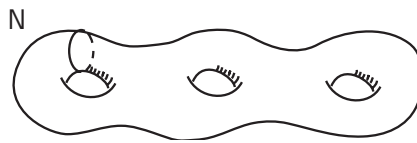
Teorema 1.4. 1. Le superfici chiuse, orientabili M sono classificate in base alloro numero g di manici, cioè

$$M \in \{S^2, T^2, T^2 \# T^2, \dots, \#_{i=1}^g T_i^2, \dots\}$$

2. Le superfici orientabili M con bordo sono classificate dal loro numero di manici g e dal loro numero di componenti di bordo;

1.5.2 Omeomorfismi di Superfici

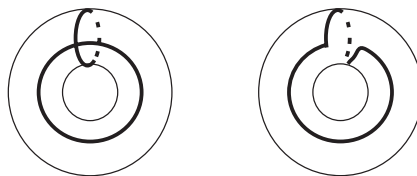
Gli omeomorfismi fra superfici possono essere sempre considerati come il risultato dell'applicazione ripetuta di un'operazione "elementare" chiamata avvitamento di Dehn, la quale può essere costruita nel seguente modo. Consideriamo una superficie N e una curva γ su di essa



Tagliamo N lungo γ , ottenendo così due copie di γ , supponiamo γ_1 e γ_2 . Pensiamo ora di fissare ad esempio γ_1 e di ruotare γ_2 lungo se stessa, conseguentemente si può pensare che i punti situati nelle "vicinanze" di γ_2 seguano il suo movimento. Ruotando la curva fino a 360° otterremo che ogni punto di γ_2 ritorni alla sua originale posizione. A questo punto ricolando le due copie di γ, γ_1 e γ_2 , otteniamo un omeomorfismo di N su se stesso.

Definizione 1.23. *Un tale omeomorfismo viene chiamato **avvitamento di Dehn** di N lungo la curva γ .*

L'esempio più classico di un avvitamento di Dehn si ha nel caso in cui N è il bordo di un toro e γ è un meridiano o un parallelo, si ottiene una cosa del tipo mostrato in figura



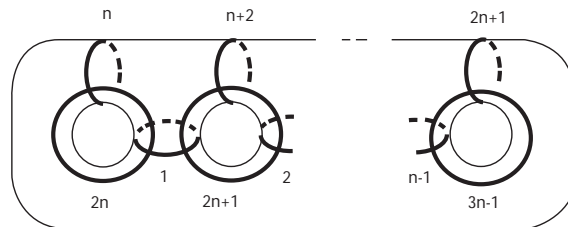
Il meridiano α è la curva che rimane fissa, mentre β diventa β' .

Ora sebbene l'avvitamento di Dehn sembri un caso molto particolare di omeomorfismo fra superfici e anche piuttosto semplice, il seguente teorema ne dimostra invece la straordinaria importanza, ci assicura infatti che è sufficiente considerare una così ristretta classe di omeomorfismi per riuscire a caratterizzarli tutti.

Teorema 1.5. (*Dehn-Lickorish*) *Ogni omeomorfismo di una superficie su se stessa che preserva l'orientazione può essere rappresentato come la composizione di avvitamenti di Dehn e omeomorfismi isotopici all'identità.*

Per dimostrazione si veda [19]

In particolare possiamo anche dire che ogni omeomorfismo che preserva l'orientazione definito su $\partial\Psi_g$, dove per Ψ_g si intende un corpo di manici con g manici, è isotopico alla composizione di avvitamenti di Dehn lungo $3g - 1$ curve come mostrato in figura



Il nostro intento ora è di esplicitare l'esistenza di una stretta ed importante relazione fra B_n , il gruppo delle trecce, considerato nel precedente paragrafo e H_n . Con H_n si intende il gruppo delle classi di isotopia degli omeomorfismi dei $\partial\Psi_g$ su loro stessi. Come già osservato sopra possiamo dire che il gruppo H_n è generato da un numero finito di speciali omeomorfismi chiamati avvitamenti

di Dehn. Prendiamo a questo punto una qualsiasi treccia, l'idea è quella di considerarla come un omeomorfismo del disco su se stesso. I punti terminali di tale treccia possono essere considerati come un insieme di punti di ramificazione di un rivestimento doppio e quindi prendendo il sollevamento di un tale omeomorfismo mediante il rivestimento si ottiene un avvitamento Dehn. Di fatto possiamo dire che per ogni avvitamento di Dehn si ha una rappresentazione in termini di generatori del gruppo delle trecce. In particolare ogni omeomorfismo in $\partial\Psi_g$, può essere schematizzato tramite il diagramma di una treccia e viceversa. Forniamo nella seguente figura la rappresentazione, attraverso gli elementi di base del gruppo delle trecce, degli avvitamenti di Dehn in un toro lungo un meridiano



Avvitamento di Dehn positivo lungo α



Avvitamento di Dehn negativo lungo α

Capitolo 2

3–Varietà e loro Rappresentazioni

2.1 Introduzione

Tale capitolo è dedicato interamente alle 3–varietà e in particolare alla descrizione di alcuni fra i più utili e importanti metodi per la loro rappresentazione. Si è prestata poi una maggior attenzione alla trattazione del cosiddetto metodo dei rivestimenti ramificati che è il metodo su cui abbiamo basato il nostro lavoro.

2.2 3–Varietà

Abbiamo visto nel capitolo precedente come la situazione in dimensione due, per quanto riguarda la classificazione di varietà, sia delle più rosee. Le cose si complicano infatti di molto passando in dimensione tre, culminando in dimensione quattro dove, come il noto teorema di A. A. Markov dimostra, il problema di classificazione è algebricamente insolubile. In realtà in di-

mensione tre un algoritmo esiste ma la sua descrizione è molto complessa e di fatto concretamente impraticabile, di conseguenza è comprensibile come l'interesse si sia spostato verso lo studio di più semplici costruzioni che riescano a rappresentare tutte le 3–varietà.

Definizione 2.1. *Uno spazio di Hausdorff, M^3 viene chiamato 3–varietà se per ogni suo punto esiste un intorno omeomorfo allo spazio euclideo \mathbb{R}^3 .*

Definizione 2.2. *Uno spazio di Hausdorff, M^3 viene chiamato 3–varietà con bordo se per ogni suo punto esiste un intorno omeomorfo allo spazio euclideo \mathbb{R}^3 o al semispazio superiore \mathbb{R}_+^3 .*

Definizione 2.3. *L'insieme dei punti di una 3–varietà M^3 per cui esiste un intorno omeomorfo ad \mathbb{R}_+^3 ma non ad \mathbb{R}^3 viene chiamato **bordo** della 3–varietà e si indica con ∂M^3 .*

Si dimostra facilmente da come sono state date le definizioni che il bordo di una 3–varietà è una 2–varietà.

Definizione 2.4. *Una 3–varietà si dice **triangolabile** se può essere ottenuta come un'unione finita di tetraedri, le intersezioni dei quali contengono o una faccia comune o uno spigolo o un vertice o sono vuote.*

In particolare si ha che ogni 3–varietà è triangolabile.

Definizione 2.5. *Una 3–varietà triangolabile è detta **orientata** se i suoi tetraedri sono orientati coerentemente, dove per coerentemente si intende che le due orientazioni che due tetraedri adiacenti inducono su ogni faccia comune sono opposte.*

Definizione 2.6. Una 3-varietà è detta **orientabile** se può essere orientata.

Un esempio di 3-varietà non orientabile è $\mathbb{R}P^2 \times S^1$ poichè, come già visto, $\mathbb{R}P^2$ è una superficie non orientabile e il suo prodotto con S^1 costituisce una 3-varietà ma che resta non orientabile.

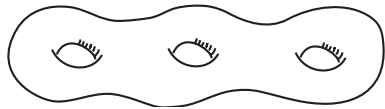
D'ora in poi con 3-varietà intenderemo, a meno di specificare una 3-varietà compatta, connessa e orientabile.

2.3 Spezzamenti di Heegaard

Nel seguente paragrafo presentiamo come primo metodo per la rappresentazione delle 3-varietà, il cosiddetto metodo degli spezzamenti di Heegaard. Tale metodo si basa sull'idea di costruire una 3-varietà tramite l'utilizzo di una ristretta classe di queste, chiamate corpi di manici e di un qualsiasi omeomorfismo definito sui bordi.

2.3.1 Definizioni utili

Definizione 2.7. Per **corpo di manici** con g manici si intende il risultato dell'unione di g 1-manici disgiunti, $D^2 \times [-1, 1]$, ad una boccia B^3 attaccando la parti $D^2 \times \{\pm 1\}$ con $2g$ dischi disgiunti in ∂B^3 in maniera tale che si ottenga una 3-varietà orientata con bordo.



corpo di manici con 3 manici

Proprietà 2.1. Conseguentemente alla definizione data, si può verificare fa-

cilmente che il bordo di un corpo di manici di classe g è omeomorfo alla somma connessa di g tori.

abbiamo quindi anche

Proprietà 2.2. *Due corpi di manici sono omeomorfi se e solo se hanno bordo determinato e lo stesso numero di manici.*

2.3.2 Metodo

Consideriamo due copie M_1^3 e M_2^3 di un corpo di manici con g manici, sia poi $f : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$ un arbitrario omeomorfismo tra i loro bordi. L'idea ora è quella di unire i due corpi di manici uno all'altro, attraverso l'omeomorfismo f , in particolare questo significa identificare nell'unione disgiunta di M_1^3 e M_2^3 ogni punto x di ∂M_1^3 con il punto $f(x)$ di ∂M_2^3 . Lo spazio M^3 risultante da tale costruzione risulta essere una 3-varietà, si osservi infatti che si può ottenere un intorno del punto $x = f(x) \in M^3$ attaccando due semisfere, le quali altro non sono che i due rispettivi intorni di x e di $f(x)$ in M_1^3 e M_2^3 . A questo punto gli spezzamenti di Heegaard possono essere definiti nel seguente modo

Definizione 2.8. *La rappresentazione di una 3-varietà M^3 come unione di due corpi di manici, M_1^3, M_2^3 con bordo in comune $\partial M_1^3 = \partial M_2^3$, viene definita come lo **spezzamento di Heegaard** di M^3 .*

Il seguente importante teorema ci assicura che è sempre possibile, data una qualsiasi 3-varietà trovarne il suo spezzamento di Heegaard, generalmente si possono avere anche più differenti spezzamenti per una stessa varietà.

Teorema 2.1. *Ogni 3–varietà orientabile ammette uno spezzamento di Heegaard*

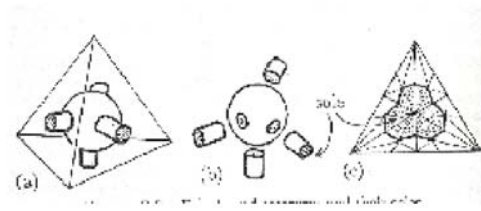
Dim

Consideriamo una triangolazione K di M^3 e andiamo a definire come suddivisione dei baricentri di K, K' nel seguente modo:

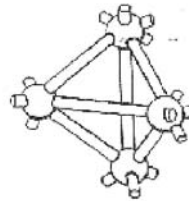
consideriamo come in ogni tetraedro della triangolazione K le mediane di ogni faccia suddividono quest'ultima in sei triangoli più piccoli, li chiameremo t_1, \dots, t_6 .

Suddividiamo quindi ogni tetraedro in 24 tetraedri più piccoli, questi ottenuti costruendo dei coni, con vertici nel baricentro del tetraedro, sopra i triangoli t_i .

Tale nuova suddivisione in tetraedri di M viene chiamata prima suddivisione baricentrica K' . Andiamo ora a considerare K'' , seconda suddivisione dei baricentri, ottenuta riapplicando a K' la suddivisione sopra definita. Poniamo come M_1^3 l'unione di tutti i tetraedri di K'' che hanno punti in comune con l'insieme degli spigoli dei tetraedri di K , mentre come M_2^3 la chiusura del complementare di M_1^3 in M . Resta da dimostrare che M_1^3 e M_2^3 così definiti siano dei corpi di manici tra loro omeomorfi. Consideriamo Δ un tetraedro di K , si può schematizzare la parte di M_2^3 che giace in Δ come in figura



Mentre per descrivere M_1^3 possiamo considerare delle sfere centrate sui vertici della triangolazione originaria K ed unite fra loro attraverso dei cilindri disposti lungo gli spigoli di K .

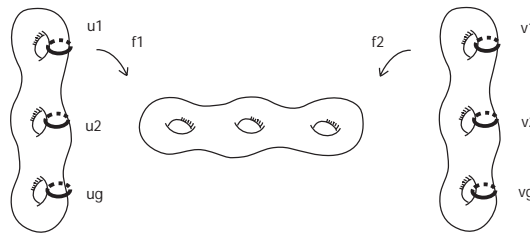


Alla luce di tali descrizioni per gli insiemi M_1^3 e M_2^3 possiamo concludere che quest'ultimi sono il risultato dell'unione di manici (cilindri) a delle sfere. Procedendo quindi passo passo induttivamente si dimostra che si ottengono sempre uno o più corpi di manici. Il fatto che M_1^3 e M_2^3 siano omeomorfi risulta immediato dall'osservazione che hanno bordo in comune e quindi lo stesso numero di manici.

□

2.3.3 Diagrammi di Heegaard

Per come abbiamo definito le cose, si può osservare che ogni spezzamento di Heegaard di una 3-varietà M^3 è interamente descritto da un omeomorfismo della sfera con g manici, quest'ultimo infatti specifica in che modo M_1^3 e M_2^3 dovranno unirsi per formare M^3 . Sulla base di tale osservazione è facile intuire l'importanza di avere un buon metodo per la rappresentazione degli omeomorfismi definiti sulla sfera con g manici. Viene considerato un metodo efficace, in relazione a tale contesto di utilizzo, il cosiddetto metodo dei diagrammi di Heegaard, il quale si basa sull'idea di specificare un omeomorfismo in base ai risultati ottenuti dalla sua applicazione ad un certo sistema canonico di curve sulla sfera con g manici. In specifico si arriva alla definizione di diagramma di Heegaard nel seguente modo. Si consideri l'immersione standard di M_1^3 e M_2^3 in \mathbb{R}^3 e l'insieme dei loro meridiani rispettivamente μ_1, \dots, μ_g e v_1, \dots, v_g . Continuiamo definendo l'omeomorfismo di incollamento $f : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$ come la composizione di due omeomorfismi f_1 e f_2^{-1} con f_i omeomorfismo di ∂M_i^3 sulla sfera con g manici che chiamiamo N .



Si considerino infine su N le curve $f_1(\mu_i)$ e $f_2(v_i)$ con $i = 1, \dots, g$

Definizione 2.9. *Il sistema di curve*

$$\{f_1(\mu_i)\} \quad e \quad \{f_2(v_i)\} \quad \text{con } i = 1, \dots, g$$

su N si definisce come un **diagramma di Heegaard** della varietà M^3

Proprietà 2.3. *Un importante proprietà dei diagrammi di Heegaard è quella che se due varietà M ed M' hanno lo stesso diagramma sono omeomorfe.*

Esplicitiamo ora come concretamente da un tale sistema di curve si possa formare uno spezzamento di Heegaard di una 3–varietà. Prendiamo due copie della superficie N , tagliando ognuna di esse rispettivamente lungo μ_i e v_i in entrambi i casi si ottiene una sfera con $2g$ buchi, la quale può essere deformata in maniera tale che i bordi dei dischi corrispondano ai meridiani di corpi di manici con g manici. Ora è facile costruire M_1^3 e M_2^3 insieme agli omeomorfismi dei loro bordi su N , portando i meridiani di M_1^3 e M_2^3 rispettivamente nei dischi μ_i e v_i su N .

2.3.4 Esempi

Spezzamenti di Heegaard di S^3

Un esempio classico di spezzamento di Heegaard è quello di S^3 in due tori. Si consideri S^3 come sottoinsieme dello spazio complesso \mathbb{C}^2

$$S^3 = \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |\omega|^2 = 2\}$$

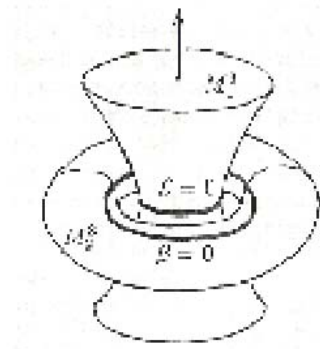
Si pongano poi

$$M_1^3 = \{(z, \omega) \in S^3 : |z| \leq |\omega|\} \quad M_2^3 = \{(z, \omega) \in S^3 : |z| \geq |\omega|\}$$

Si dimostra facilmente che M_1^3 e M_2^3 così definiti sono due tori.

Osservazione 2.1. *Si noti che i punti appartenenti al bordo comune delle varietà M_1^3 e M_2^3 hanno coordinate $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$, di conseguenza si ha che la curva $\beta = \text{cost}$ rappresenta al tempo stesso un meridiano per il toro M_1^3 e un parallelo per M_2^3 .*

Tale osservazione è utile per visualizzare la costruzione di S^3 a partire da due tori in maniera più intuitiva come mostrato in figura



Spazi Lenticolari $L(p, q)$

Si può verificare come S^3 non sia l'unico esempio di 3-varietà ottenute dall'unione di due tori attraverso un omeomorfismo dei bordi di quest'ultimi. Tale processo può anzi essere generalizzato ottenendo la definizione di una serie infinita di 3-varietà, che prendono il nome di spazi lenticolari. Consideriamo

due tori T_1 e T_2 , sia poi h un omeomorfismo fra i loro bordi

$$h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$$

possiamo costruire la 3–varietà M come

$$M = T_1 \cup_h T_2$$

cioè M sarà il risultato dell'identificazione di ogni punto x di ∂T_2 con $h(x)$ di ∂T_1 , nell'unione disgiunta di T_1 e T_2 .

Notiamo come M così ottenuta risulta essere una 3–varietà chiusa, orientata che dipende solamente, a meno di omeomorfismi, dalla classe di omotopia di $h(m_2)$ in ∂T_1 , con m_2 meridiano di T_2 . Sfruttando l'osservazione appena fatta l'idea è quella di andare a costruire tutta una classe di omeomorfismi nel modo seguente. Fissiamo due generatori per il gruppo $\pi(\partial T_1)$, l_i ed m_i , rispettivamente parallelo e meridiano di T_1 . Consideriamo quindi la seguente classe di omeomorfismi

$$h_*(m_2) = pl_1 + qm_1 \quad \text{con } p, q \text{ interi coprimi}$$

Definizione 2.10. *Una 3–varietà M costruita come sopra, viene chiamata **spazio lenticolare** di tipo (p, q) e si indica tradizionalmente con $L(p, q)$*

Possiamo in particolare osservare che tutte quelle volte che una 3–varietà ammette uno spezzamento di Heegaard formato da due tori questa è uno spazio lenticolare e quindi in particolare possiamo considerare i seguenti esempi:

- $L(1, q) \cong S^3$
- $L(0, 1) \cong S^2 \times S^1$

- $L(2, 1) \cong P^3$

Consideriamo ora un'importante proprietà che relaziona diversi spazi lenticolari in base ai valori di p, q per la dimostrazione si veda [20].

Proprietà 2.4. *Siano p, q due interi con p positivo abbiamo che*

$$L(p, q) \cong L(p', q') \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) \quad p = p'; \\ 2) \quad q = \pm q' \quad \text{o} \quad qq' \equiv 1 \pmod{p}; \end{array}$$

Utilizzando tale proprietà, senza perdita di informazioni, possiamo assumere $0 < q < p$, ottenendo in tal modo una lista completa a meno di omeomorfismi degli spazi lenticolari

$$L(p, 1), L(p, 2), \dots, L(p, p-1)$$

fra questi tuttavia avremo ancora spazi omeomorfi.

A questo punto ricordando quanto detto nel corso del precedente capitolo circa la rappresentazione di omeomorfismi fra $\partial\Psi_g$ con Ψ_g corpo di manici e le trecce possiamo pensare di rappresentare gli omeomorfismi di incollamento dei due tori che formano gli spazi lenticolari nella medesima maniera. Tale idea è stata uno spunto fondamentale per il lavoro svolto in questa tesi quindi ne rimandiamo una più approfondita trattazione insieme al suo concreto utilizzo al capitolo quarto.

2.4 Metodo della Chirurgia

2.4.1 Introduzione

In questo paragrafo consideriamo un altro esempio di metodo per la rappresentazione delle 3–varietà, l'idea di base di tale metodo è quella di poter trasformare le 3–varietà ritagliando da queste dei tori per poi incollarli mediante differenti omeomorfismi lungo i bordi. Per arrivare a definire il metodo della chirurgia basta pensare di iterare e generalizzare il procedimento di ritaglio e attacco dei tori. Si può di fatto trasformare ogni 3–varietà, di solito si lavora con S^3 , in una qualsiasi altra 3–varietà.

2.4.2 Metodo

Si consideri una 3–varietà M , un link formato da n curve semplici, chiuse in \dot{M}

$$L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$$

Consideriamo poi degli intorni tubolari chiusi, disgiunti N_i di L_i in \dot{M} ed infine una curva chiusa semplice J_i per ogni ∂N_i

Definizione 2.11. *Una 3–varietà*

$$M' = (M - (\dot{N}_1 \cup \dots \cup \dot{N}_n)) \cup_h (N_1 \cup \dots \cup N_n)$$

con $h = \cup h_i$ dove $h_i : \partial N_i \rightarrow \partial N_i \subset M$ omeomorfismo tale che porta il meridiano μ_i di N_i nella curva J_i è definita come il risultato di una **chirurgia di Dehn** su M lungo L

Si osservi che la varietà ottenuta come sopra è univocamente determinata dalla specifica delle immagini J_i dei meridiani μ_i attraverso h_i , di fatto possiamo dire dalla classe di omotopia di J_i su ∂N_i . Approfondiamo ora un caso

particolare di chirurgia in cui cioè si considera come $M = S^3$, in tale situazione infatti la specifica a cui si accennava sopra diviene particolarmente semplice da fare.

2.4.3 Chirurgia in S^3

Consideriamo il metodo per la costruzione di una chirurgia visto in precedenza ma con $M = S^3$, in particolare fissiamo poi J curva su ∂N in un fissato intorno tubolare N di un link sulla sfera. Su N andiamo ad individuare un meridiano e un parallelo particolari. Per quanto riguarda la scelta del meridiano non vi sono troppi problemi in quanto in S^3 abbiamo un privilegiato meridiano μ , il quale altro non è che il generatore del gruppo delle omologie. Basta quindi ora fissare un verso di percorrenza per tale meridiano per togliere ogni ambiguità. Per il parallelo la situazione risulta diversa, dobbiamo infatti specificare un criterio per la sua scelta. L'idea è quella di individuare l'unico parallelo che rappresenti la classe di omologia nulla, questo viene fatto nel seguente modo. Consideriamo un parallelo qualsiasi, questo rappresenta un elemento in H_1 , con H_1 gruppo delle omologie, di conseguenza può essere rappresentato come una potenza del meridiano μ , in quanto quest'ultimo è il generatore di H_1 . Moltiplichiamo ora la potenza ottenuta con la sua opposta ottenendo in tal modo il rappresentante della classe nulla come cercato, questo sarà il parallelo l con cui andremo a lavorare. Dopo aver specificato la scelta di meridiani e paralleli consideriamo la seguente relazione

$$\mu \xrightarrow{h} J = p\mu + ql$$

con μ ed l rispettivamente meridiano e parallelo di N . In particolare J non è altro che la curva chiusa che si ottiene percorrendo ∂N p volte lungo i meridiani e q volte lungo i paralleli. In tale contesto possiamo inoltre fare anche la seguente osservazione e cioè che una chirurgia con istruzioni del tipo $\mu \xrightarrow{h} J = p\mu + ql$ porterà alla stessa varietà di una con istruzioni $\mu \xrightarrow{h} J = -p\mu - ql$. A questo punto quindi abbiamo dimostrato come per specificare una chirurgia in S^3 basti considerare un coefficiente del tipo $\frac{p}{q}$.

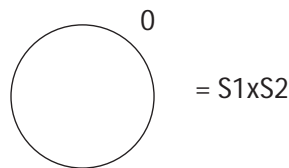
Definizione 2.12. *Si definisce coefficiente della chirurgia in S^3 associato con la componente L_i il rapporto*

$$r_i = \frac{p_i}{q_i}$$

Possiamo quindi sintetizzare quanto trovato ponendo $M = S^3$ nel seguente modo: un qualunque Link su S^3 unito al suo coefficiente di chirurgia determina una chirurgia che produce senza ambiguità una 3-varietà chiusa e orientata.

Osservazione 2.2. *Si noti che per chirurgie identiche si ha $r = \frac{1}{0} = \infty$, mentre l'indice $r = 0$ corrisponde ad una chirurgia in cui paralleli e meridiani vengono scambiati*

2.4.4 Esempi

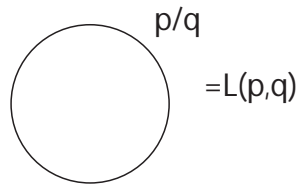


Dim

Una chirurgia come quella schematizzata in figura consiste nel ritagliare un

toro T^2 dalla sfera S^3 ricucendolo poi attraverso un omeomorfismo che scambi paralleli e meridiani. Ricordiamo inoltre che S^3 , come già visto nel paragrafo precedente, può essere ottenuta dall'unione di due tori tramite un omeomorfismo che anche in questo caso scambia meridiani e paralleli. Ci troveremo quindi ad attaccare in definitiva due tori mediante l'identità fra i loro bordi, tale operazione produce evidentemente $S^1 \times S^2$

□



Dim

Gli spazi lenticolari possono essere ottenuti, per definizione, dall'unione di due tori attraverso degli omeomorfismi tali che il meridiano μ viene portato nella curva $q\mu + pl$. D'altra parte S^3 si può ottenere dall'identificazione di tali tori, attraverso un omeomorfismo che scambia μ con l ed l con μ . Otteniamo quindi che $L(p,q)$ è il risultato di una chirurgia di S^3 con un omeomorfismo $\mu \rightarrow p\mu + ql$.

□

Sebbene negli esempi appena descritti abbiamo considerato delle chirurgie con coefficienti razionali, in realtà per il seguente teorema ci si può limitare a lavorare con coefficienti interi.

Teorema 2.2. *Ogni 3-varietà può essere ottenuta con una chirurgia a coefficienti interi su un link di S^3 .*

Per la dimostrazione si veda [20].

Alla luce di tale teorema quindi possiamo di fatto descrivere una qualunque 3–varietà attraverso un link in S^3 , nel quale per ciascuna componente si assegna un coefficiente di chirurgia intero.

2.4.5 Chirurgie Equivalenti

Dalla costruzione di alcuni esempi di chirurgia si può verificare che chirurgie su S^3 lungo differenti link possono comunque produrre le stesse 3–varietà, a meno di omeomorfismi. L'interesse quindi si sposta sullo studio dei link, in particolare su un metodo per capire quando attraverso il metodo della chirurgia producono le medesime varietà.

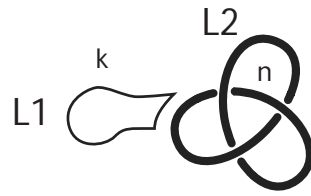
Definizione 2.13. *Chirurgie su S^3 lungo differenti link che producono la stessa 3–varietà vengono definite **equivalenti***

Proponiamo ora una serie molto particolare di modifiche che si possono applicare ai link in modo che le chirurgie che essi producono siano equivalenti.

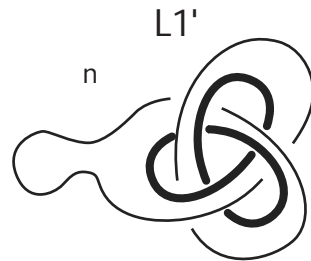
Definizione 2.14. *Con **movimento di Kirby di primo tipo** si intende l'operazione di aggiungere o cancellare in un dato link L un cerchio di indice ± 1 slegato dalle altre componenti di L .*

Tale movimento evidentemente non cambia la 3–varietà risultante dalla chirurgia in quanto, applicando una chirurgia su S^3 con indice $\pm \frac{1}{n}$, si ottiene nuovamente S^3 .

La definizione del movimento di Kirby di secondo tipo risulta invece un po' più complessa. Consideriamo un link formato da due componenti fra loro slegate L_1, L_2 , con indici rispettivamente k, n come schematizzato in figura



Con **movimento di Kirby di secondo tipo** si intende una modifica di tale schema del seguente tipo:



L_1 viene modificato in L'_1 il quale differisce da L_1 per il fatto che contiene al suo interno L_2 e di avere indice $n + k$. E' possibile generalizzare e definire tale movimento anche per i casi in cui L è formato da due componenti non necessariamente slegate.

Riportiamo a questo punto l'enunciato di un famoso e importante teorema di Kirby poichè rappresenta un passo fondamentale nello studio di chirurgie equivalenti.

Teorema 2.3. *Due link in S^3 con coefficienti interi producono attraverso il metodo della chirurgia la stessa 3-varietà se e solo se possono esser ottenuti uno dall'altro tramite una sequenza finita di movimenti di Kirby di primo e secondo tipo e di isotopie.*

2.5 Rivestimenti Ramificati

In questo paragrafo presentiamo finalmente il metodo per la rappresentazione delle 3–varietà all’ interno del quale si è sviluppato il lavoro svolto in questa tesi. Tale metodo si basa sui risultati comuni a cui sono giunti agli inizi degli anni settanta tre matematici: Hilden, Hirsch e Montesinos; pur seguendo strade diverse essi hanno provato che ogni 3–varietà connessa, orientata è un rivestimento semplice della sfera S^3 ramificato sopra un nodo o un link.

2.5.1 Rivestimenti Ramificati di S^3

Dopo aver illustrato nei preliminari cosa si intende per rivestimento ramificato, vediamo come si è arrivati a collegare le 3–varietà ai rivestimenti ramificati di S^3 . Storicamente il primo risultato in tale direzione è da attribuire a J. M. Alexander nel 1920, egli ha infatti dimostrato che ogni m –varietà orientata e chiusa è un rivestimento ramificato di S^m . Successivamente ci si è poi chiesti se esistesse una relazione fra il numero dei fogli del rivestimento ramificato in questione e la dimensione m di S^m . Illustriamo qui di seguito i risultati ottenuti in tal senso prima per il caso $m = 2$ e poi finalmente per il caso $m = 3$. Consideriamo una mappa $p : M^2 \rightarrow N^2$, con M^2 e N^2 due superfici chiuse, questa sarà un rivestimento ramificato se esiste un insieme finito di punti $x_1, \dots, x_n \in N^2$ tali che $p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ sia un insieme discreto e la restrizione di p a $M^2 - p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$ sia un rivestimento.

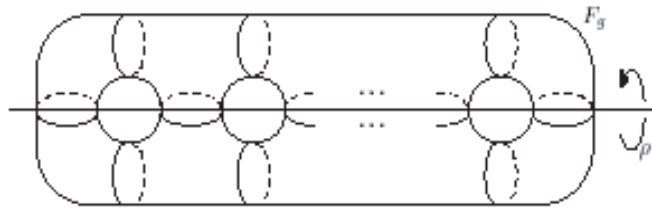
Teorema 2.4. *Ogni superficie orientabile, chiusa F_g di genere g può essere*

rappresentata come un 2-fogli rivestimento di S^2 ramificato sopra $2g+2$ punti.

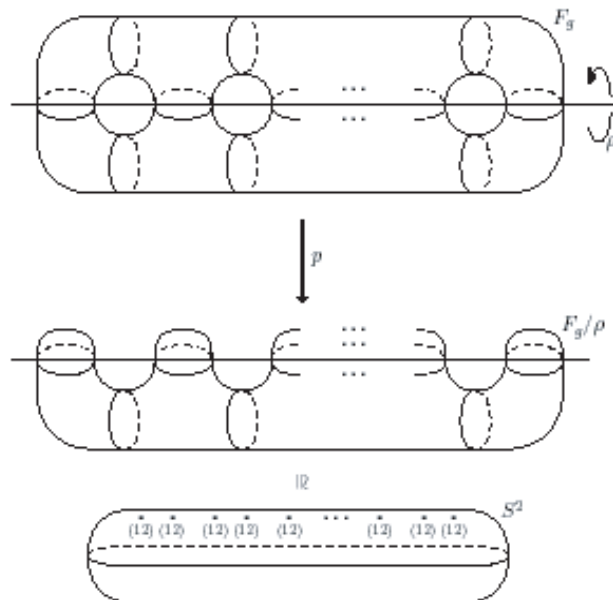
Con F_g si intende il bordo di un corpo di manici con g manici.

Dim

Si consideri su F_g un asse di simmetria ρ come mostrato in figura



Identifichiamo tutte le coppie di punti di F_g simmetrici rispetto a ρ , lo spazio quoziente che ne risulta è uno spazio omeomorfo ad S^2 . Di conseguenza la proiezione naturale $p : F_g \rightarrow S^2$ è un rivestimento ramificato con $2g + 2$ rami come schematizzato in figura.



□

Passiamo ora allo studio della situazione in dimensione tre, con $p : M^3 \rightarrow N^3$ rivestimento ramificato con insieme di ramificazione L . In particolare si noti che nel caso in cui N^3 sia la sfera S^3 e quindi $L \subset S^3$, il rivestimento ramificato può essere rappresentato attraverso un diagramma planare D nel quale ad ogni incrocio associamo una permutazione che rappresenti il corrispondente generatore di Wirtinger di $\pi_1(S^3 - L)$.

Definizione 2.15. *un rivestimento ramificato $p : M^3 \rightarrow N^3$ si dice **semplice** se la monodromia a lui associata, per ogni meridiano intorno al nodo, è una trasposizione.*

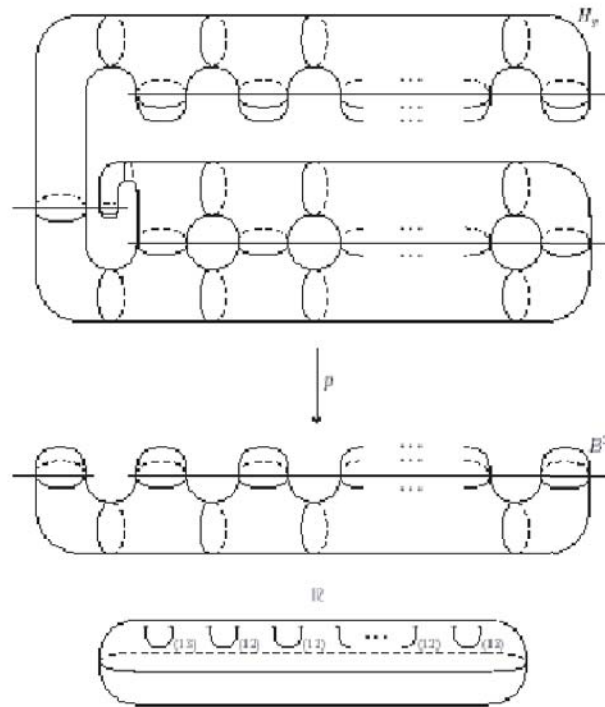
Si ricordi, come già illustrato nel capitolo precedente, che il gruppo $\pi_1(S^3 - L)$ risulta generato dai meridiani definiti attorno ad ogni arco del link L e dalle relazioni di Wirtinger, definite per ogni incrocio. A questo punto dalla definizione di rivestimento semplice e dalla precedente osservazione, si può concludere che un rivestimento semplice di S^3 con d fogli, ramificato sopra un link L , si può rappresentare tramite il diagramma planare del link in cui per ogni incrocio ho associata una trasposizione $(i, j) \in \Sigma_d$ in modo tale da rispettare le relazioni di Wirtinger.

Teorema 2.5. *(Hilden, Hirsh, Montesinos) Ogni 3-varietà chiusa e orientabile M è un rivestimento semplice di S^3 , ramificato sopra un link.*

Dim

Riconsideriamo per tale dimostrazione il rivestimento ramificato fra superfici schematizzato nella precedente figura, tale rivestimento può essere infatti esteso in un rivestimento semplice ramificato $p : H_g \rightarrow B^3$, dove con H_g intendiamo

il corpo di manici tale che $\partial H_g = F_g$ in \mathbb{R}^3 . L'insieme di rami di p sarà formato da $g+1$ archi banali in B^3 , ognuno dei quali associato con la trasposizione $(1, 2)$



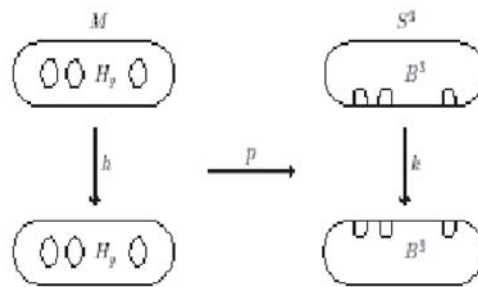
Ora costruiamo un nuovo rivestimento ramificato aggiungendo un nuovo arco banale, con una trasposizione associata $(1, 3)$, all'insieme di rami del precedente rivestimento ramificato. Il nuovo rivestimento ramificato così costruito ha in particolare la seguente proprietà: ogni omeomorfismo $k : F_g \rightarrow F_g$ è, a meno di isotopia, il sollevamento di un omeomorfismo $h : S^2 \rightarrow S^2$ quindi considerando uno spezzameto di Heegaard di M otteniamo un rivestimento ramificato a tre

fogli:

$$p : M \cong H_g \cup_k H_g \rightarrow B^3 \cup_h B^3 \cong S^3$$

e quindi $p : M \rightarrow S^3$, come schematizzato in figura

□



Il precedente fondamentale teorema ci permette quindi di affermare che ogni 3–varietà chiusa e orientabile può essere rappresentata, in quanto rivestimento ramificato su L , a tre fogli, di S^3 con (L, ω) . Per (L, ω) si intende il diagramma del link L in cui per ogni arco ho specificate le relative trasposizioni, rimaniamo comunque una più approfondita illustrazione di tale diagramma, poichè strettamente collegato alla prima parte del lavoro svolto in questa tesi.

Altre osservazioni sul precedente teorema ci portano a sottolineare il fatto che all'interno della sua dimostrazione contenga di fatto un'esplicita relazione fra due metodi di rappresentazione delle 3–varietà: gli spezzamenti di Heegaard e i rivestimenti semplici di S^3 . Daremo una dimostrazione concreta dell'im-

portanza e soprattutto dell'utilità anche pratica di tale relazione nel corso del capitolo quattro.

Capitolo 3

Colorazione di Nodi e Link

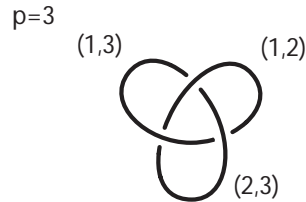
3.1 Introduzione

Questo capitolo contiene la prima parte di quello che è stato il nostro lavoro in questa tesi. Illustriamo infatti cosa si intende per un nodo o un link "colorato" e in che modo siamo riusciti a "colorare" tutti i nodi ed i link da zero a nove incroci.

3.2 Diagrammi Colorati

Nel precedente capitolo abbiamo dimostrato come per ogni 3–varietà chiusa, connessa e compatta esiste un rivestimento semplice di S^3 , ramificato sopra un link L . Abbiamo osservato che ogni rivestimento semplice di S^3 con p fogli può essere rappresentato tramite il link L e la sua monodromia ω_p associata e che inoltre quest'ultima può essere a sua volta definita tramite la sua azione sui meridiani, generatori del gruppo $\pi_1(S^3 - L, *)$, cioè quindi con un insie-

me di trasposizioni di S_p . Possiamo quindi, in definitiva, rappresentare una 3-varietà attraverso il diagramma di un link a cui associamo per ogni arco una trasposizione $(i, j) \in S_p$, nella seguente figura ne abbiamo un esempio.



Si noti infine che utilizzando delle trasposizioni, poichè $(i, j) = (i, j)^{-1}$, l'orientazione scelta per il link in questione non influenza il nostro studio e le sue conclusioni. Tuttociò è la conseguenza del fatto che è possibile considerare un rivestimento che sia semplice, per il quale quindi la monodromia di ogni meridiano è una trasposizione.

Definizione 3.1. *L'operazione con cui associamo ad ogni arco di un dato link L una trasposizione viene detta **colorazione** del link.*

Si può infatti pensare di considerare ogni diverso elemento di S_p come un colore che identifica l'arco di L a cui si riferisce, tale associazione viene poi materialmente eseguita, per esempio nel caso di $p = 3$ convenzionalmente infatti si pone $(1, 2) = \text{blue}$, $(1, 3) = \text{verde}$, $(2, 3) = \text{rosso}$. Ovviamente la colorazione del link o del nodo non va fatta arbitrariamente ma deve essere tale innanzitutto che ad ogni incrocio siano verificate le relazioni di Wirtinger e che le trasposizioni usate siano sufficienti a generare il gruppo S_p , quest'ultima condizione in particolare fa sì che la varietà M , a cui si riferisce il rivestimento semplice, sia connessa.

Definizione 3.2. *Una colorazione per cui ad ogni incrocio del nodo o del link considerato siano verificate le relazioni di Wirtinger e tale che le trasposizioni usate generino il gruppo S_p si dice **corretta**.*

Esempio 3.1. *Consideriamo il caso in cui $p = 3$, le relazioni di Wirtinger si riducono a*

$$x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1}$$

quindi per esempio sono verificate da

$$(1, 2) = (1, 3)(2, 3)(1, 3)^{-1} = (1, 3)(2, 3)(1, 3)$$

l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che per la trasposizioni si ha $(i, j) = (i, j)^{-1}$

Conseguentemente a quanto appena osservato nel precedente esempio, si definisce nel caso particolare di $p = 3$ il seguente concetto di colorazione corretta: un link è colorato correttamente se ad ogni suo incrocio i tre archi che si incontrano sono tutti colorati ugualmente o tutti differentemente.

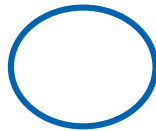
3.3 Colorazione dei Diagrammi

In questa sezione presentiamo finalmente quella che è stata la prima parte del nostro lavoro: la colorazione corretta di nodi e link. Abbiamo considerato tutti i nodi ed i link, quest'ultimi fino a quattro componenti, con un minimo di zero incroci fino ad un massimo di nove e siamo andati poi a colorarli considerando $p = 2$, $p = 3$ e $p > 3$. Di fatto quindi tale lavoro ci ha condotto, per tutta la base teorica, già precedentemente trattata, alla definizione di una serie di

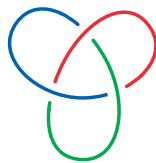
rivestimenti ramificati di S^3 .

Illustriamo ora attraverso alcuni esempi rappresentativi quello che è stato il nostro modo di procedere al fine di ottenere una colorazione corretta e quindi la definizione dei vari rivestimenti ramificati. Prima di entrare in dettaglio osserviamo che è facile verificare come sia sempre possibile definire un rivestimento doppio, qualsiasi sia il link che stiamo considerando. In tale caso infatti si ha una sola trasposizione che genera S_2 , fissiamo per esempio $(1, 2)$, di conseguenza un solo colore, il quale rende comprensibilmente sempre la colorazione corretta. La medesima cosa invece non accade per quanto riguarda gli altri rivestimenti ramificati a più fogli, non tutti i link infatti possono essere colorati correttamente per esempio con i tre colori $(1, 2) = \text{blue}$, $(1, 3) = \text{verde}$, $(2, 3) = \text{rosso}$.

Esempio 3.2. *Nodo banale*



Esempio 3.3. *Trifoglio*

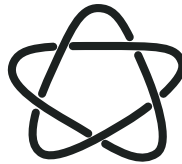


Per questo nodo esiste una colorazione corretta nei tre colori $(1, 2) = \text{blue}$, $(1, 3) = \text{verde}$, $(2, 3) = \text{rosso}$, ma per esempio non esiste una colorazione nei sei colori $(1, 2) = \text{blue}$, $(1, 3) = \text{verde}$, $(2, 3) = \text{rosso}$, $(1, 4) = \text{celeste}$, $(2, 4) = \text{viola}$, $(3, 4) = \text{giallo}$.

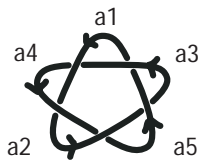
3.3.1 Metodo di Colorazione

Illustriamo ora il nostro metodo di procedere per la colorazione dei nodi, per poi estendere tutto il ragionamento al caso dei link. Si consideri il diagramma di un qualsiasi nodo ad esempio

Nodo5-1



Innanzitutto numeriamo e orientiamo gli archi da cui è composto tale nodo, ricordando che, poichè lavoriamo con delle trasposizioni, il verso di percorrenza fissato per il nodo risulta essere ininfluenza.



Fissiamo il primo arco a_1 , associandolo alla trasposizione $(1, 2)$

$$a_1 = (1, 2)$$

A questo punto per il successivo arco $a_2 = (i, j)$ si hanno tre possibili modi di procedere

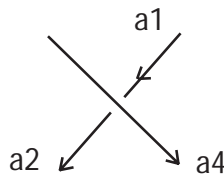
1. $(i, j) = (1, 2)$ stessa trasposizione di a_1
2. $(i, j) : i = 1, 2$ e $j \neq 1, 2$ trasposizione non disgiunta da quella di a_1
3. $i, j \neq 1, 2$ trasposizione disgiunta da quella di a_1

Per esempio nel caso di $p = 3$ abbiamo

1. $a_2 = (1, 2)$
2. $a_2 = (1, 3)$ o $a_2 = (2, 3)$
3. in questo contesto non abbiamo questa possibilità in quanto per $p = 3$ abbiamo $i, j = 1, 2, 3$

Percorriamo comunque parallelamente tutte e tre queste possibili vie.

Ora è il momento di considerare gli incroci che formano il nodo considerato, in particolare cerchiamo l'incrocio nel quale convergono gli archi a_1 e a_2 .



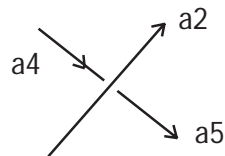
Imponiamo su tale incrocio le relazioni di Wirtinger, in particolare nel caso dell'esempio queste risultano avere la forma

$$a_1 = a_4 a_2 a_4^{-1}$$

In questo caso si noti come avendo già fissato a_1 e a_2 , abbiamo un solo modo di colorare a_4 seguendo tale relazione e cioè

1. $a_1 = (1, 2), a_2 = (1, 2) \implies a_4 = (1, 2)$
2. $a_1 = (1, 2), a_2 = (1, 3) \implies a_4 = (2, 3)$
3. $a_1 = (1, 2), a_2 = (2, 3) \implies a_4 = (1, 3)$

Va sottolineato che non sempre ci si trova nella fortunata situazione del precedente esempio, in cui cioè fissati i primi due archi a_1 e a_2 si procede per colorazioni "obbligatorie". Vi sono infatti anche casi in cui non è sempre possibile trovare incroci che hanno due archi già precedentemente colorati, in tutti questi casi va fissata arbitrariamente la colorazione di un ulteriore arco, ricordandosi poi però di considerare tutte le strade percorribili che emergono, come descritto nell' esempio che segue. La colorazione del nodo continua ripetendo la precedente operazione per ogni altro incrocio cercando, fino a quando è possibile, quelli in cui già due archi sono stati colorati. Ritornando all' esempio abbiamo



da cui

1. $a_4 = (1, 2), a_2 = (1, 2) \implies a_5 = (1, 2)$
2. $a_4 = (2, 3), a_2 = (1, 3) \implies a_5 = (1, 2)$
3. $a_4 = (1, 3), a_2 = (2, 3) \implies a_5 = (1, 2)$

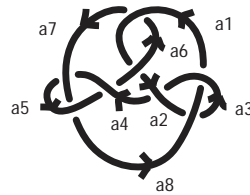
Procedendo sempre in questo modo, man mano, ad ogni incrocio, si colora un nuovo arco, tale metodo si arresterà quando abbiamo colorato tutti gli archi. A questo punto nei casi fortunati, in cui cioè, fissati i primi due archi a_1 e a_2 , si procede fino alla fine per colorazioni obbligatorie, il nostro metodo per costruzione fornisce una colorazione corretta del nodo. Per i casi invece in cui va fissata arbitrariamente la colorazione di un ulteriore arco oltre a_1 e a_2 ,

è necessario controllare che su ogni incrocio le relazioni di Wirtinger, con la colorazione data siano verificate.

Si osservi come il metodo appena descritto sia applicabile per qualsiasi numero di fogli p del rivestimento, siamo in grado quindi di trovare tutte le possibili colorazioni corrette ad uno a tre o a più colori di un qualsiasi nodo. Tali colorazioni corrette possono tuttavia risultare equivalenti, va controllato quindi che al termine del procedimento sopra descritto queste non si possano ottenere una dall'altra tramite una permutazione di indici. Quest'ultima osservazione ci permette anche di migliorare il metodo stesso velocizzandolo in quanto una volta fissato il primo arco $a_1 = (1, 2)$ possiamo colorare a_2 con $(1, 2)$ e con $(1, 3)$ o $(2, 3)$, tralasciando quindi uno fra i due ultimi casi, in quanto si ottengono uno dall'altro scambiando l'uno con il due.

Esempio 3.4. *Consideriamo il seguente nodo:*

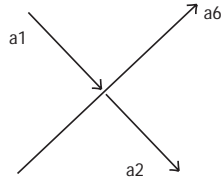
Nodo 8-15



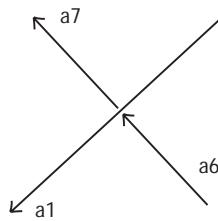
Fissiamo $a_1 = (1, 2)$ a questo punto per il successivo arco $a_2 = (i, j)$ si hanno tre possibili modi di procedere

1. $(i, j) = (1, 2)$ stessa trasposizione di a_1
2. $(i, j) : i = 1, 2 \quad e \quad j \neq 1, 2$ trasposizione non disgiunta da quella di a_1
3. $i, j \neq 1, 2$ trasposizione disgiunta da quella di a_1

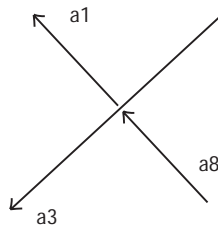
Illustriamo ora in particolare il caso $a_2 = (1, 2)$, e considerando il seguente incrocio



otteniamo $a_6 = (1, 2)$, passiamo poi all'incrocio



da cui otteniamo $a_7 = (1, 2)$. A questo punto considerando gli incroci rimanenti osserviamo che in nessuno di essi ci troviamo nel caso di avere già due archi su tre colorati, procediamo quindi scegliendo arbitrariamente uno fra gli incroci in cui abbiamo un arco colorato, per esempio



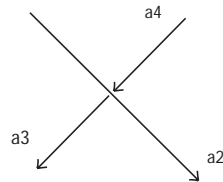
Da questo ricaviamo tre possibili strade:

1. $a_8 = (1, 2)$ da cui $a_3 = (1, 2)$
2. $a_8 = (1, 3)$ da cui $a_3 = (2, 3)$
3. $a_8 = (2, 3)$ da cui $a_3 = (1, 3)$

le quali vanno tutte percorse.

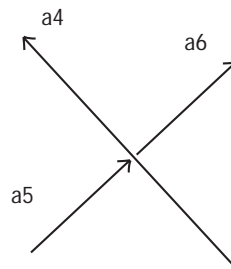
Caso 1

Da



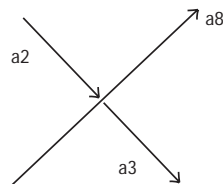
otteniamo $a_4 = (1, 2)$

Da

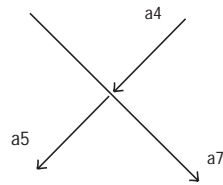


otteniamo $a_5 = (1, 2)$

In questo caso abbiamo colorato tutti gli archi del nostro nodo ma si noti che nel farlo non abbiamo utilizzato tutti gli incroci da cui esso è formato, il passo successivo è quindi quello di verificare in tali contesti che le relazioni di Wirtinger siano rispettate. Abbiamo in particolare

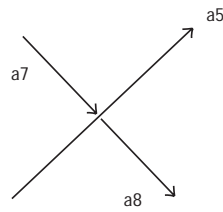


in cui $a_2 = a_8 a_3 a_7$, per quanto fatto sopra abbiamo $(1, 2) = (1, 2)(1, 2)(1, 2)$.



in cui $a_5 = a_7 a_4 a_7$, per quanto fatto sopra abbiamo $(1, 2) = (1, 2)(1, 2)(1, 2)$.

Infine

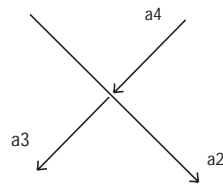


in cui $a_5 = a_7 a_4 a_7$, per quanto fatto sopra abbiamo $(1, 2) = (1, 2)(1, 2)(1, 2)$.

In conclusione lo studio di questo primo caso possibile ci ha fornito solamente una colorazione ad un solo colore per il nodo studiato.

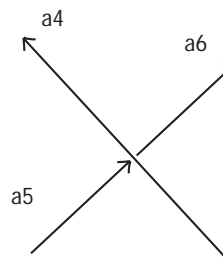
Caso2

Da



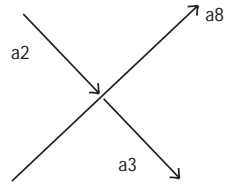
otteniamo $a_4 = (1, 3)$

Da



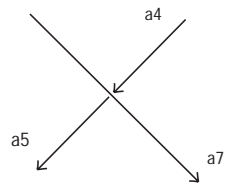
otteniamo $a_5 = (2, 3)$

Da



in cui $a_2 = a_8 a_3 a_8$, per quanto fatto sopra abbiamo $(1, 2) = (1, 3)(2, 3)(1, 3)$.

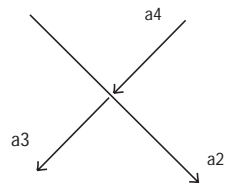
Da



in cui $a_5 = a_7 a_4 a_7$, per quanto fatto sopra abbiamo $(2, 3) \neq (1, 2)(1, 2)(1, 2)$, in questo secondo caso quindi non abbiamo ottenuto nessuna colorazione corretta.

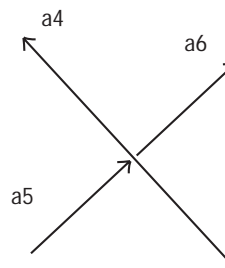
Caso3

In quest'ultimo caso abbiamo invece una situazione del tutto diversa infatti da



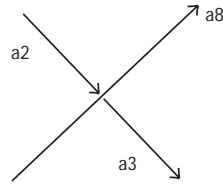
otteniamo $a_4 = (2, 3)$

Da



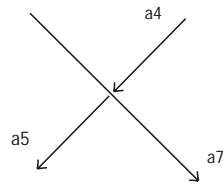
otteniamo $a_5 = (1, 3)$

Da



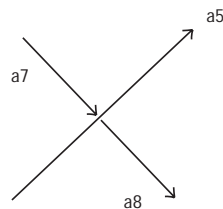
in cui $a_2 = a_8 a_3 a_8$, per quanto fatto sopra abbiamo $(1, 2) = (2, 3)(1, 3)(2, 3)$.

Da



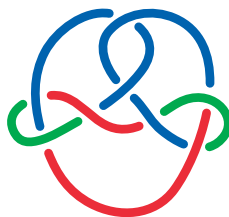
in cui $a_5 = a_7 a_4 a_7$, per quanto fatto sopra abbiamo $(1, 3) = (1, 2)(2, 3)(1, 2)$.

Infine da



in cui $a_5 = a_7 a_4 a_7$, per quanto fatto sopra abbiamo $(1, 2) = (1, 3)(2, 3)(1, 3)$.

Questo terzo caso ci ha dunque portato ad una colorazione corretta in tre colori come mostrato nella seguente figura

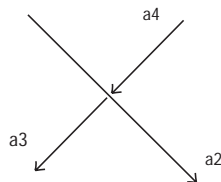


Fin'ora ci siamo limitati alla colorazione corretta dei nodi, per quanto riguarda i link il procedimento rimane il medesimo, semplicemente l'operazione di numerare e orientare gli archi formanti il link va ripetuta per ogni componente di quest'ultimo.

3.3.2 Algoritmo di Colorazione

Il passo successivo è quello di codificare il metodo sopra descritto con un algoritmo, in modo tale da poter ottenere tutte le possibili colorazioni esatte associabili per ogni nodo o link in tempi più brevi.

Possiamo suddividere il lavoro in due parti la prima riguarda la codifica dei diagrammi dei link da colorare, mentre la seconda calcola su di essi una corretta colorazione. Per quanto riguarda la codifica dei diagrammi l'idea è quella di descrivere un dato link attraverso la descrizione dei suoi incroci nel seguente modo. Ricordiamo, innanzitutto che, per come si è definito il diagramma, in ogni suo punto di incrocio confluiscono esattamente tre archi, possiamo inoltre osservare che vi è un arco in particolare che attraversa gli altri due. Possiamo quindi pensare di caratterizzare un qualsiasi punto di incrocio tramite l'assegnazione di una tripletta di numeri che specificano gli archi che ivi si incontrano, con la sola regola di indicare come primo arco quello che attraversa gli altri due. Per esempio ad una situazione di questo tipo



si associa la tripletta ordinata $\{2, 3, 4\}$. In quest'ottica quindi il diagramma di un dato link viene visto come una sequenza di triplette le quali contengono due informazioni rispetto all'incrocio a cui si riferiscono: gli archi che lì confluiscono e quale arco fra i tre presenti attraversa gli altri due. Si noti che per i nostri scopi non sono necessarie altre informazioni sul link, abbiamo già osservato infatti che, per quanto riguarda la colorazione di link, il verso di percorrenza scelto per quest'ultimi non è influente. Per quanto riguarda poi la vera e propria colorazione del link considerato, l'idea è quella di costruire una matrice in cui ad ogni arco viene via via associata una trasposizione (i, j) (o colore) seguendo lo schema di lavoro descritto nel precedente paragrafo. Di fatto si assegna ad ogni arco una trasposizione, in seguito si considerano progressivamente i vari incroci da cui è formato il link con le rispettive relazioni di Wirtinger aggiornando via via gli assegnamenti arco-trasposizione. In tale modo la colorazione diviene progressivamente corretta per costruzione. Il passo successivo è la codifica di tale schema mediante un linguaggio di programmazione, in questa tesi usiamo il Mathematica, qui di seguito riportiamo l'implementazione in tale linguaggio del metodo sopra descritto mentre la colorazione vera e propria dei vari link e nodi studiati, è riportata in appendice.

```
Colorazioni[d_] := (l = {};  
  Module[{lista = {col[1 -> {1, 2}]}}, lista //. c_col := Aggiorna[c, d];  
  Sort[l]])
```

Tramite la funzione Colorazioni che viene applicata al diagramma d iterativamente si utilizza la seguente funzione Aggiorna:

```
Aggiorna[c_, d_] :=
```

```

Replace[d /.
  Apply[List,
    c], {{___, {{i_,j_}, {k_,l_}, {m_,
      n_}}, ___} /; (Con[{i,j}, {k,l}] != {m,n}) :>
  Apply[Sequence, {}], {___, {n_Integer, {i_,j_}, {k_,l_}}, ___} :>
  Switch[Length[Intersection[{i,j}, {k,l}]], 0, Apply[Sequence, {}],
    1, Append[c, n -> Con[{i,j}, {k,l}]], 2,
  Apply[Sequence,
    Map[Append[c, n -> #] &,
      Scelte[1, {i,j}, c]]], {___, {{i_,j_}, {k_,l_},
      n_Integer} | {{i_,j_}, n_Integer, {k_,l_}}, ___} :>
  Append[c,
    n -> Con[{i,j}, {k,l}]], {___, {_, {i_,j_}, n_Integer} | {_,
      n_Integer, {i_,j_}}, ___} :>
  Apply[Sequence,
    Map[Append[c, n -> #] &,
      Scelte[2, {i,j}, c]]], {___, {{i_,j_},
      n_Integer, _} | {{i_,j_}, _, n_Integer}, ___} :>
  Apply[Sequence,
    Map[Append[c, n -> #] &, Scelte[3, {i,j}, c]]], _ :> (s = Sort[c];
    Print[s]; l = Append[l,s]; Apply[Sequence, {}])}]

```

Aggiorna mette in relazione le colorazioni c con i vari archi che formano il diagramma d , tale corrispondenza viene fatta sulla base delle regole teoriche descritte in precedenza ed in particolare all'interno del programma viene gestita

dalle tre seguenti funzioni: Scelte 1, Scelte 2, Scelte3

```
Scelte[1, {i_, j_}, c_] :=
  Module[{f = Fogli[c]},
    Module[{altri = Complement[f, {i,j}], n = Length[f]},
      Union[{{i,j}}, Riduci[2, Trasp[altri], c],
        Map[{-#, n + 1} &, Riduci[1, altri, c]], {{n + 1, n + 2}}]]]
```

```
Scelte[2, {i_, j_}, c_] :=
  Module[{f = Fogli[c]},
    Module[{altri = Complement[f, {i,j}], n = Length[f]},
      Union[{{i, j}}, Map[Sort[#{i, #}] &, Riduci[1, altri, c]],
        Map[Sort[#{j, #}] &, Riduci[1, altri, c]],
      If[Equiv[1, i, j, c], {{i, n + 1}}, {{i, n + 1}, {j, n + 1}}]]]
```

```
Scelte[3, {i_, j_}, c_] :=
  Module[{f = Fogli[c]},
    Module[{n = Length[f]},
      Union[Riduci[2, Trasp[f], c],
        Map[{-#, n + 1} &, Riduci[1, f, c]], {{n + 1, n + 2}}]]]
```

Si noti che le funzioni Scelte utilizzano a loro volta le funzioni Riduci 1 e 2 le quali ci permettono di ridurre le possibili colorazioni non considerando quelle strade che ci porterebbero a colorazioni equivalenti a quelle che stiamo via via costruendo.

```
Riduci[1, l_, c_] :=
```



```
l //. {x___, a_, y___, b_, z___} /; Equiv[1, a, b, c] := {x, a, y, z}
```

```
Riduci[2, l_, c_] :=
```

```
l //. {x___, a_, y___, b_, z___} /; Equiv[2, a, b, c] := {x, a, y, z}
```

Le seguenti funzioni hanno il compito di confrontare la colorazione c con una colorazione coniugata (Equiv1) e con una in cui applico una qualsiasi trasposizione (Equiv2)

```
Equiv[1, i_, j_,
```

```
  c_] := (c === (c /. ((n_ -> t_) -> (n -> Con[Sort[{i, j}], t]))))
```

```
Equiv[2, {i_, j_}, {k_, l_}, c_] :=
```

```
Or[(c === (c /. ((n_ -> t_) -> (n ->
  Con[Sort[{i, k}],
    Con[Sort[{j, l}], t]))))), (c === (c /. ((n_ ->
  t_) -> (n -> Con[Sort[{i, l}], Con[Sort[{j, k}], t])))))]
```

Infine abbiamo

```
Con[{i_, j_}, {k_, l_}] := Sort[{k, l} /. {i -> j, j -> i}]
```

```
Trasp[f_] :=
```

```
Flatten[Table[f[[{k, l}]], {k, 1, Length[f]}, {l, k + 1, Length[f]}, 1]
```

```
Fogli[col[r___]] := Apply[Union, {r} /. ((_ -> {i_, j_}) -> {i, j})]
```

le quali si occupano di generare tutte le possibili trasposizioni in relazione al numero di fogli del rivestimento che stiamo considerando.

Qui di riportiamo l'applicazione del precedente algoritmo al trifoglio.

```
Diagramma={{1,2,3},{2,3,1},{3,1,2}}           (*3,1*)
```

```
Colorazioni[Diagramma];
```

```
{{1,2,3},{2,3,1},{3,1,2}}
```

```
col[1-> {1,2},2-> {1,2},3-> {1,2}]
```

```
col[1-> {1,2},2-> {2,3},3-> {1,3}]
```

Capitolo 4

Classificazione

Il lavoro illustrato fin'ora ci ha permesso di definire tutta una serie di rivestimenti ramificati di S^3 . In tale capitolo vediamo lo studio svolto su tali rivestimenti, in particolare su quelli doppi e tripli, per risalire alla 3–varietà che ognuno di essi rappresenta.

4.1 Rivestimenti Doppi

Per lo studio dei rivestimenti ramificati doppi abbiamo deciso di sfruttare la relazione che lega i rivestimenti ramificati agli spezzamenti di Heegaard. Tale relazione è stata accennata nella dimostrazione del teorema di Hilden, Hirsh e Montesinos ne diamo ora una più dettagliata descrizione. Si consideri innanzitutto il fatto che ogni rivestimento ramificato può essere rappresentato attraverso un link o un nodo colorato correttamente, in particolare per i rivestimenti doppi è sufficiente un solo colore. Nel corso del primo capitolo poi, illustrando il concetto di treccia, abbiamo visto come tale oggetto sia

strettamente legato a quello di link, attraverso quella che abbiamo chiamato operazione di chiusura della treccia. Inoltre si è evidenziata un'ulteriore relazione possibile, quella fra le trecce e gli omeomorfismi fra superfici, in particolare ogni incrocio interno al diagramma di una treccia può essere associato ad un avvitamento di Dehn lungo un meridiano o un parallelo.

A questo punto la concatenazione di tutte queste relazioni appena ricordate ci porta agli spezzamenti di Heegaard, basta infatti ricordare che uno spezzamento di Heegaard è caratterizzato dal suo omeomorfismo di incollamento, il quale altro non è che un omeomorfismo fra superfici e quindi rappresentabile tramite una treccia. Abbiamo quindi costruito un ponte che ci permette di passare da un rivestimento ramificato doppio di una certa 3-varietà al corrispondente spezzamento di Heegaard, relativo alla medesima varietà. Vediamo ora in particolare come tale ponte può essere sfruttato per una particolare classe di rivestimenti ramificati doppi e cioè quelli per cui è possibile trasformarne il proprio link in una treccia a quattro stringhe. Per lo studio delle varietà associate a tali rivestimenti infatti si può considerare la seguente proposizione.

Proposizione 4.1. *Uno spezzamento di Heegaard specificato attraverso una treccia a quattro stringhe rappresenta sempre uno spazio lenticolare $L(p, q)$.*

Dim

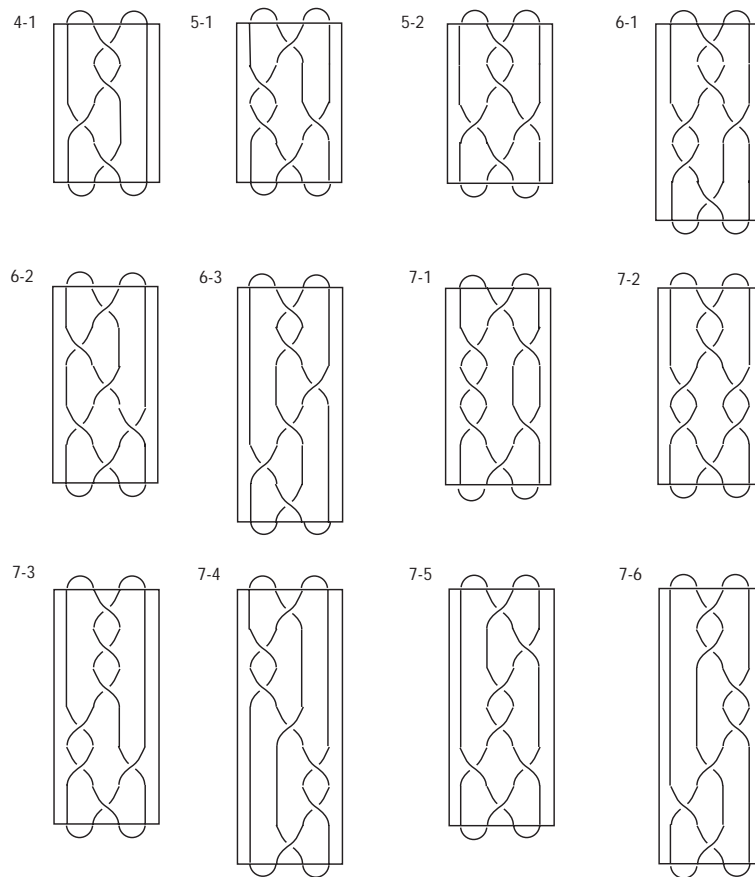
Basta ricordare che gli spazi lenticolari sono, per definizione, le 3-varietà ottenute dall'unione di due tori e quindi che gli spezzamenti di Heegaard formati da due tori sono $L(p, q)$. È facile verificare ora che la descrizione di uno spezzamento di Heegaard formato da due tori altro non può essere che una treccia a quattro stringhe, gli incroci interni a quest'ultima, in particolare, descrivono

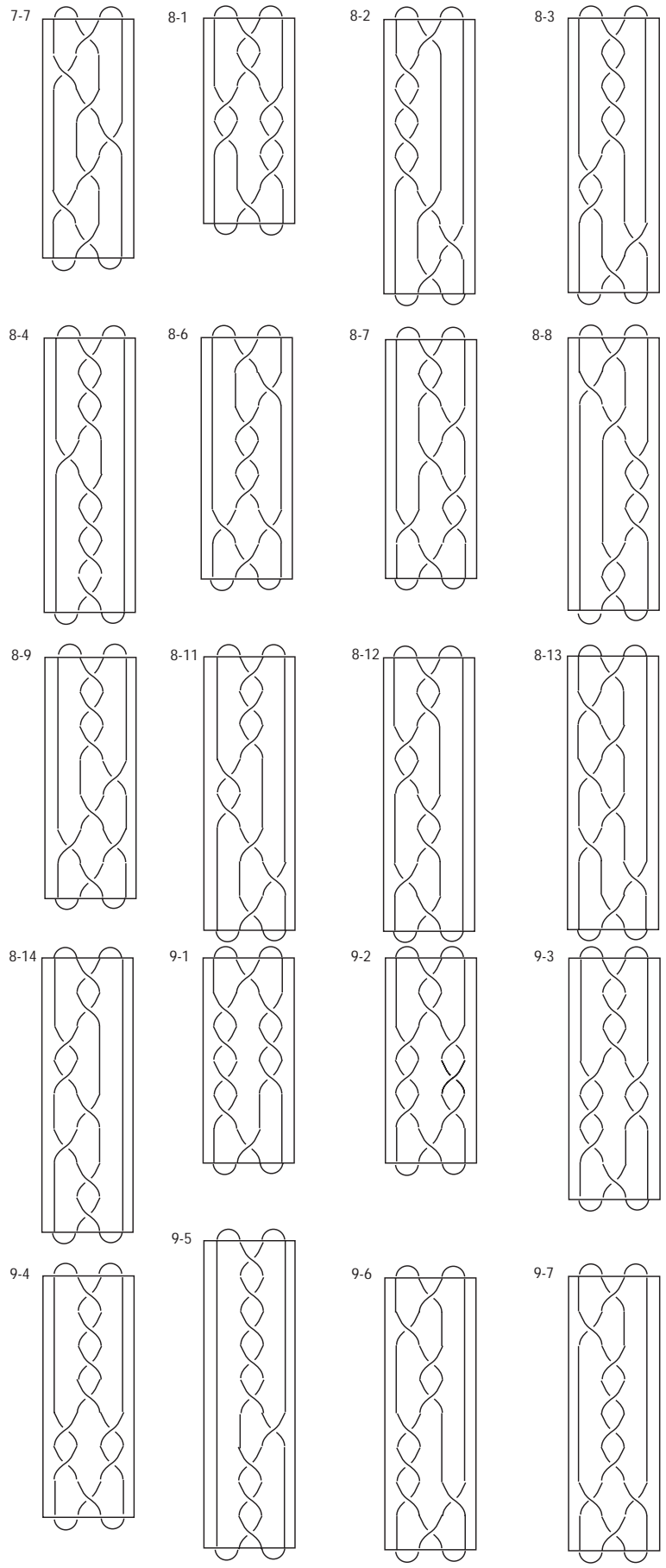
come i due tori andranno uniti.

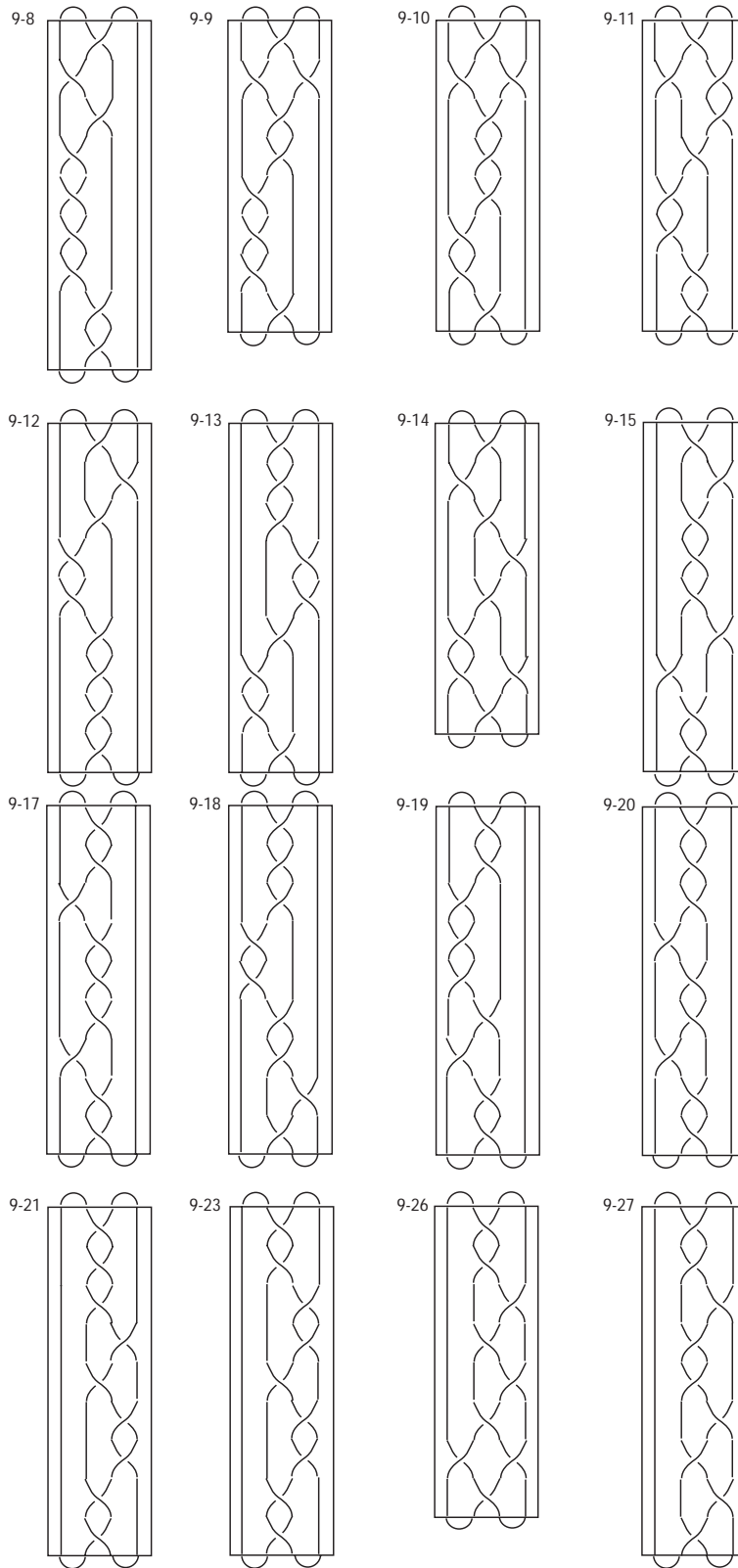
□

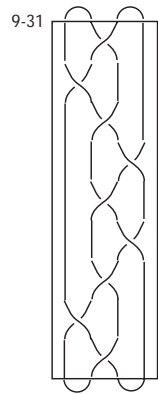
4.1.1 Trece dei Rivestimenti Doppi

Riportiamo qui di seguito tutte le rappresentazioni in termini di treccia a quattro stringhe trovate per i nodi ed i link da noi studiati.

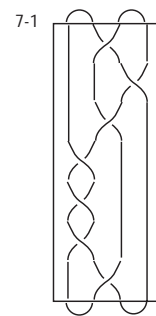
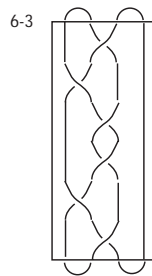
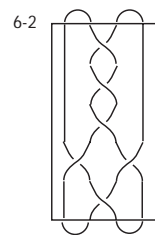
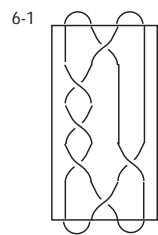
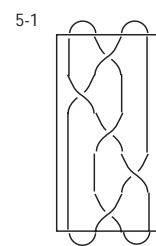
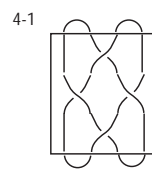
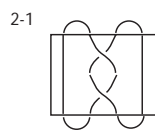
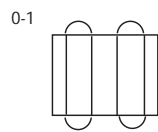


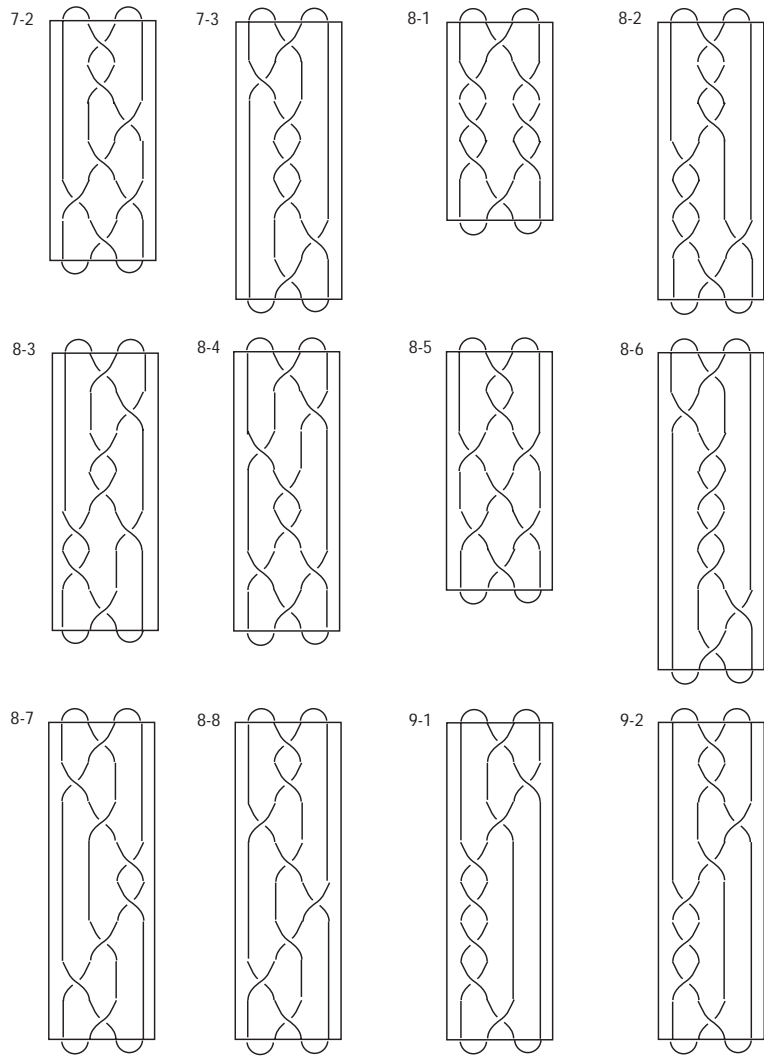


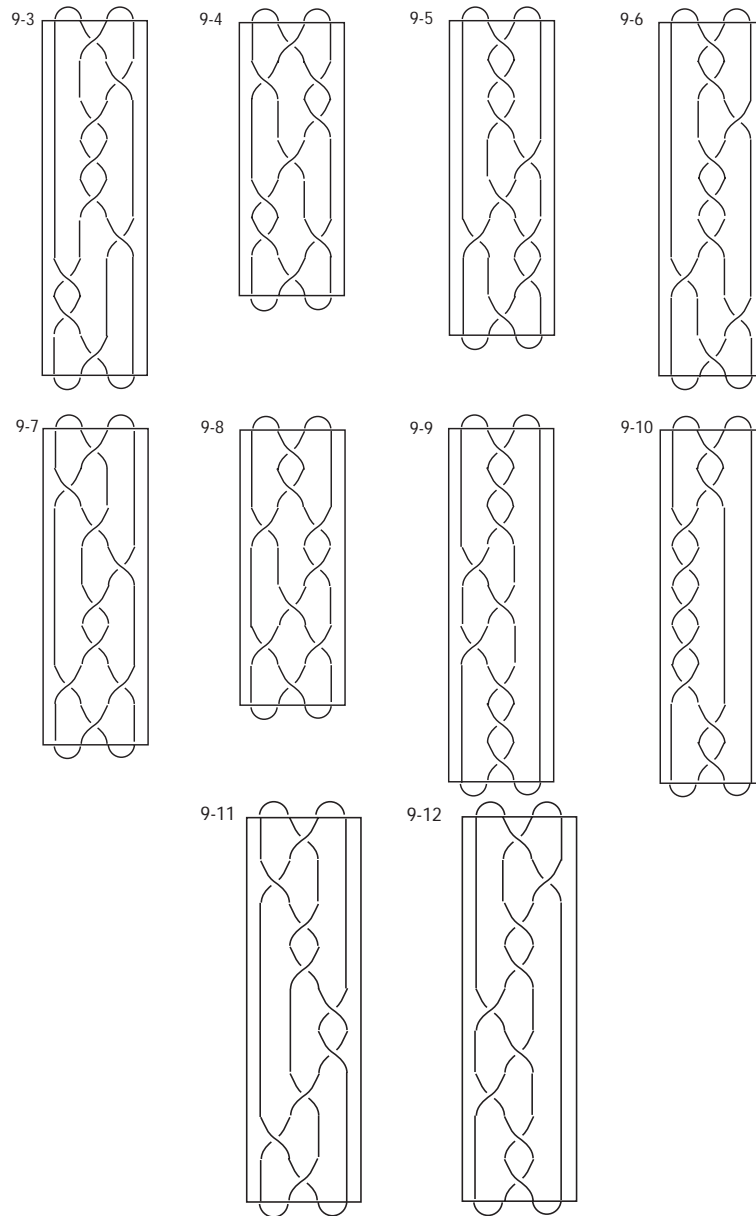




Link a 2 componenti





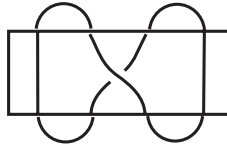


Ora per ogni treccia del precedente elenco calcoliamo il relativo spazio lenticolare nel seguente modo, ricordando inoltre che l'esistenza di tale spazio è garantita dalla precedente proprietà dimostrata. Consideriamo un toro e fissiamo il verso di percorrenza dei suoi meridiani e paralleli in senso antiorario.

Abbiamo già visto inoltre che gli elementi di base del gruppo delle trecce corrispondono a degli avvitamanti di Dehn lungo i meridiani e i paralleli di un toro, possiamo quindi costruire la seguente tabella in cui in particolare riportiamo anche le matrici relative a ciascun avvitemento considerato.

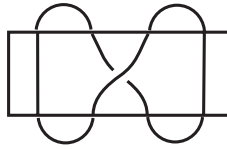
Avvitemento di Dehn positivo lungo α

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



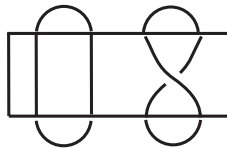
Avvitemento di Dehn negativo lungo α

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



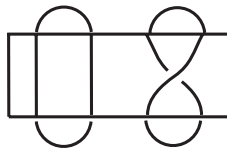
Avvitemento di Dehn positivo lungo β

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



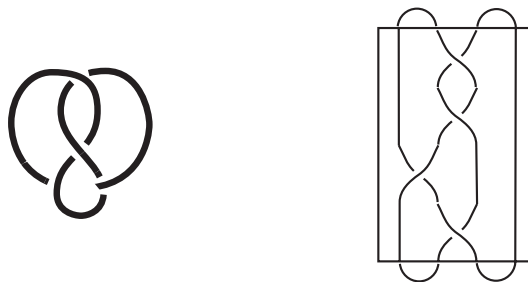
Avvitamento di Dehn negativo lungo β

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Quindi percorrendo, dall'alto verso il basso, gli elementi di base di una qualsiasi treccia fra quelle sopra elencate otteniamo una corrispondente composizione di avvistamenti di Dehn in termini di composizioni di matrici. Calcolando i vari prodotti fra matrici otteniamo a sua volta delle matrici per le quali gli elementi $a_{1,2}$ e $a_{2,2}$ sono rispettivamente la p e la q degli spazi lenticolari $L(p, q)$ cercati.

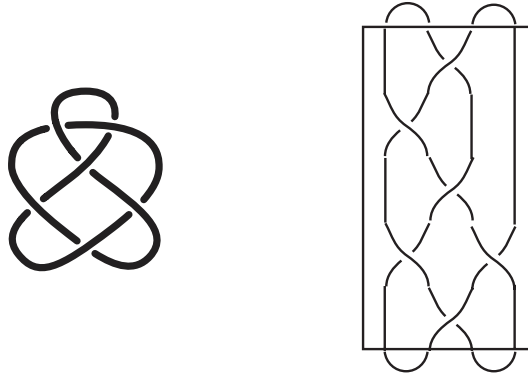
Esempio 4.1. *Nodo* 4_1



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$L(5, 2)$

Esempio 4.2. *Nodo* 6_2



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -11 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$L(-11, 7) \cong L(11, -7) \cong L(11, 14) \cong L(11, 4)$ tali congruenze sono conseguenza delle proprietà degli spazi lenticolari e delle seguenti uguaglianze

$$-7 * 14 \equiv 1 \text{ mod } 11$$

$$14 * 4 \equiv 1 \text{ mod } 11$$

Applicando il metodo appena descritto siamo riusciti a calcolare gli spazi lenticolari corrispondenti ad ogni treccia, trovando in questo modo tutte le varietà rappresentate dai rivestimenti doppi da cui siamo partiti. La tabella con i link ed i relativi spazi lenticolari ottenuti è riportata in appendice.

4.2 Rivestimenti Tripli

In questo caso prima di ricercare le 3-varietà rappresentate da tali rivestimenti è lecito chiedersi quali fra quest'ultimi siano equivalenti e quindi rappre-

sentino la medesima 3–varietà. Tale problematica è stata posta per la prima volta da Montesinos, il quale si è chiesto in particolare l'esistenza o meno di un insieme finito di trasformazioni tali che considerati due differenti diagrammi colorati rappresentano la stessa varietà se e solo se sono legati da una sequenza finita di suddette trasformazioni. Prima di approfondire ulteriormente tale questione diamo una definizione più rigorosa dei concetti utilizzati

4.2.1 Movimenti

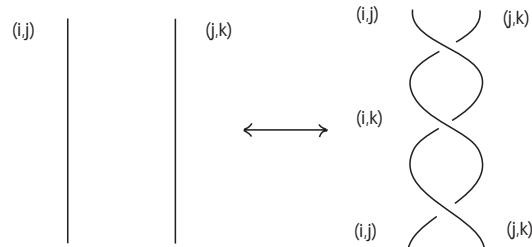
Definizione 4.1. *Con **movimento** di un link L si intende una qualche modifica del diagramma di L , il quale rappresenta un certo rivestimento ramificato $p : M \rightarrow N$, in un altro diagramma che rappresenti ancora un rivestimento ramificato.*

Definizione 4.2. *Se la 3–varietà rappresentata da p' è la stessa di p allora il movimento si dice **ammissibile**.*

Osservazione 4.1. *Ricordando i movimenti di Reidemeister, introdotti nel primo capitolo ne possiamo ora considerare una versione "colorata". Questa consiste nel ricolorare gli archi del diagramma modificati dagli ordinari movimenti di Reidemeister nell'unico modo compatibile con la regola "tutti uguali o tutti distinti". Tali movimenti così ridefiniti rappresentano ovviamente un primo esempio di movimenti ammissibili.*

Come già accennato R.Fox e J.M. Montesinos formularono il seguente problema circa i movimenti ammissibili: trovare un insieme di movimenti ammissibili sufficiente a generarli tutti.

Per diverso tempo il seguente movimento ammissibile

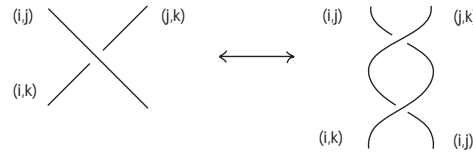


insieme ai movimenti di Reidemeister, è stato considerato erroneamente la soluzione del problema, fino a quando lo stesso Montesinos non ha scoperto un controesempio [cfr 15]. Più recentemente è stato definito un insieme completo di movimenti in [16] e ulteriormente migliorato in [18], fino ad arrivare al seguente teorema di equivalenza:

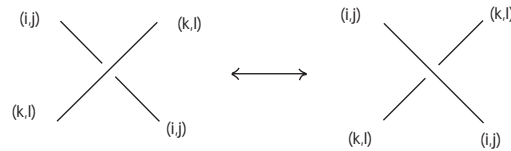
Teorema 4.1. *Due rivestimenti semplici di S^3 ramificati sopra due link rappresentano due 3-varietà orientate diffeomorfe se e solo se dopo una stabilizzazione di medesimo grado ≥ 4 i rispettivi diagrammi colorati dei loro link sono collegati tramite una sequenza finita di movimenti a e b e di isotopie del piano.*

Per la dimostrazione si veda [6]

Movimento a



Movimento b

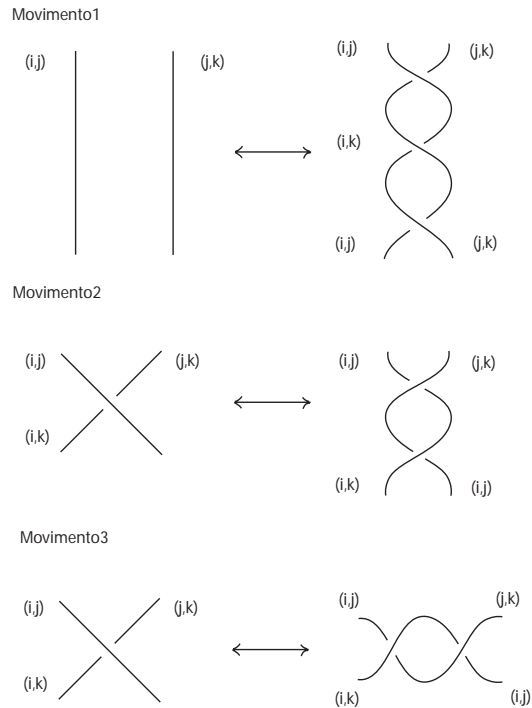


Per stabilizzazione si intende un particolare movimento ammissibile, il quale però ha senso solo nei casi di rivestimenti ramificati di S^m o B^m e, a differenza dei movimenti considerati fin' ora, modifica il numero di fogli del rivestimento associato al link.

Definizione 4.3. *Un rivestimento ramificato $p : M \rightarrow S^m$ di grado d può essere **stabilizzato** al grado $d + 1$, aggiungendo al diagramma del suo insieme di rami una banale $m-2$ -sfera, separata, colorata con la trasposizione $(i, d+1)$ per qualche $i = 1 \dots d$.*

La varietà che si ottiene dopo una tale operazione è ancora M , proprietà che fa della stabilizzazione un movimento ammissibile. Tale fatto si dimostra osservando che M risulta essere la somma connessa di M stessa, data dall'unione di $i = 1 \dots d$ fogli con la copia di S^m , quest'ultima relativa all'introduzione del foglio banale extra $d + 1$. Per il lavoro svolto in questa tesi si è dimostrato sufficiente il seguente insieme di movimenti dove in particolare va osservato

che i movimenti 2 e 3 sono equivalenti



Risultato importante è che utilizzando solo i movimenti sopra elencati siamo stati in grado di ridurre tutti i diagrammi per cui in precedenza eravamo riusciti a trovare una corretta colorazione in tre colori. Abbiamo quindi dimostrato che tutti i rivestimenti tripli trovati nel corso di questa tesi, si riducono a rivestimenti doppi e non solo, a rivestimenti doppi appartenenti alla specifica classe di quelli studiati nel paragrafo precedente. Riportiamo qui di seguito le dimostrazioni complete di tale risultato per ogni nodo e link considerato.

Nodi

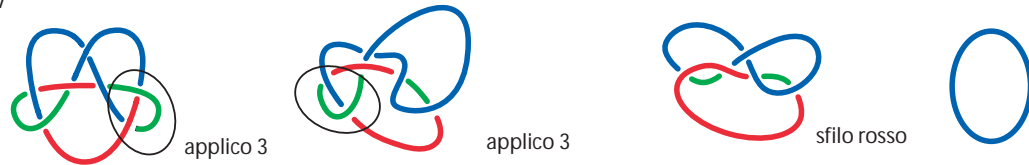
6-1



7-4



7-7



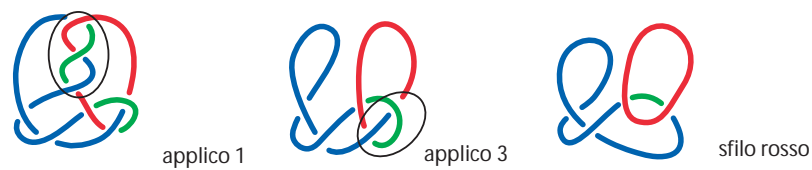
8-5



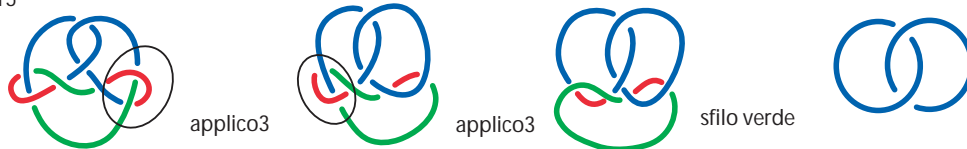
8-10



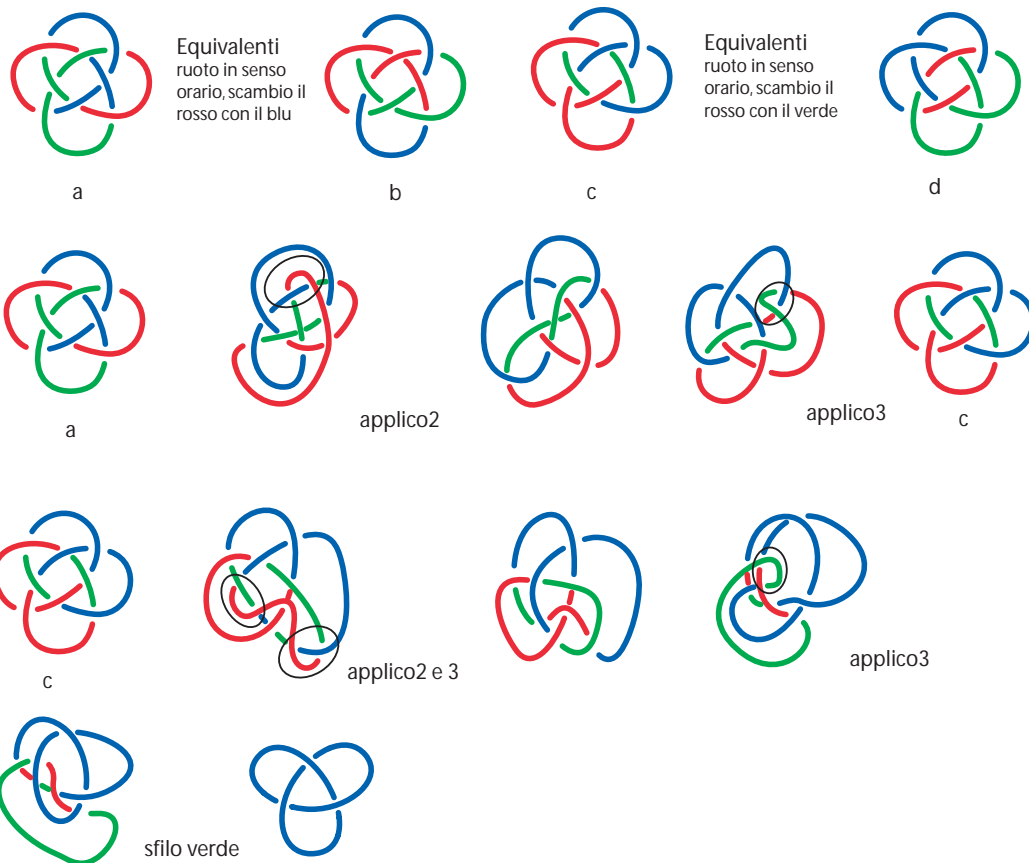
8-11



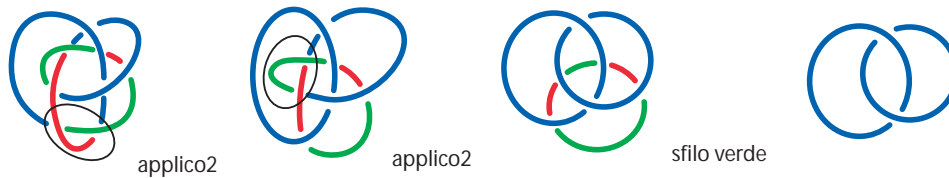
8-15



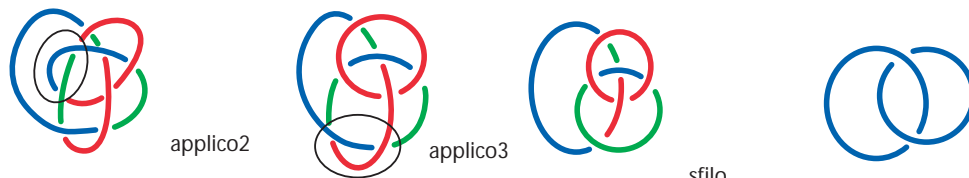
8-18



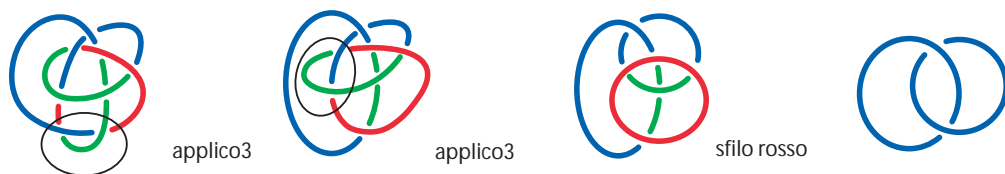
8-19



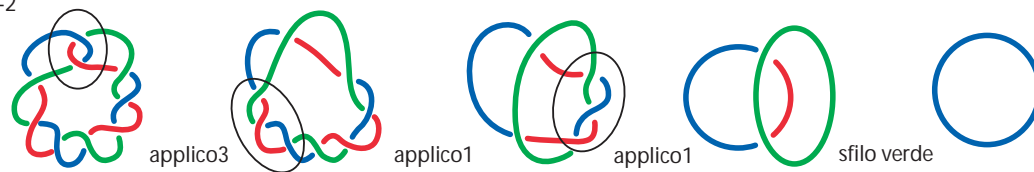
8-20



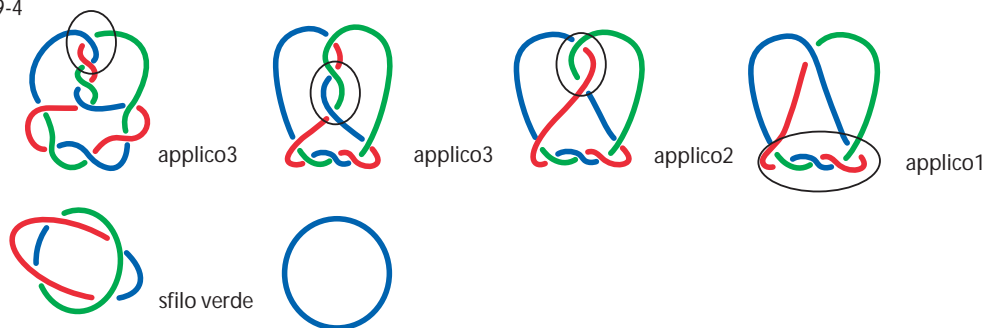
8-21



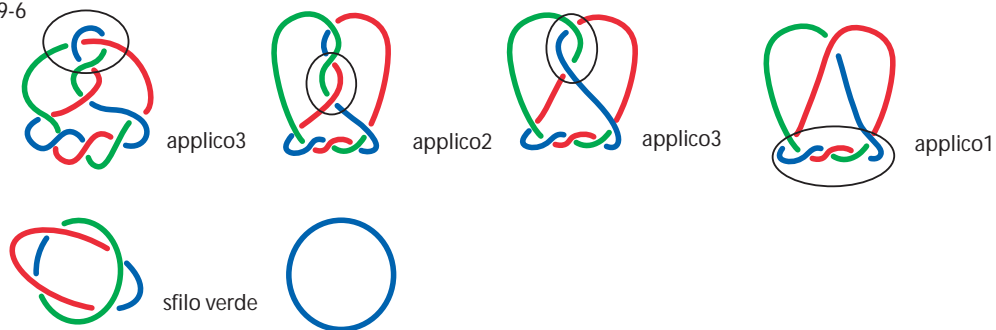
9-2



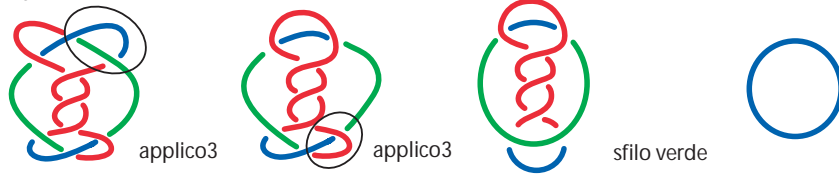
9-4



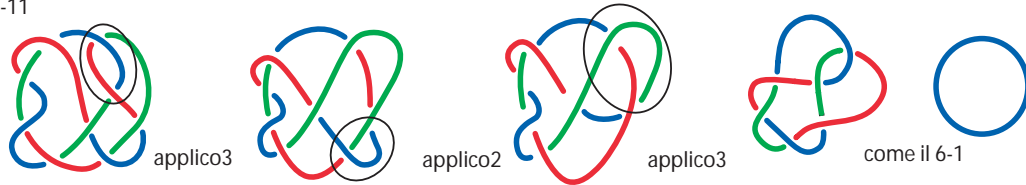
9-6



9-10



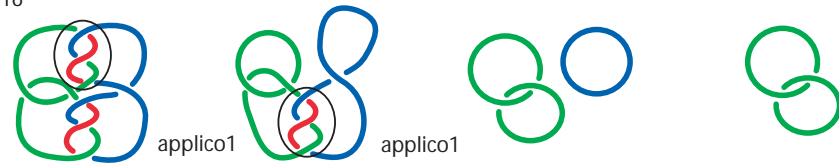
9-11



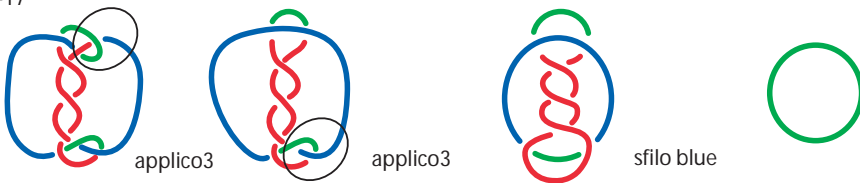
9-15



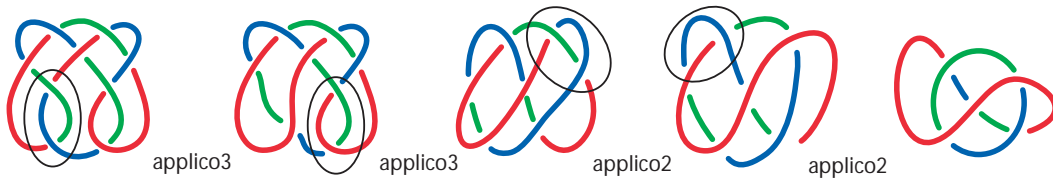
9-16



9-17

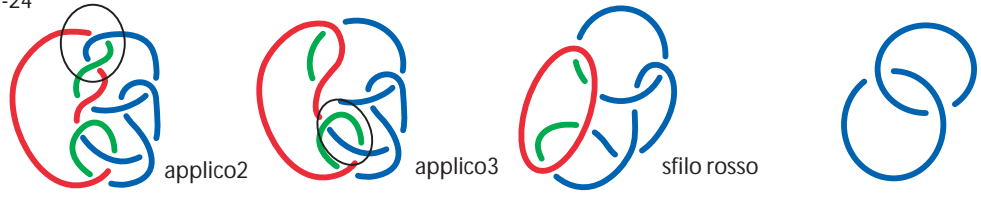


9-23

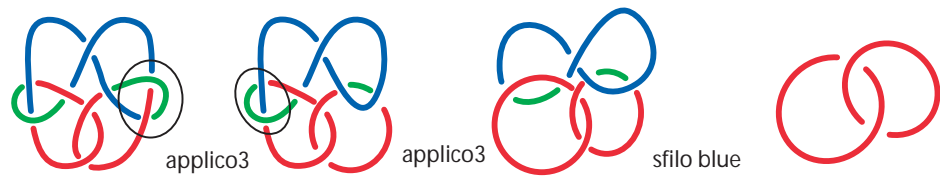




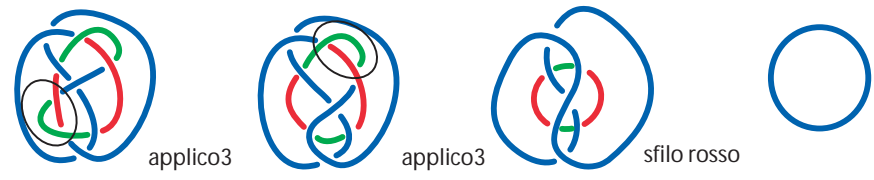
9-24



9-28



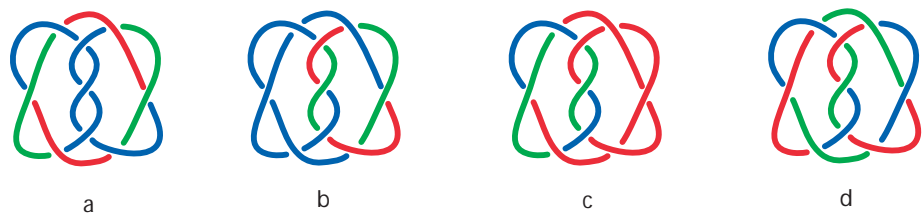
9-29

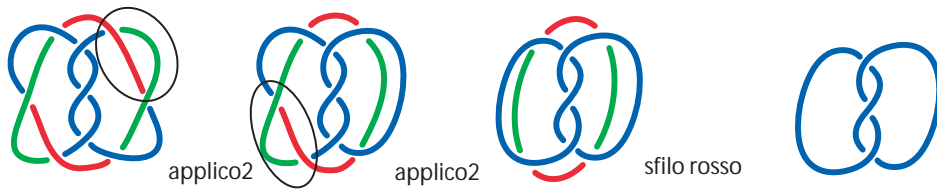


9-34

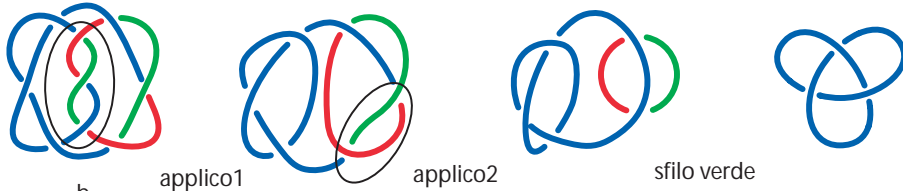


9-35

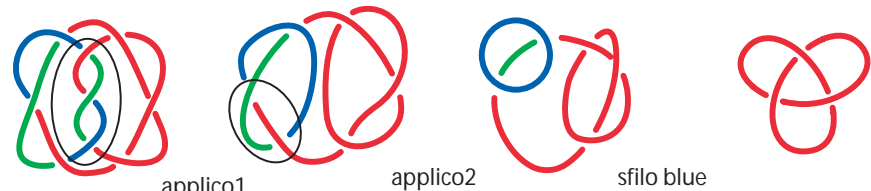




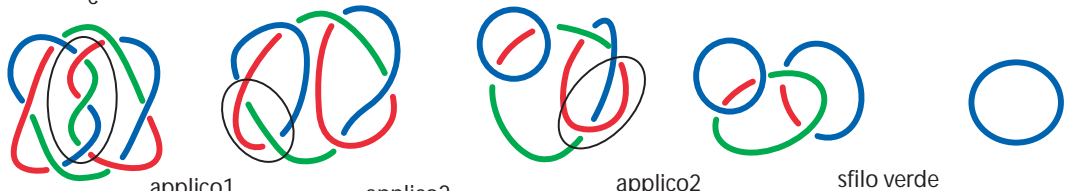
a



b

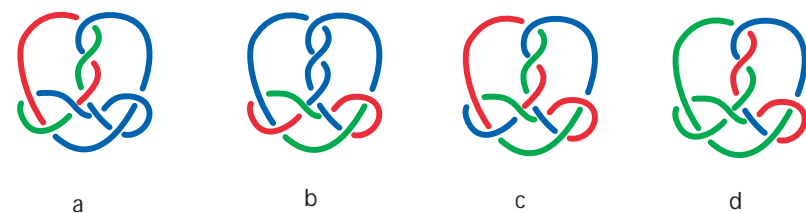


c



d

9-37

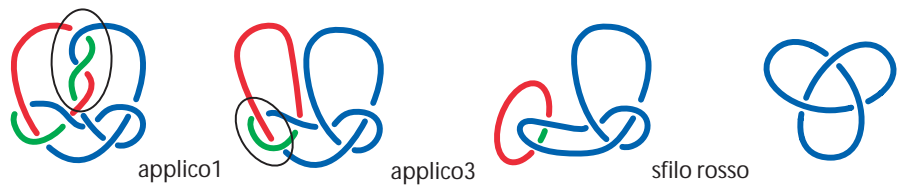


a

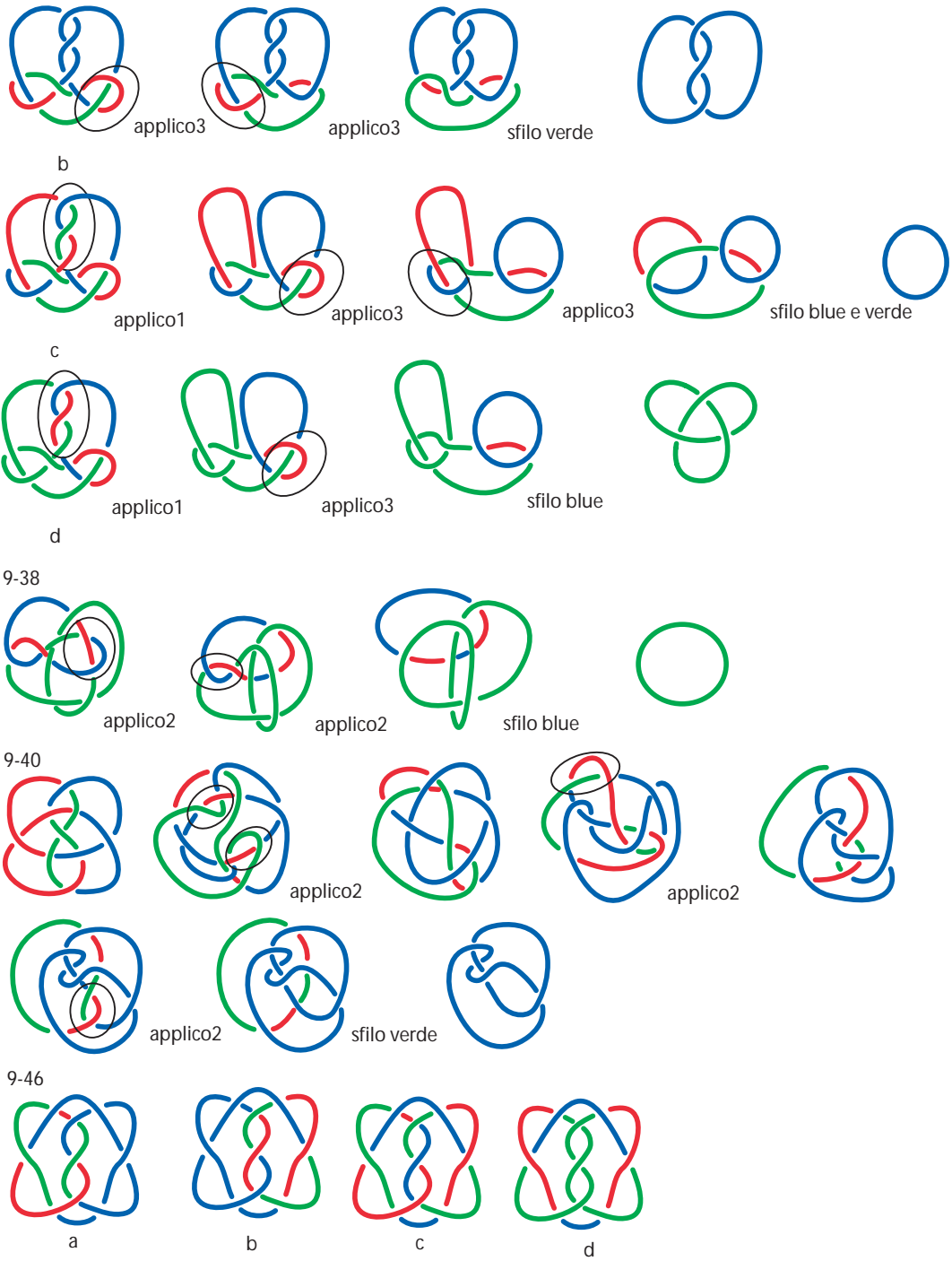
b

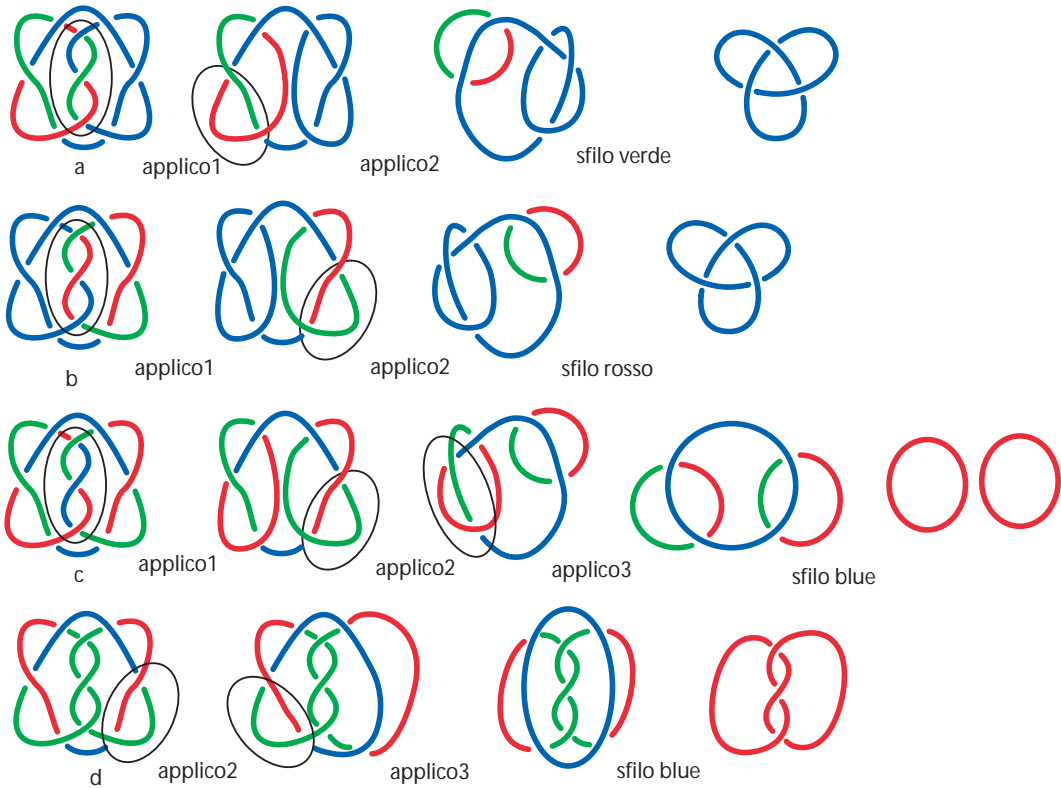
c

d

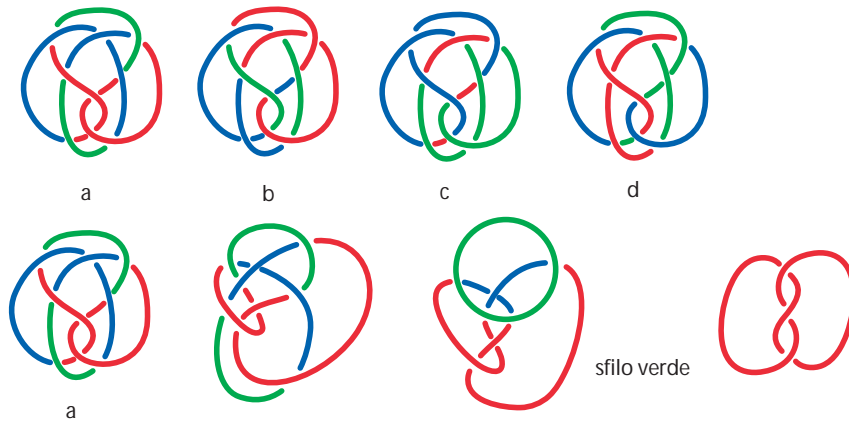


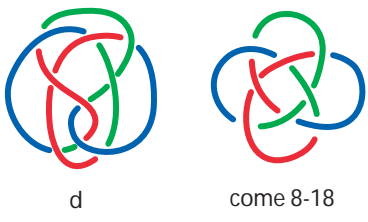
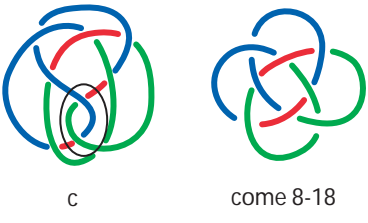
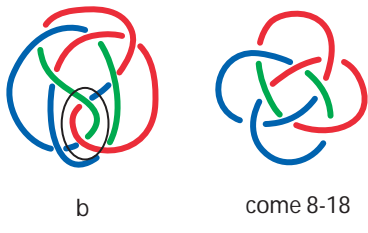
a



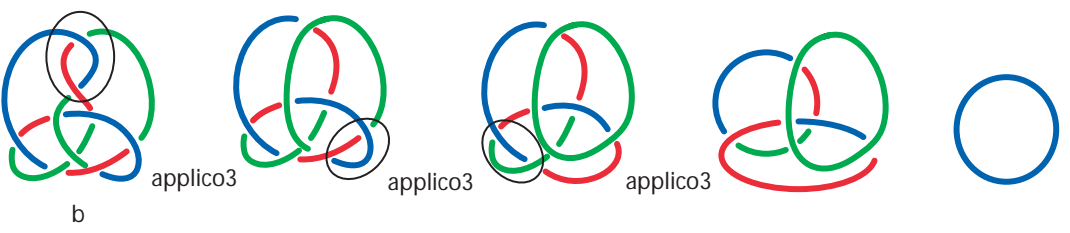
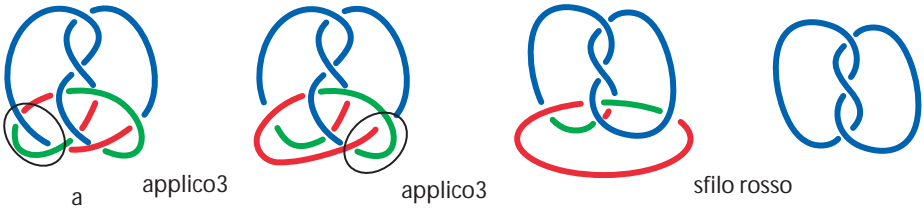
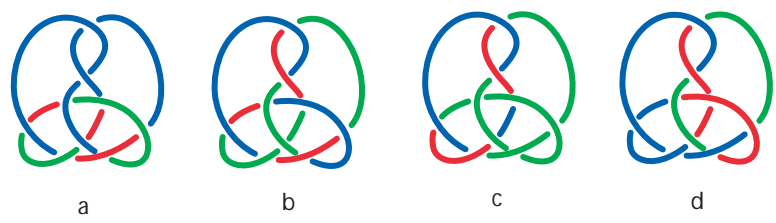


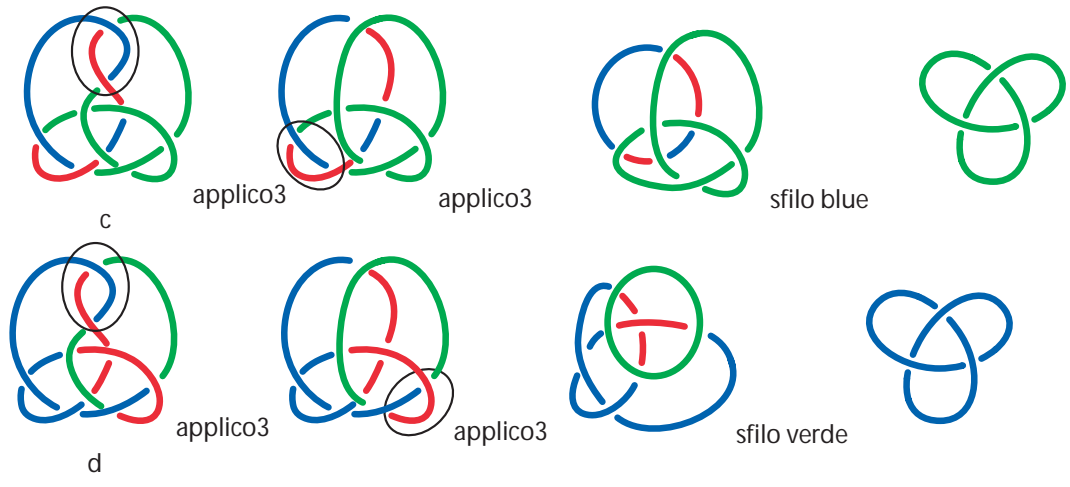
9-47





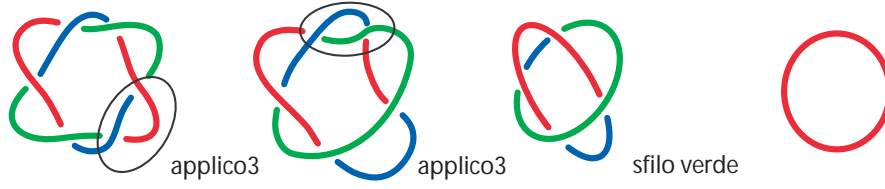
9-48



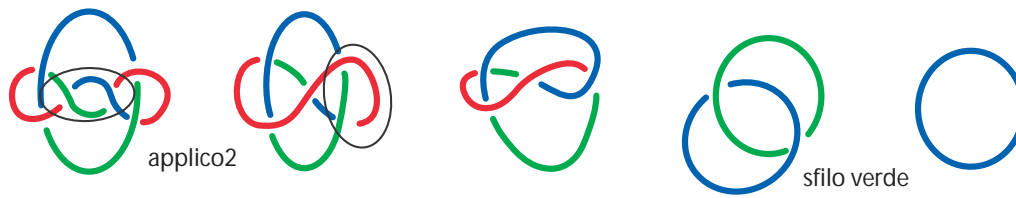


Link

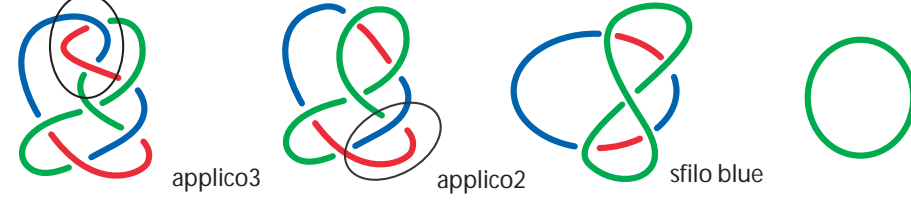
6-2-1



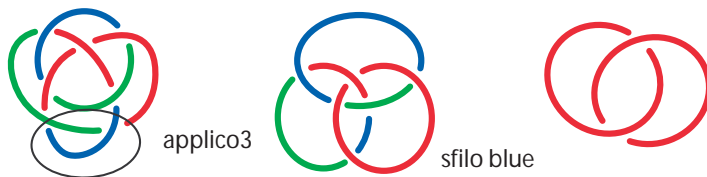
6-2-3



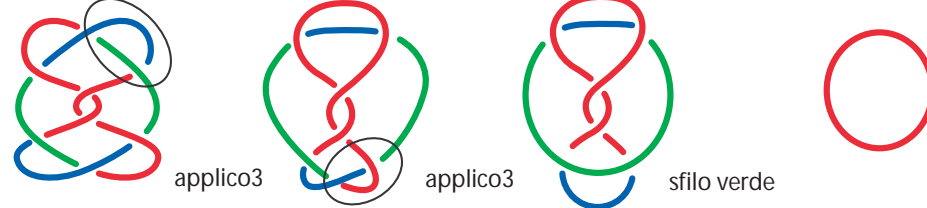
7-2-2



7-2-6



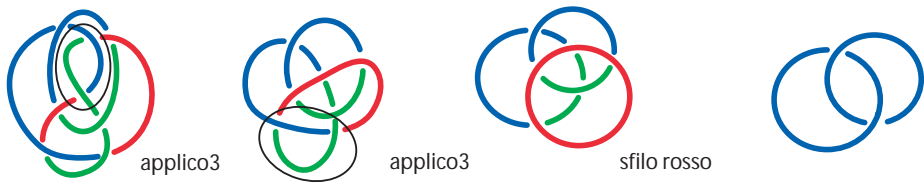
8-2-4



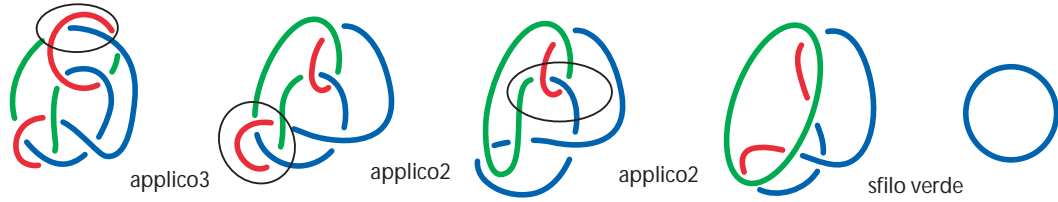
8-2-7



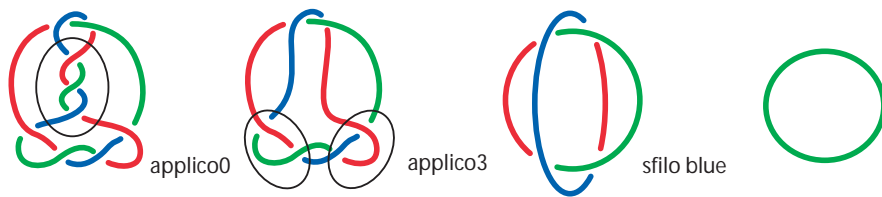
8-2-14



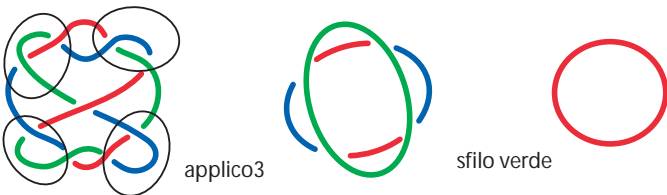
8-2-16



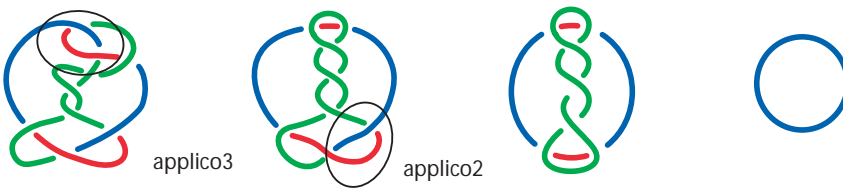
9-2-3



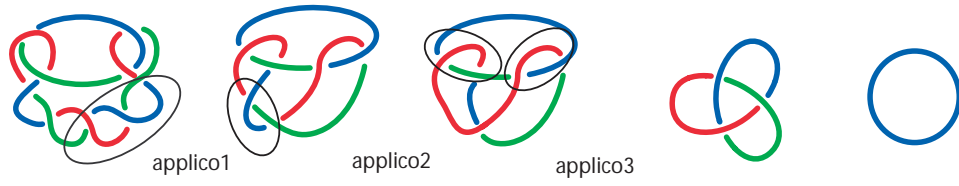
9-2-4



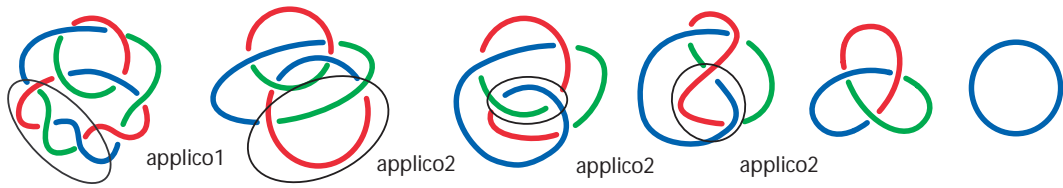
9-2-6



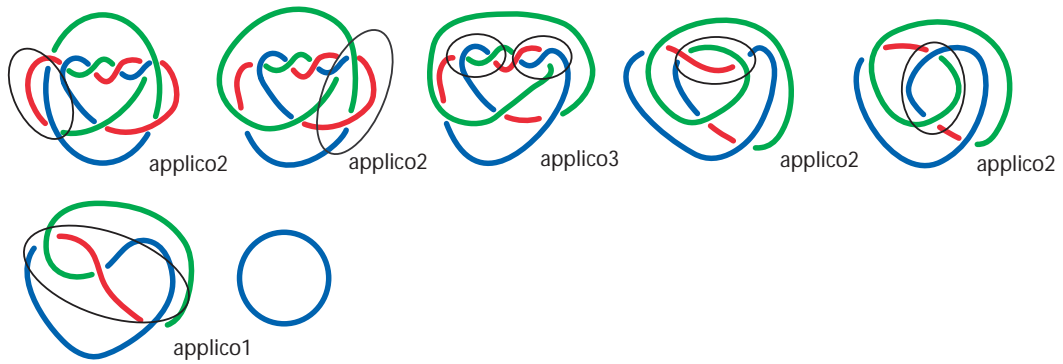
9-2-10



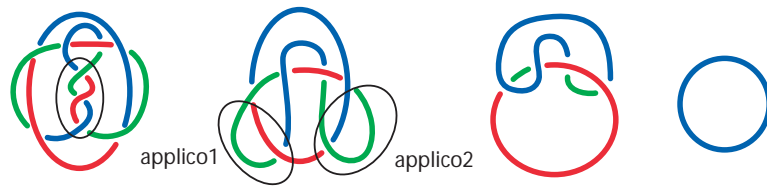
9-2-13



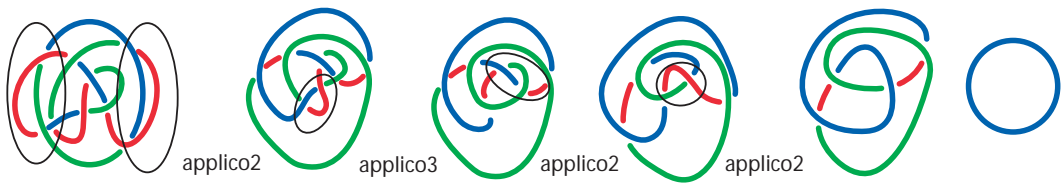
9-2-14



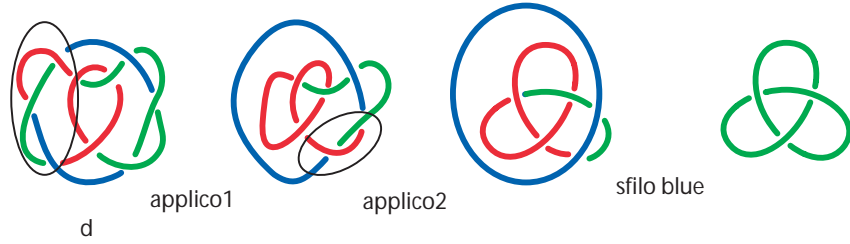
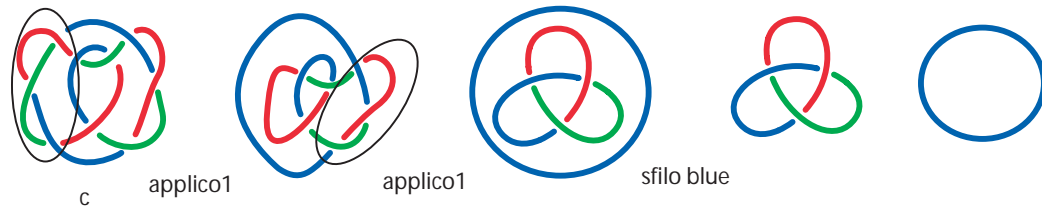
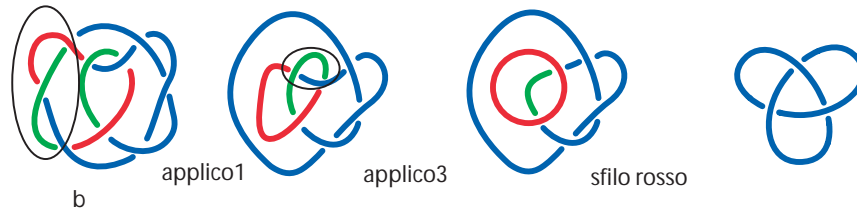
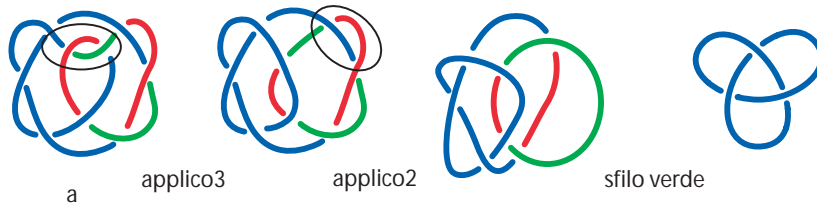
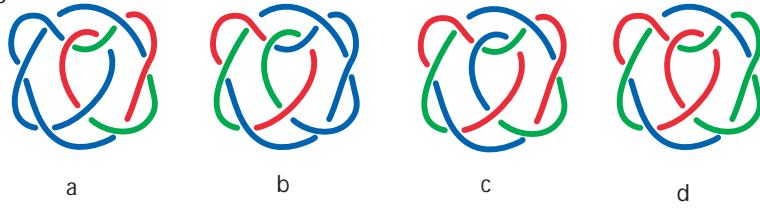
9-2-17



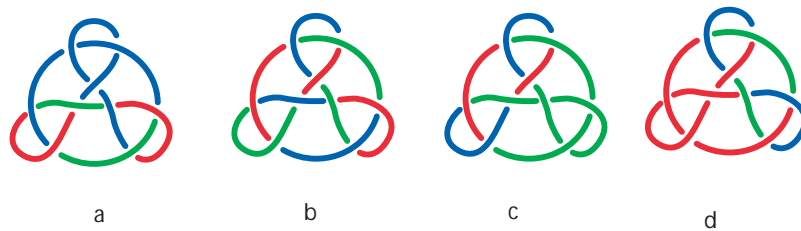
9-2-18

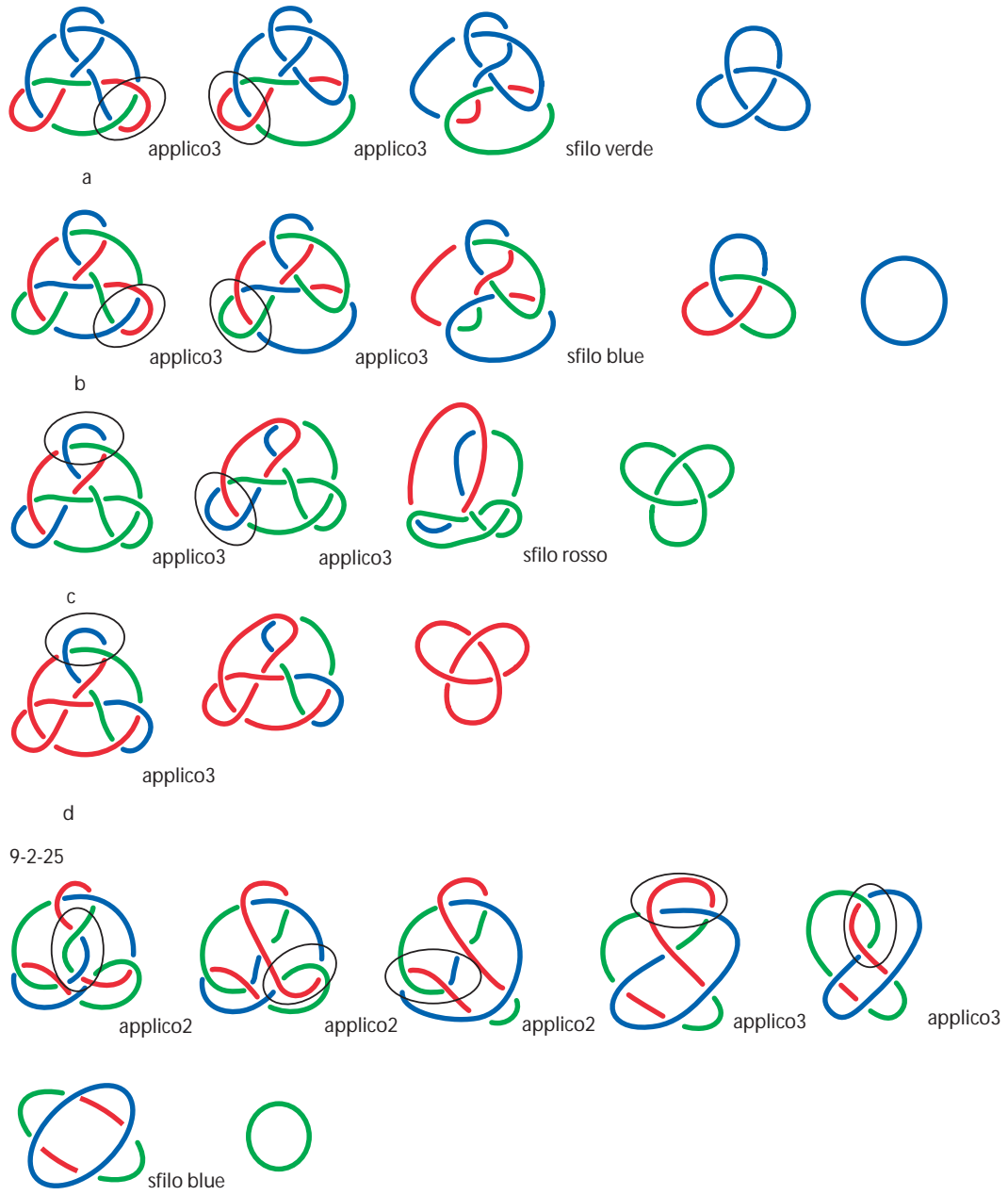


9-2-23



9-2-24





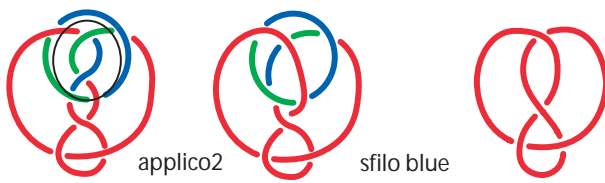
9-2-36



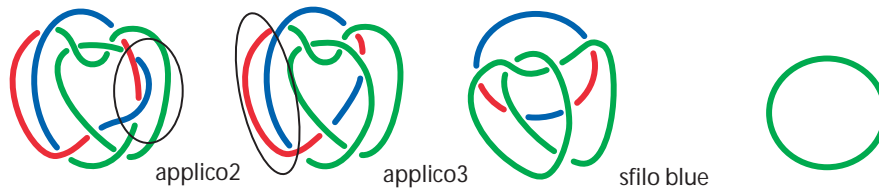
9-2-37



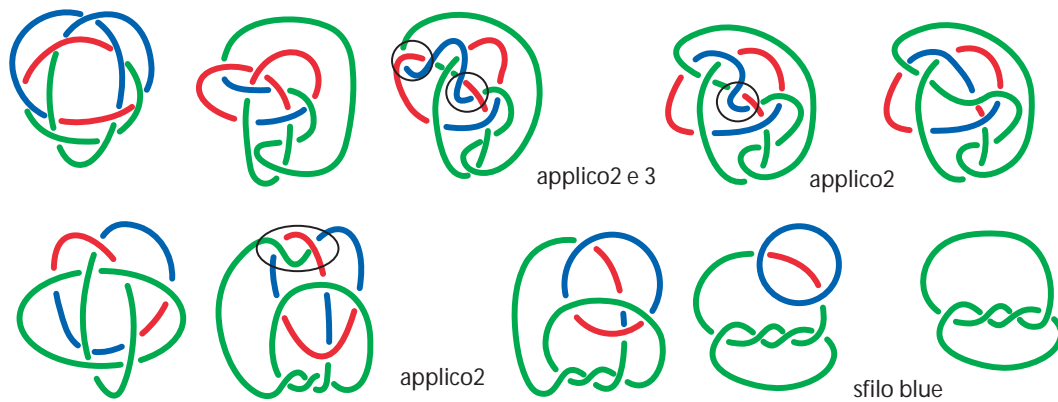
9-2-38



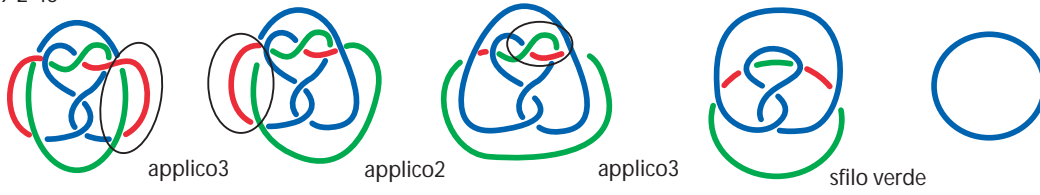
9-2-39



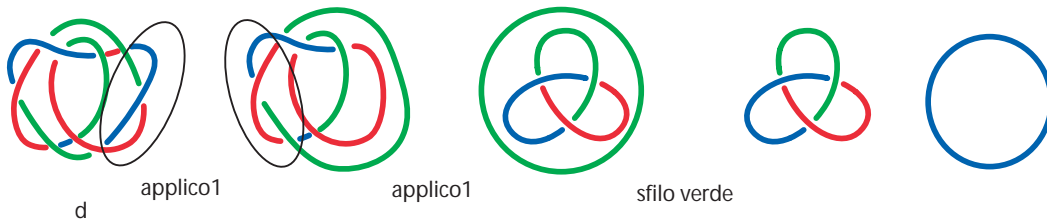
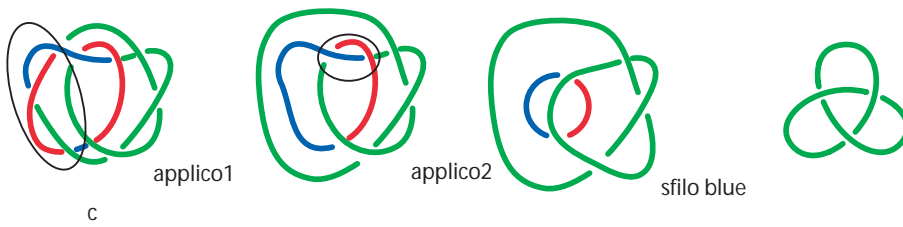
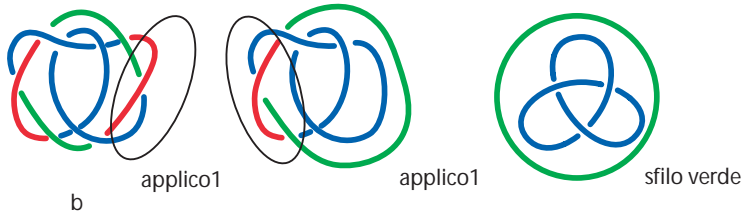
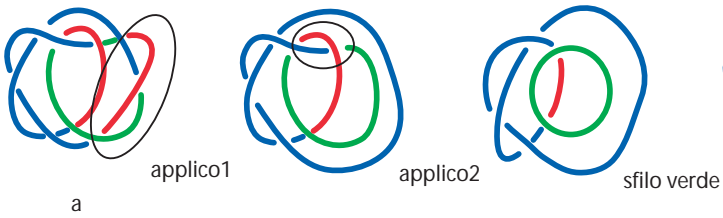
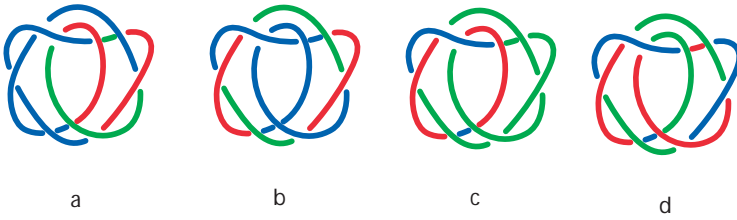
9-2-42



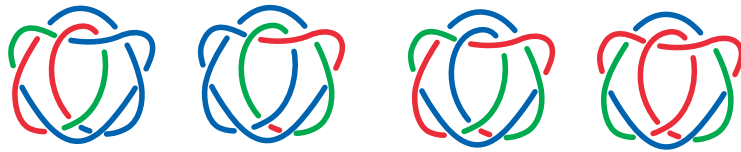
9-2-45



9-2-53



9-2-54



a

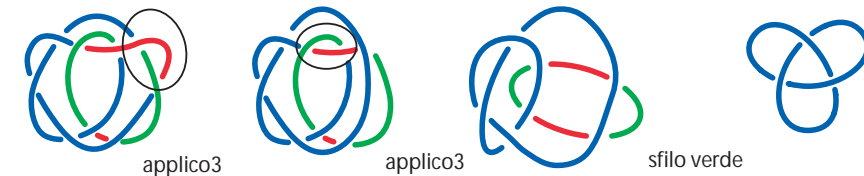
b

c

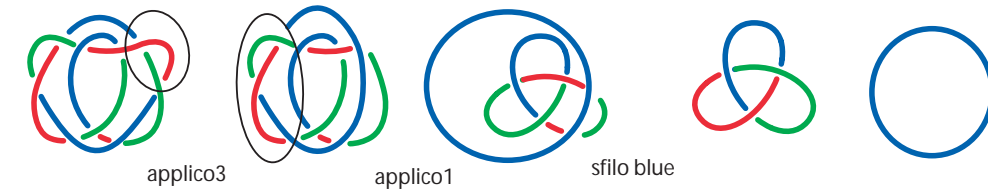
d



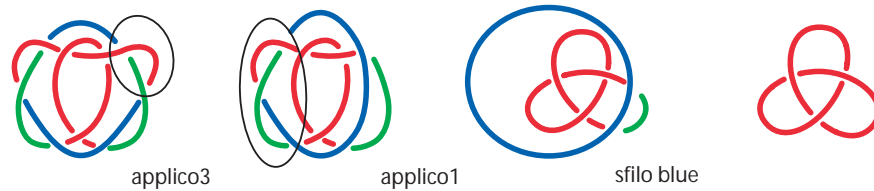
a



b

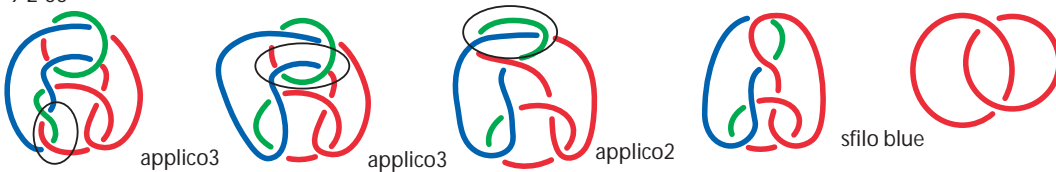


c



d

9-2-55



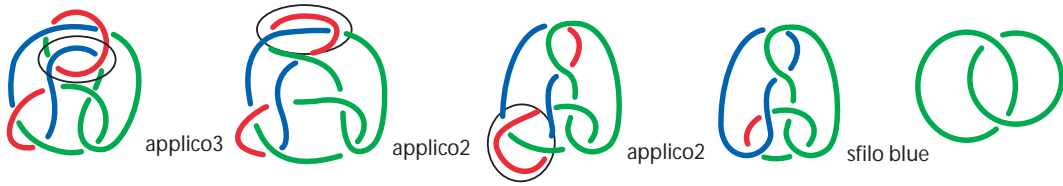
applico3

applico3

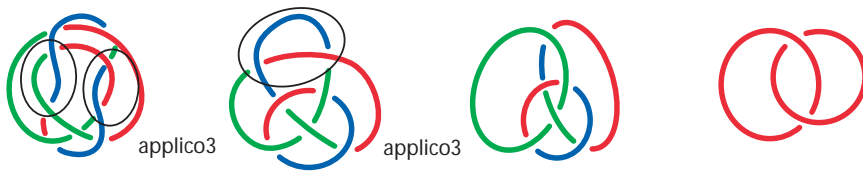
applico2

sfilo blue

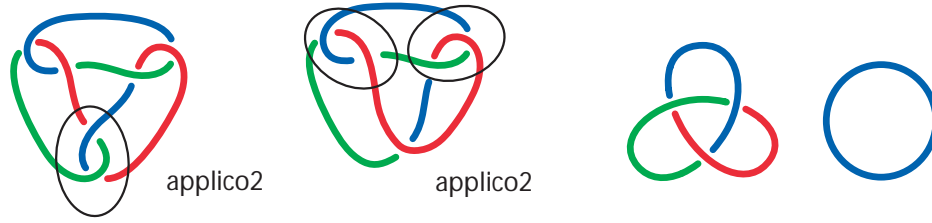
9-2-56



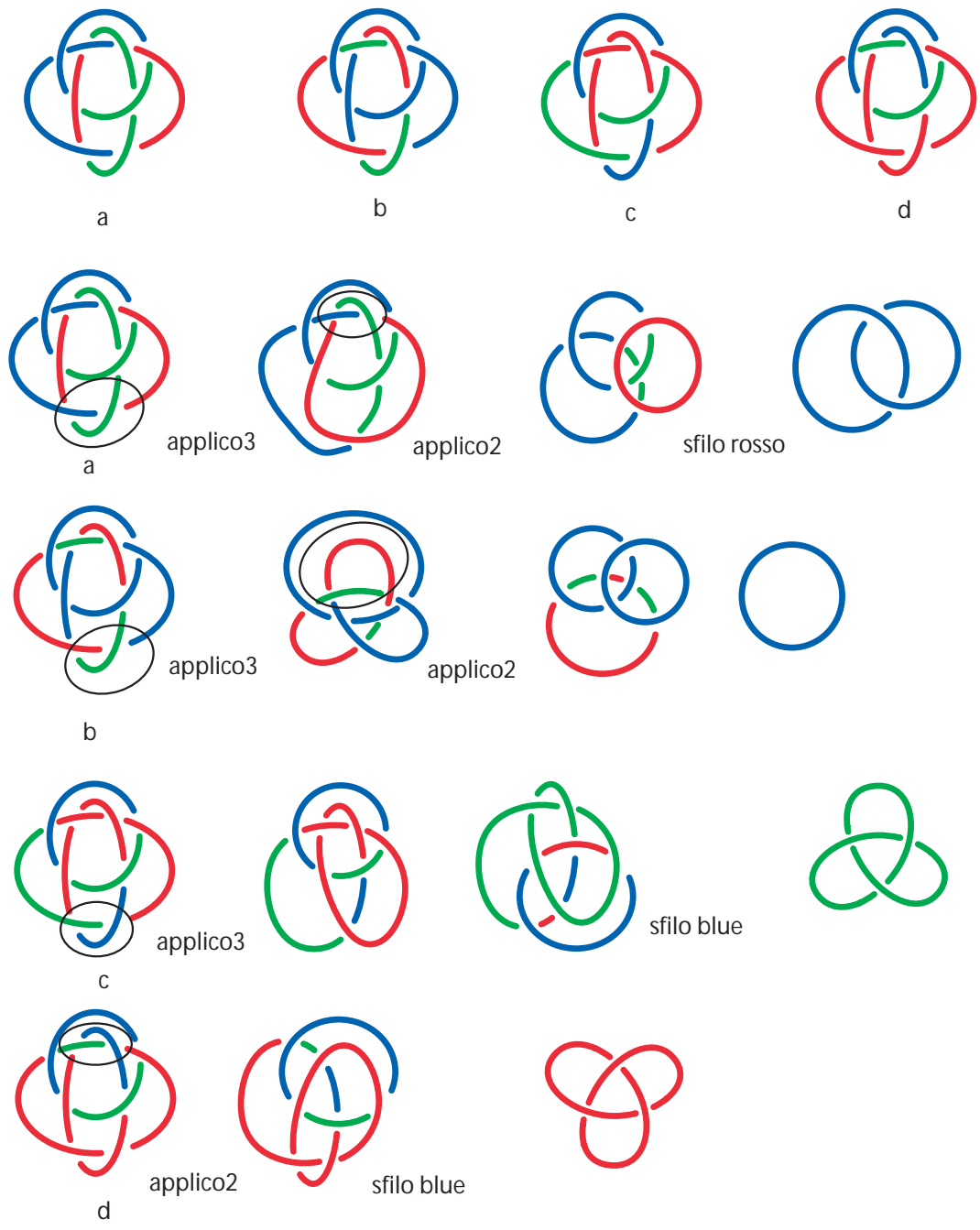
9-2-61



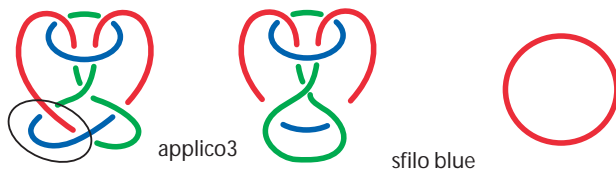
6-3-1



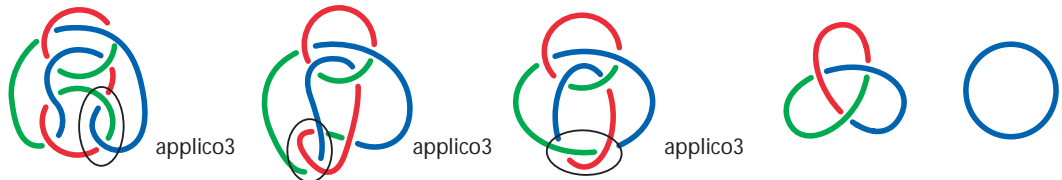
8-3-6



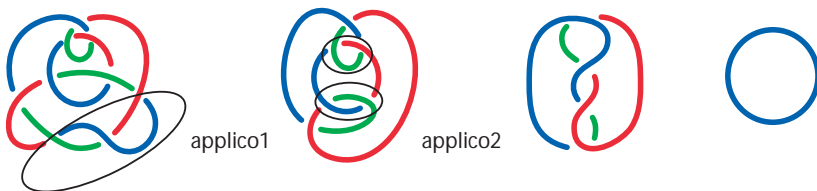
8-3-8



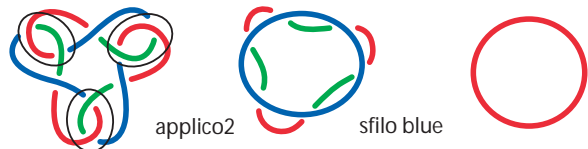
8-3-10



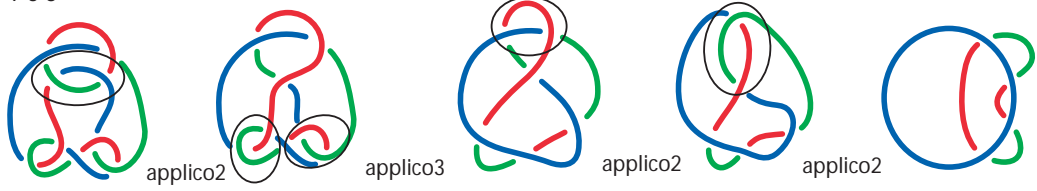
9-3-5



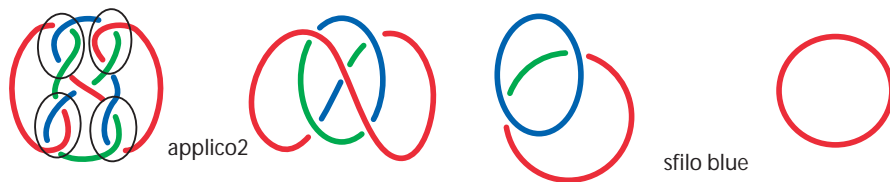
9-3-7



9-3-8



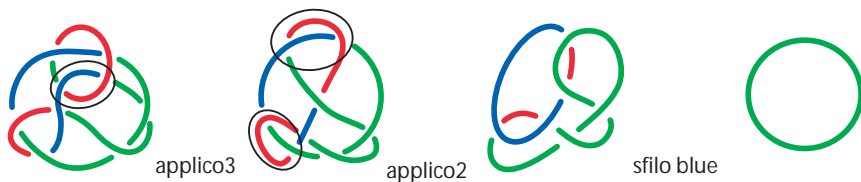
9-3-9



9-3-11



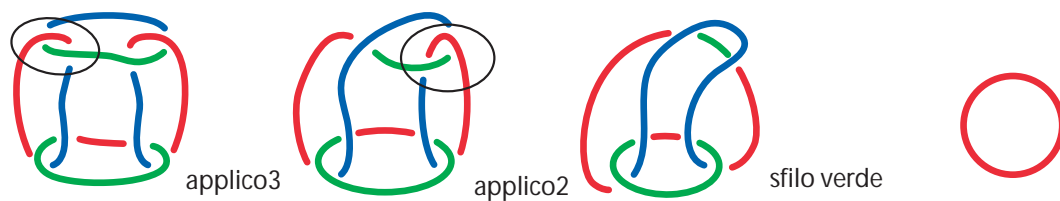
9-3-13



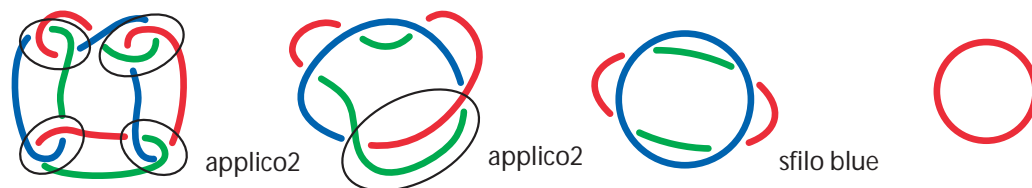
9-3-21



8-4-3



9-4-1



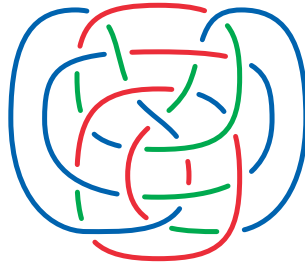
In appendice riportiamo una tabella riassuntiva dei rivestimenti tripli con le

rispettive varietà rappresentate.

4.2.2 Conclusioni

In sintesi siamo riusciti per quanto riguarda i rivestimenti doppi ad individuare e classificare quelli rappresentabili mediante delle trecce a due ponti.

Nell'ambito dei rivestimenti tripli abbiamo dimostrato la riconducibilità per ognuno di essi ad un rivestimento doppio del tipo sopra descritto. Quest'ultimo risultato in particolare ci permette un'ulteriore osservazione su una problematica ancora aperta: la rappresentazione del toro come rivestimento triplo di S^3 ramificato su un link. Il toro infatti è l'esempio più semplice di 3-varietà rappresentata tramite un rivestimento triplo, per questo in particolare si è interessati alla ricerca del numero minimo di incroci che il link dell'insieme di ramificazione deve possedere. Nella seguente figura vi è un esempio a 20 incroci ma non possiamo dire sia il minimo.






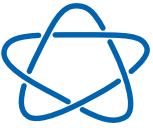


T^3
















In base al nostro lavoro possiamo concludere che si ha bisogno di almeno dieci incroci in quanto abbiamo di fatto escluso tutti i possibili casi fino a nove incroci.
















Appendice A














A.1 Rivestimenti doppi

Nodi
















 4-1	L(5,2)	 6-3	L(13,5)	 7-5	L(17,5)
 5-1	L(5,1)	 7-1	L(7,1)	 7-6	L(19,7)















 <p>5-2</p>	L(7,3)	 <p>7-2</p>	L(11,5)	 <p>7-7</p>	L(21,8)
 <p>6-1</p>	L(9,4)	 <p>7-3</p>	L(13,4)	 <p>8-1</p>	L(13,6)
 <p>6-2</p>	L(11,4)	 <p>7-4</p>	L(15,4)	 <p>8-2</p>	L(17,6)
 <p>8-3</p>	L(17,4)	 <p>8-9</p>	L(25,7)	 <p>9-1</p>	L(9,1)
 <p>8-4</p>	L(19,5)	 <p>8-11</p>	L(27,10)	 <p>9-2</p>	L(15,7)

 8-6	L(23,7)	 8-12	L(29,12)	 9-3	L(19,6)
 8-7	L(23,9)	 8-13	L(29,8)	 9-4	L(21,5)
 8-8	L(25,9)	 8-14	L(31,12)	 9-5	L(23,4)
 9-6	L(27,5)	 9-11	L(33,14)	 9-17	L(39,14)
 9-7	L(29,9)	 9-12	L(35,13)	 9-18	L(41,17)

 9-8	L(31,11)	 9-13	L(37,10)	 9-19	L(41,18)
 9-9	L(31,7)	 9-14	L(37,8)	 9-20	L(41,11)
 9-10	L(33,10)	 9-15	L(39,16)	 9-21	L(43,12)
 9-23	L(45,19)	 9-26	L(47,18)	 9-27	L(49,19)
 9-31	L(55,21)				









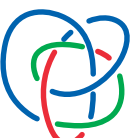


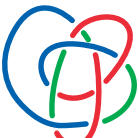


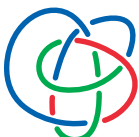
Link a 2 componenti


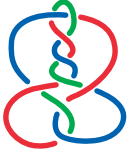
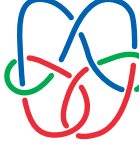

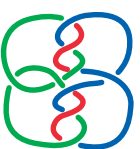










 2-2-1	L(2,1)	 6-2-3	L(12,5)	 8-2-2	L(14,5)
 4-2-1	L(4,1)	 7-2-1	L(14,3)	 8-2-3	L(22,5)
 5-2-1	L(8,3)	 7-2-2	L(18,7)	 8-2-4	L(24,7)
 6-2-1	L(6,1)	 7-2-3	L(16,7)	 8-2-5	L(26,11)
 6-2-2	L(10,3)	 8-2-1	L(8,1)	 8-2-6	L(20,9)

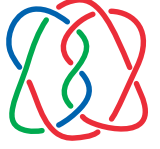

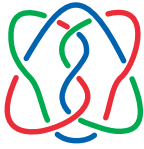
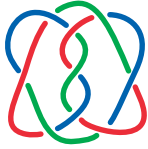











 8-2-7	L(30,11)	 9-2-4	L(24,5)	 9-2-9	L(40,11)
 8-2-8	L(34,13)	 9-2-5	L(32,9)	 9-2-10	L(24,11)
 9-2-1	L(20,3)	 9-2-6	L(36,13)	 9-2-11	L(46,17)
 9-2-2	L(28,11)	 9-2-7	L(44,13)	 9-2-12	L(50,29)
 9-2-3	L(30,7)	 9-2-8	L(34,15)		


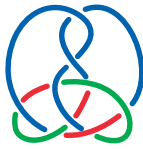
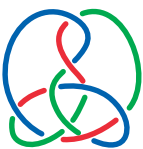
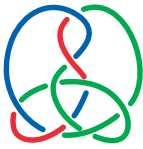

A.2 Rivestimenti tripli

Nodi





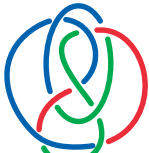










 3-1	S^3	 8-10	P^3	 8-18 c	$L(3,1)$
 6-1	S^3	 8-11	S^3	 8-18 d	$L(3,1)$
 7-4	S^3	 8-15	P^3	 8-19	P^3
 7-7	S^3	 8-18 a	$L(3,1)$	 8-20	P^3
 8-5	P^3	 8-18 b	$L(3,1)$	 8-21	P^3








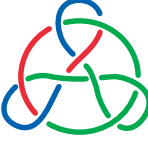






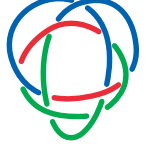
 9-2	S^3	 9-15	S^3	 9-28	P^3
 9-4	S^3	 9-16	P^3	 9-29	S^3
 9-6	S^3	 9-17	S^3	 9-34	$L(5,2)$
 9-10	S^3	 9-23	S^3	 9-35 a	$L(3,2)$
 9-11	S^3	 9-24	P^3	 9-35 b	$L(3,1)$









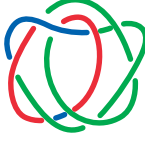



 9-35 c	L(3,1)	 9-37 d	L(3,1)	 9-46 c	S^3
 9-35 d	S^3	 9-38	S^3	 9-46 d	L(3,2)
 9-37 a	L(3,1)	 9-40	L(4,1)	 9-47 a	L(3,2)
 9-37 b	L(3,2)	 9-46 a	L(3,1)	 9-47 b	S^3
 9-37 c	S^3	 9-46 b	L(3,1)	 9-47 c	L(3,1)

 9-47 d	$L(3,1)$				
 9-48 a	$L(3,2)$				
 9-48 b	S^3				
 9-48 c	$L(3,1)$				
 9-48 d	$L(3,1)$				


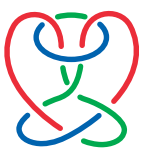



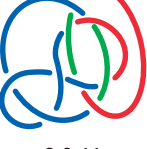
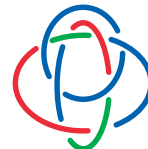
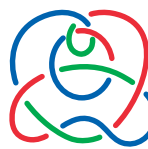

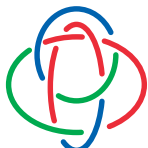




Link a due componenti

 6-2-1	S^3	 8-2-7	S^3	 9-2-6	S^3
 6-2-3	S^3	 8-2-14	P^3	 9-2-10	S^3
 7-2-2	S^3	 8-2-16	S^3	 9-2-13	S^3
 7-2-6	P^3	 9-2-3	S^3	 9-2-14	S^3
 8-2-4	S^3	 9-2-4	S^3	 9-2-17	S^3



 <p>9-2-18</p>	S^3	 <p>9-2-24 a</p>	$L(3,1)$	 <p>9-2-36</p>	$L(4,1)$
 <p>9-2-23 a</p>	$L(3,1)$	 <p>9-2-24 b</p>	S^3	 <p>9-2-37</p>	$L(4,1)$
 <p>9-2-23 b</p>	$L(3,1)$	 <p>9-2-24 c</p>	$L(3,1)$	 <p>9-2-38</p>	$L(5,2)$
 <p>9-2-23 c</p>	S^3	 <p>9-2-24 d</p>	$L(3,1)$	 <p>9-2-39</p>	S^3
 <p>9-2-23 d</p>	$L(3,1)$	 <p>9-2-25</p>	S^3	 <p>9-2-42</p>	$L(4,1)$

 9-2-45	S^3	 9-2-54 a	$L(3,1)$	 9-2-56	P^3
 9-2-53 a	$L(3,1)$	 9-2-54 b	$L(3,1)$	 9-2-61	P^3
 9-2-53 b	$L(3,1)$	 9-2-54 c	S^3		
 9-2-53 c	$L(3,1)$	 9-2-54 d	$L(3,1)$		
 9-2-53 d	S^3	 9-2-55	P^3		

Link a tre componenti

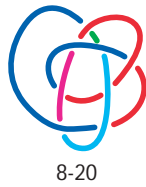
 6-3-1	S^3	 8-3-8	S^3	 9-3-9	S^3
 8-3-6 a	P^3	 8-3-10	S^3	 9-3-11	$L(5,2)$
 8-3-6 b	S^3	 9-3-5	S^3	 9-3-13	S^3
 8-3-6 c	$L(3,1)$	 9-3-7	S^3	 9-3-21	P^3
 8-3-6 d	$L(3,1)$	 9-3-8	S^3		

Link a quattro componenti

 <p>8-4-3</p>	S^3				
 <p>9-4-1</p>	S^3				

A.3 Rivestimenti con $p = 4$

Nodi



Link



7-2-6



9-2-53



8-3-6



9-2-23



9-2-54



9-3-21



9-2-24



9-2-55



9-2-36



9-2-56



9-2-37



9-2-61



9-2-42



8-3-6

A.4 Rivestimenti con $p = 5$



9-3-3



9-3-4











9-3-15



9-3-16



9-3-17

-  (1,2)
-  (1,3)
-  (2,3)
-  (1,4)
-  (2,4)
-  (3,4)
-  (1,5)
-  (3,5)

Bibliografia

- [1] J. W. Alexander, *Note on Riemann spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 370-373.
- [2] I. Berstein, A.L. Edmonds, *The Degree and Branch Set of a Branched Covering*, Invent. Math. **45** (1978), 213-220.
- [3] I. Berstein, A.L. Edmonds, *On the Construction of Branched Coverings of low-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **247** (1979), 87-124.
- [4] I. Berstein, A.L. Edmonds, *On the Classification of generic Branched Covering of Surfaces*, Illinois J. Math. **28** (1984), 64-82.
- [5] J.S. Birman, H.M. Hilden, *Heegaard Splitting of Branched Coverings of S^3* , Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 315-352.
- [6] I. Bobtcheva, R. Piergallini, *Covering Moves and Kirby Calculus*, preprint.
- [7] R.H. Crowell, R.H. Fox, *Introduction to knot theory*, Springer Verlag, 1977.

-
- [8] H.M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifolds is a 3-fold branched covering space of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1243-1244.
- [9] H.M. Hilden, J.M. Montesinos, *Lifting Surgeries to branched covering space*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), num. 1.
- [10] U. Hirsch, W.D. Neumann, *On cyclic branched coverings of spheres*, Math. Ann. **25** (1975), 289-291.
- [11] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Invent. Math. **45** (1978), 36-56.
- [12] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988.
- [13] J.M. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 845-846.
- [14] J.M. Montesinos, *Three-manifolds as 3-fold branched covers of S^3* , Quart. J. Math. Oxford Ser (2) **27** (1976), 85-94.
- [15] J.M. Montesinos, *A note on moves and irregular coverings of S^4* , Contemp. Math. **44** (1985), 345-349.
- [16] R. Piergallini, *Covering moves*, Trans. Amer. Math. Soc. **325** (1991), 903-920.
- [17] R. Piergallini, *Manifolds as branched covers of spheres*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **XXV** (1993), 419-439.

-
- [18] R. Piergallini, *4-manifolds as 4-fold branched covers of S^4* , *Topology* **34** (1995), 497-508.
- [19] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-manifolds*, American Mathematical Society, 1997.
- [20] D. Rolfsen, *Knots and Links*, University of British, Columbia, 1976.