

**Università di Camerino**  
SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E APPLICAZIONI  
(CLASSE L-35)



ELABORATO FINALE IN GEOMETRIA II  
**Gruppi elettrici di nodi e link**

*Relatore*

Prof. Riccardo Piergallini

*Laureanda*

Lucia Pazzaglia

---

ANNO ACCADEMICO 2024-2025



*A te, nonna,  
ovunque sarai,  
grazie per essere stata luce  
sul mio cammino.*



# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>                      | <b>ii</b> |
| <b>1 Elementi di teoria dei nodi</b>     | <b>1</b>  |
| 1.1 Nodi . . . . .                       | 1         |
| 1.2 Nodi docili e selvaggi . . . . .     | 4         |
| 1.3 Simmetria e invertibilità . . . . .  | 5         |
| 1.4 Invarianti . . . . .                 | 8         |
| 1.5 Diagramma di un nodo . . . . .       | 9         |
| 1.6 Mosse di Reidemeister . . . . .      | 11        |
| <b>2 Nozioni preliminari algebriche</b>  | <b>15</b> |
| 2.1 Gruppi liberi . . . . .              | 15        |
| 2.2 Presentazione di un gruppo . . . . . | 18        |
| 2.3 Gruppo fondamentale . . . . .        | 25        |
| <b>3 Gruppi Elettrici</b>                | <b>32</b> |
| 3.1 Definizione . . . . .                | 32        |
| 3.2 Esempi . . . . .                     | 42        |
| 3.3 Colorazioni . . . . .                | 51        |
| <b>Bibliografia</b>                      | <b>63</b> |

# Introduzione

La presente tesi si inserisce nell’ambito della teoria dei nodi, una branca della geometria che si occupa dello studio delle immersioni di una o più circonferenze disgiunte nello spazio tridimensionale. Sebbene il concetto di nodo sia familiare alla maggior parte delle persone – basti pensare ai nodi utilizzati per rilegare i pacchi, allacciare le scarpe o in ambito nautico – la sua trattazione matematica richiede un approccio ben più rigoroso. Per considerare un nodo come oggetto matematico è infatti necessario “bloccarlo” evitando l’ambiguità derivante dalla possibilità di modificarne la forma semplicemente slegandolo e poi rilegandolo. Il metodo più naturale per farlo consiste nel congiungere le estremità del nodo. Solo in questo modo è possibile distinguere diversi tipi di nodi analizzandone le proprietà topologiche.

Lo sviluppo della teoria dei nodi ha radici profonde. Già alla fine del XIX secolo Poincaré pose le basi della topologia algebrica, mentre Dehn introdusse l’uso del gruppo fondamentale come invariante di nodi, fornendo uno strumento potente per distinguere nodi non equivalenti. Successivamente, i lavori di Wirtinger (1905) permisero di associare a un nodo una presentazione del suo gruppo mediante generatori e relazioni, metodo che costituisce ancora oggi un riferimento centrale nello studio della teoria dei nodi.

Nel 1927 Reidemeister formulò l’omonimo teorema, dimostrando che due diagrammi rappresentano lo stesso nodo se e solo se sono collegati da una sequenza di isotopie planari e di cosiddette *mosse di Reidemeister*. I diagrammi costituiscono strumenti matematici capaci di condensare in modo efficace le informazioni topologiche del nodo. Non si tratta di semplici proiezioni bidimensionali, ma di rappresentazioni arricchite, in cui a ciascun punto doppio della proiezione viene aggiunta l’informazione sull’altezza relativa dei filamenti del nodo, indicando quale passa sopra e quale sotto. Questa convenzione – interrompere la linea corrispondente al filamento inferiore – trasforma le semplici intersezioni della proiezione in incroci nel diagramma, rendendo possibile un’analisi più profonda della struttura e

delle proprietà del nodo.

Tra gli invarianti più significativi della teoria dei nodi si annovera il gruppo del nodo, definito come gruppo fondamentale del complementare del nodo in  $\mathbb{R}^3$ . Sebbene la sua presentazione sia relativamente semplice da scrivere, la sua classificazione è invece assai più complessa; ciò ha spinto la ricerca verso invarianti alternativi o complementari in grado di semplificarne l'analisi. Nel corso del XX secolo, l'introduzione di invarianti polinomiali, come quello di Alexander e il polinomio di Jones, ha ulteriormente arricchito il panorama, aprendo connessioni con la geometria iperbolica e la fisica matematica. Quest'ultima, in particolare, ha offerto nuovi punti di vista, mostrando come gli strumenti della teoria dei nodi possono essere impiegati per descrivere fenomeni complessi legati alla topologia dei campi, all'entanglement quantistico e alla struttura delle particelle.

In questa direzione si colloca l'oggetto principale della presente tesi: i gruppi elettrici. Si tratta di un argomento relativamente recente e ancora poco esplorato, che mantiene un legame concettuale con il gruppo del nodo ma ne ribalta la logica: nel gruppo di un nodo, i generatori sono associati agli archi e le relazioni agli incroci, mentre nei gruppi elettrici i generatori corrispondono agli incroci e le relazioni alle regioni delimitate dal diagramma. Questa inversione prospettica apre la strada verso nuove interpretazioni e potenziali applicazioni.

Un ulteriore tema affrontato in questa tesi è quello delle colorazioni, intese come omomorfismi da un gruppo elettrico a un gruppo finito. Le colorazioni consentono la costruzione di invarianti effettivamente calcolabili, capaci di distinguere nodi e link non equivalenti, offrendo così un approccio alternativo agli invarianti classici.

Il lavoro è articolato in tre capitoli. Nel primo capitolo vengono introdotte le nozioni fondamentali della teoria dei nodi – tra cui nodi, link, equivalenza isotopica, simmetria, diagrammi, invarianti e mosse di Reidemeister – che costituiscono la base concettuale per la trattazione successiva. Il secondo capitolo fornisce gli strumenti preliminari di algebra, con particolare rilievo ai gruppi liberi, alla presentazione di gruppi e al gruppo fondamentale, necessari per descrivere i risultati che seguono. Infine, il terzo capitolo è dedicato allo studio approfondito dei gruppi elettrici: ne viene data la definizione, vengono presentati esempi significativi e si introduce il concetto di colorazione.

## **Ringraziamenti**

Desidero esprimere, innanzitutto, la mia sincera gratitudine al Professor Riccardo Piergallini, che mi ha guidato e sostenuto nella realizzazione di questa tesi, offrendo preziosi suggerimenti, incoraggiamenti e stimoli nell'esplorazione di un tema tanto affascinante quanto complesso.

Un ringraziamento speciale va inoltre ai miei genitori, unici e insostituibili punti di riferimento nella mia vita. A loro devo tutto: per l'amore, la fiducia e il sostegno costante, per avermi accompagnato in ogni scelta e incoraggiato a seguire i miei interessi. La loro presenza e il loro affetto hanno reso possibile non solo questo traguardo, ma ogni passo del mio percorso personale e umano.



# Capitolo 1

## Elementi di teoria dei nodi

Il concetto di nodo nasce come astrazione matematica dell'oggetto fisico dato da una corda con i capi giunti nello spazio tridimensionale, dove essa può essere annodata o non-annodata (nodo banale).

La proprietà di un nodo di essere “annodato” non è una proprietà topologica intrinseca del nodo inteso come sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ , ma bensì è una caratteristica del modo in cui tale nodo è contenuto in  $\mathbb{R}^3$ .

La teoria dei nodi è dunque una branca della geometria che studia le immersioni di uno spazio topologico dentro un altro, in particolare come si possono immergere una o più circonferenze disgiunte nello spazio a tre dimensioni.

### 1.1 Nodi

**Definizione 1.1.1. (nodo)** Sia  $\mathbb{R}^3$  lo spazio tridimensionale euclideo, allora  $K \subset \mathbb{R}^3$  si dice *nodo* se esiste un'immersione (un omeomorfismo sull'immagine)  $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $h(S^1) = K$  con  $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  circonferenza unitaria nel piano  $xy$ .

Alcuni esempi di nodi comuni sono riportati in Figura 1.1; osservando accuratamente si può intuire che, ad esempio, non si può ottenere il nodo c) dal nodo a).

La domanda che viene naturale porsi è quando due nodi possono considerarsi equivalenti; ovviamente non si intende omeomorfi poiché essendo ciascun nodo, per definizione, omeomorfo alla circonferenza ne segue dalla

proprietà transitiva che tutti i nodi lo siano fra loro.

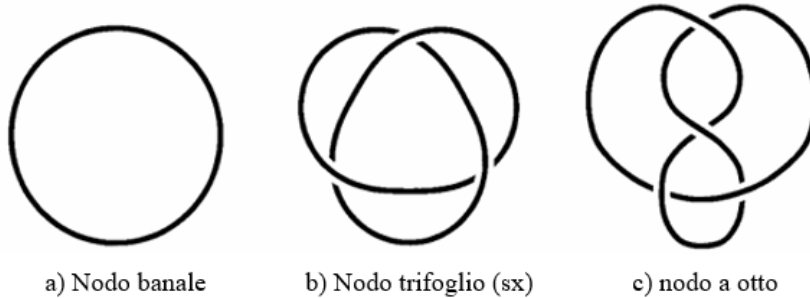


Figura 1.1: Esempi di nodi comuni

Riprendendo la considerazione fatta a inizio capitolo, ovvero del nodo visto come astrazione matematica di una corda fisica, se un pezzo di corda in una posizione viene attorcigliato in un'altra, la deformazione determina effettivamente una corrispondenza uno-a-uno tra i punti delle due posizioni, e poiché il taglio della corda non è consentito, la corrispondenza è bicontinua. Inoltre, è naturale pensare al moto della corda come accompagnato da un moto delle molecole dell'aria circostante che determina un'applicazione bicontinua dei punti dello spazio.

Per formalizzare questo concetto di deformazione si deve introdurre la nozione di omotopia, nel caso dello spazio tridimensionale euclideo si ha la seguente.

**Definizione 1.1.2. (omotopia)** L'omotopia di  $\mathbb{R}^3$  in se stesso è un'applicazione continua  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , che può essere considerata anche come famiglia continua di applicazioni continue  $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $h_t(x) = H(x, t) \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall t \in [0, 1]$ .

Tuttavia, l'omotopia non può essere utilizzata per la deformazione di nodi: essa permette ad una curva di passare attraverso se stessa, e di conseguenza tutti i nodi risulterebbero omotopici a  $S^1$ . Pertanto, bisogna richiedere la biunivocità e assicurarsi che lo spazio contenente il nodo si muova in modo continuo insieme ad esso.

**Definizione 1.1.3. (isotopia)** Sia  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'omotopia. Se si impone che  $h_t$  sia un omeomorfismo  $\forall t \in [0, 1]$  allora  $H$  viene detta isotopia.

**Definizione 1.1.4. (isotopia ambiente)** Un'isotopia ambiente di  $\mathbb{R}^3$  è un'isotopia tra l'identità di  $\mathbb{R}^3$  e un omeomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ovvero un'isotopia tale che  $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  e  $h_1 = f$ .

**Definizione 1.1.5. (equivalenza isotopica)** Due nodi  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$  si dicono *isotopicamente equivalenti*, e si indica  $K_1 \cong K_2$ , se esiste un'isotopia ambiente di  $\mathbb{R}^3$  tra  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  omeomorfismo tale che  $f(K_1) = K_2$ .

**Definizione 1.1.6. (nodo banale)** Un nodo  $K$  è detto *banale* se è isotopicamente equivalente a  $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ , ovvero  $K \cong S^1$ .

Ora che si è definita una relazione di equivalenza tra nodi (si dimostra che effettivamente  $\cong$  è una relazione di equivalenza), la questione su come stabilire se due nodi sono isotopicamente equivalenti verrà ripresa in seguito.

Concentriamoci, invece, sul definire i nodi a più componenti.

**Definizione 1.1.7. (link)** Un *link*  $L$ , detto anche nodo a più componenti, è un'unione finita disgiunta di nodi:  $L = K_1 \sqcup K_2 \sqcup \dots \sqcup K_n$ . Ciascun nodo  $K_i$  è chiamato *componente* del link.

Alcuni esempi di link sono riportati in Figura 1.2.

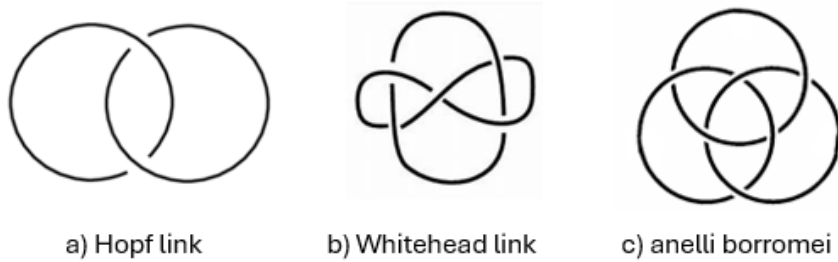


Figura 1.2: Esempi di link

In modo analogo a quanto visto per i nodi (link a una sola componente) si può estendere il concetto di equivalenza ai link a più componenti.

**Definizione 1.1.8. (equivalenza di link)** Due link  $L_1$  e  $L_2$  si dicono *isotopicamente equivalenti* se esiste un'isotopia ambiente di  $\mathbb{R}^3$  tra  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  omeomorfismo tale che  $f(L_1) = L_2$ .

**Definizione 1.1.9. (link banale)** Un link  $L$  si dice *banale* se è isotopicamente equivalente a un numero finito di circonferenze disgiunte nel piano:  $L \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

## 1.2 Nodi docili e selvaggi

**Definizione 1.2.1. (punto localmente piatto)** Un punto  $p$  di un nodo  $K$  è *localmente piatto* se esiste un intorno  $U$  di  $p$  per cui la coppia  $(U, U \cap K)$  è omeomorfa alla coppia costituita dalla boccia unitaria  $B_0(1)$  e da un suo diametro.

**Definizione 1.2.2. (nodo docile)** Un nodo  $K$  viene chiamato *docile* se ogni suo punto è localmente piatto. Un nodo che non è docile viene detto *selvaggio*.

Questa distinzione fra nodo docile e selvaggio è di fondamentale importanza; la maggior parte della teoria dei nodi è applicabile solo ai nodi docili.

Un esempio notevole di nodo selvaggio è mostrato in Figura 1.3. Tale nodo sembra poter essere sciolto da destra, tuttavia esso non è banale: questo accade poiché le sezioni sono scalate con un fattore di riduzione costante e diventano sempre più piccole, convergendo verso il punto limite  $p$  in cui la derivata è indefinita in quanto tale punto  $p$  non è localmente piatto.

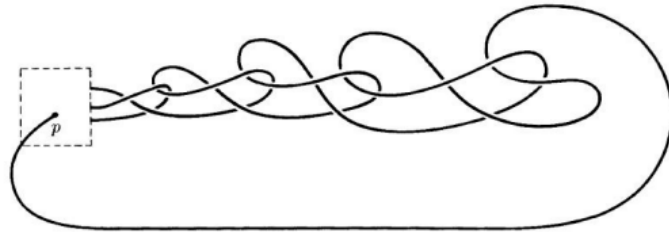


Figura 1.3: Nodo di Fox

Ogni nodo sufficientemente liscio è docile; dove per *nodo liscio* si intende un nodo definito da una qualche curva in  $C^r$  con  $r \geq 1$ .

Infatti, si ha il seguente risultato:

**Teorema 1.2.3.** *Un nodo parametrizzato da archi lisci è docile, e viceversa, ogni nodo docile è isotopicamente equivalente a un nodo liscio. Inoltre,*

due nodi lisci sono equivalenti se e solo se esiste un'isotopia ambiente di diffeomorfismi, ovvero una famiglia continua di applicazioni differenziabili, biunivoche e con inversa anch'essa differenziabile, che porta l'uno nell'altro.

La dimostrazione del Teorema 1.2.3. può essere consultata in [1].

D'ora in avanti, la trattazione sarà limitata esclusivamente ai nodi lisci.

## 1.3 Simmetria e invertibilità

Ogni diffeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  conserva o inverte l'orientazione: conserva l'orientazione se trasforma una terna destrorsa (sinistrorsa) in una terna destrorsa (sinistrorsa), si veda Figura 1.4, e in questo caso si ha che  $h$  è isotopicamente equivalente a  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ ; mentre inverte l'orientazione se converte una terna destrorsa (sinistrorsa) in una terna sinistrorsa (destrorsa).

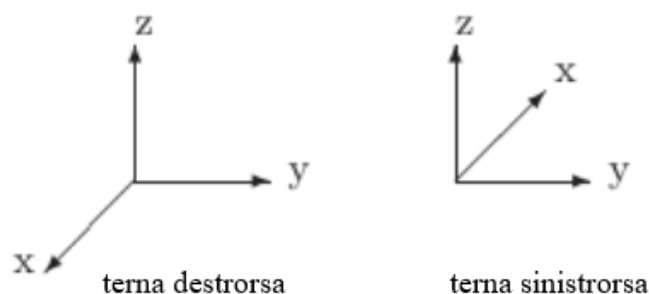


Figura 1.4: Esempi delle due possibili terne

Un esempio di diffeomorfismo che conserva l'orientazione, banalmente, è l'identità; invece uno che non la conserva è la *riflessione rispetto l'origine*, ovvero la mappa  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  per cui  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ .

**Definizione 1.3.1. (riflessione)** Sia  $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la mappa per cui  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ . Dato un nodo  $K$ , la sua immagine  $s(K)$  viene chiamata *immagine speculare* o *riflessione* di  $K$ , e indicata con  $\overline{K}$ .

*Osservazione 1.3.2.* La riflessione di  $K$  è indipendente dalla scelta della mappa  $s$ : l'immagine di  $K$  sotto qualsiasi altro diffeomorfismo che inverte l'orientazione è isotopicamente equivalente a  $s(K)$ .

**Definizione 1.3.3. (chiralità)** Se  $K \cong \overline{K}$  il nodo viene detto *achirale* o *simmetrico*; altrimenti si parla di nodo *chirale* o *asimmetrico*.

Un esempio di nodo achirale è il nodo a otto illustrato in Figura 1.5, esso può essere deformato in modo da far coincidere le due rappresentazioni che sono una la riflessione dell'altra. Questa azione invece non è applicabile al nodo trifoglio (si veda Figura 1.6) poiché, sebbene le due rappresentazioni sono immagini speculari l'una dell'altra, non esiste alcun movimento che riesca a farle coincidere, infatti il nodo trifoglio è un nodo chirale.

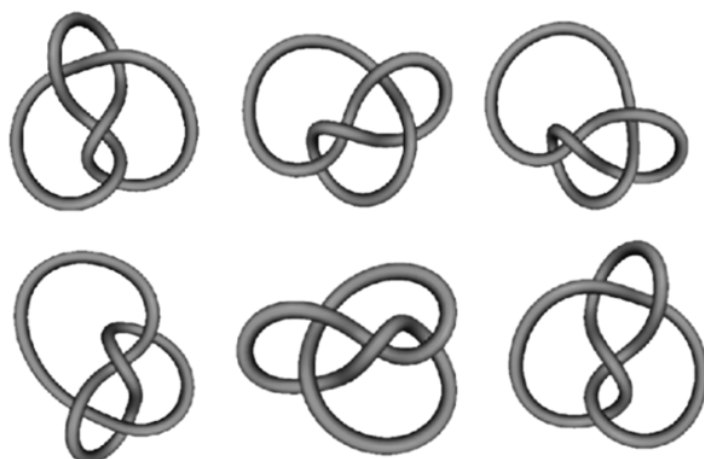


Figura 1.5: Deformazione del nodo a otto che mostra la sua achiralità

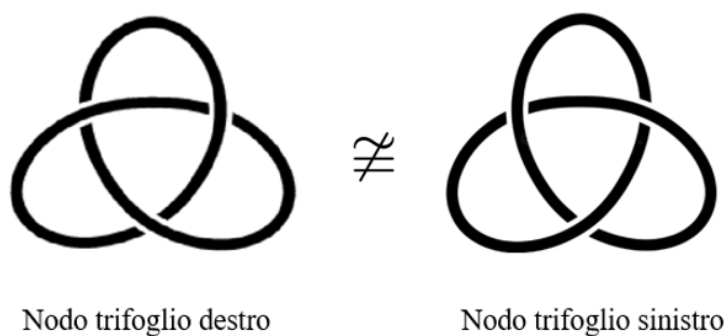


Figura 1.6: Chiralità del nodo trifoglio

Esattamente come ogni diffeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  preserva o inverte l'orientazione, così ogni omeomorfismo  $f : K \rightarrow K$  preserva o inverte il verso di percorrenza.

Per prima cosa bisogna dare la seguente:

**Definizione 1.3.4. (nodo orientato)** Un nodo  $K \subset \mathbb{R}^3$  in cui viene scelto un verso di percorrenza viene chiamato *nodo orientato*.

A questo punto, avendo definito un'orientazione sul nodo,  $f : K \rightarrow K$  preserva o inverte l'orientazione a seconda che il verso di percorrenza sia preservato o invertito.

**Definizione 1.3.5. (invertibilità)** Dato un nodo  $K$  orientato, si chiama *inverso* di  $K$  e si indica con  $-K$  il nodo avente orientazione opposta. Un nodo  $K$  è *invertibile* se  $K \cong -K$ .

Per rimanere sull'esempio del nodo trifoglio, in Figura 1.7 si può vedere che esso è invertibile.

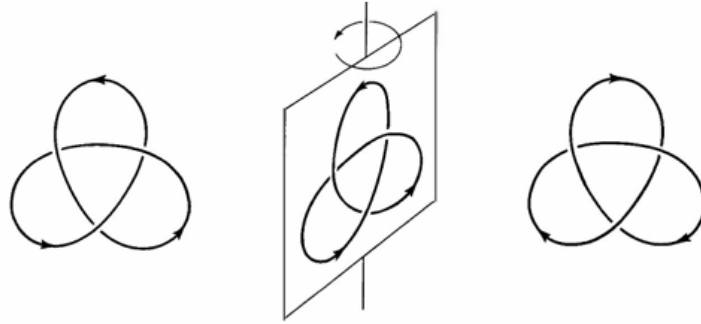


Figura 1.7: Invertibilità del nodo trifoglio

In modo analogo a quanto visto per i nodi (link a una sola componente) si possono estendere i concetti di simmetria e invertibilità ai link a più componenti.

**Definizione 1.3.6. (link orientato)** Un link  $L$  in cui a ogni componente viene assegnato un verso di percorrenza viene chiamato *link orientato*.

Dato un qualsiasi link  $L$ , possiamo formare la sua riflessione  $\overline{L}$ ; inoltre dato un link orientato, si può generare il suo inverso  $-L$  invertendo le orientazioni di tutte le sue componenti. Similmente a quanto visto per i nodi, diciamo che un link è *achirale* se  $L \cong \overline{L}$ , mentre un link orientato è *invertibile* se  $L \cong -L$ .

## 1.4 Invarianti

Un ruolo fondamentale nel mostrare che due nodi siano o meno equivalenti è giocato dagli invarianti.

**Definizione 1.4.1. (invariante)** Un *invariante di nodi* è una funzione  $i$  definita sull'insieme dei nodi che dipende solo dalla classe di equivalenza del nodo. Ovvero  $K_1 \cong K_2 \Rightarrow i(K_1) = i(K_2)$ ; pertanto qualsiasi rappresentante della classe può essere scelto per calcolarne l'invariante.

**Definizione 1.4.2. (invariante completo)** Un invariante si dice *completo* se a nodi non equivalenti associa valori distinti.

Ancora oggi la ricerca di invarianti completi per nodi e per link è un problema aperto della teoria dei nodi.

Uno dei più semplici invarianti di link è la molteplicità.

**Definizione 1.4.3. (molteplicità)** Dato un link  $L$  si chiama *molteplicità* di  $L$ , e si indica con  $\mu(L)$ , il numero delle sue componenti.

Tale numero non fornisce informazioni accurate sui link ma permette di distinguere tra nodi e link a più di una componente. In Figura 1.8 sono riportati alcuni esempi di link con i rispettivi valori di  $\mu$ .

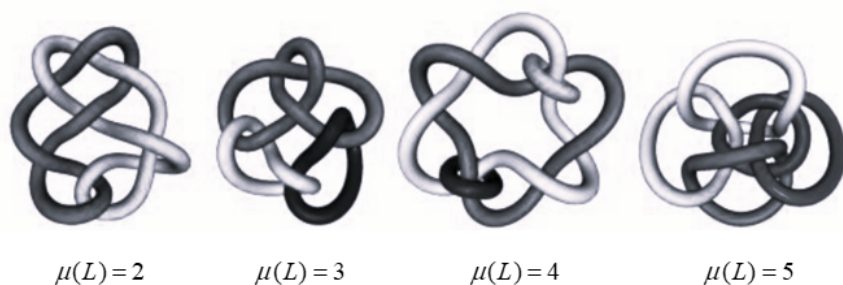


Figura 1.8: Esempi di link con rispettive molteplicità

Un altro invariante molto importante è dato dal gruppo fondamentale del complementare di un nodo (si veda Paragrafo 2.3).

**Definizione 1.4.4. (gruppo del nodo)** Sia  $K \subset \mathbb{R}^3$  un nodo. Il *gruppo del nodo*  $K$ , che indicheremo con  $\text{Gr}(K)$ , è dato dal gruppo fondamentale del suo complementare, ovvero  $\text{Gr}(K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ .



**Proposizione 1.4.5.** *Il gruppo di un nodo è un invariante.*

*Dimostrazione.* Dati  $K, K' \subset \mathbb{R}^3$  nodi, se  $\exists h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  omeomorfismo tale che  $h(K) = K'$ , ovvero  $K \cong K'$ , allora si ha anche  $h| : \mathbb{R}^3 - K \rightarrow \mathbb{R}^3 - K'$  omeomorfismo e dunque  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K')$ .

Da quanto detto, ne consegue che  $K \cong K' \Rightarrow \text{Gr}(K) \cong \text{Gr}(K')$ .  $\square$

## 1.5 Diagramma di un nodo

Una rappresentazione molto elementare di un nodo può essere data dalla sua proiezione su un piano; tuttavia, seppur una proiezione fornisca alcune informazioni su come il nodo sia immerso nello spazio, non è sufficiente a ricreare tale immersione: non vengono date informazioni su quali parti di esso passano sopra e quali sotto.

**Definizione 1.5.1. (singolarità delle proiezioni di link)** Sia  $L$  un link e sia  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proiezione canonica. Un punto  $x \in \pi(L)$  è *regolare* se  $\pi^{-1}(x)$  è un punto singolo con tangente non verticale, e *singolare* altrimenti. Inoltre, posto  $|\pi^{-1}(x)| = n$ ,  $x$  è detto *punto di ordine  $n$* ; in particolare, se  $n = 2$ ,  $x$  è detto *punto doppio*.

**Definizione 1.5.2. (proiezione regolare)** Se  $\pi(L)$  ha un numero finito di punti singolari e questi sono tutti punti doppi trasversali, la proiezione si dice *regolare*.

In Figura 1.9 sono riportati alcuni esempi di ciò che non può verificarsi.

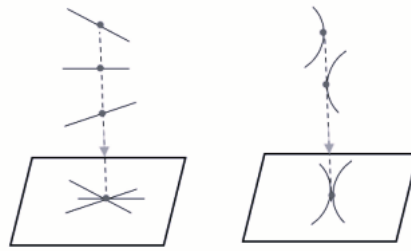


Figura 1.9: Situazioni che non possono verificarsi

**Teorema 1.5.3.** *Ogni link liscio ha una proiezione regolare.*

La dimostrazione del Teorema 1.5.3. può essere consultata in [1].

Come accennato a inizio paragrafo, la proiezione non fornisce informazioni su quali parti del nodo passino sopra e quali sotto, pertanto bisogna introdurre il concetto di diagramma. La differenza tra proiezione e diagramma è mostrata in Figura 1.10.

**Definizione 1.5.4. (diagramma)** Un *diagramma* è la proiezione regolare di un link a cui vengono aggiunte informazioni sull'altezza relativa in ciascuno dei punti doppi. La convenzione prevede di creare interruzioni nella linea corrispondenti al filamento che passa sotto. I punti doppi nella proiezione diventano *incroci* nel diagramma.

Si noti che una proiezione regolare ha un numero finito di punti doppi, quindi un diagramma ha un numero finito di incroci.

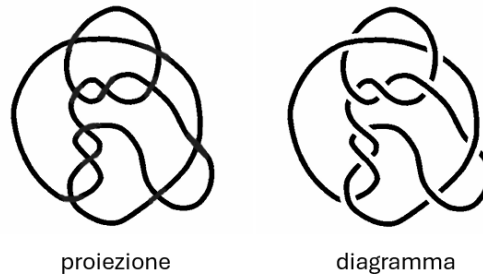


Figura 1.10: Proiezione e diagramma di un nodo a confronto

Come corollario del Teorema 1.5.3. si ha il seguente.

**Corollario 1.5.5.** *A meno di equivalenza isotopica, ogni link liscio ha un diagramma (liscio).*

Esistono, a meno di equivalenza isotopica, infiniti diagrammi diversi per ogni link; questo rende molto difficile identificare i link confrontando i diagrammi. Di seguito, definiremo alcune proprietà dei diagrammi.

Un diagramma è *connesso* se la sua proiezione sottostante è connessa. Un link che ammette un diagramma disconnesso viene chiamato *link spezzato*, ovvero un link che può essere spezzato in sottolink separati.

Un diagramma può anche essere *orientato*: a ogni componente viene assegnata un'orientazione (o ne eredita una dal link tramite la mappa di proiezione). Se tutte le componenti di un link sono orientate, ogni incrocio in un diagramma apparirà localmente come uno di quelli in Figura 1.11. Questi due tipi di incroci sono chiamati positivi e negativi.

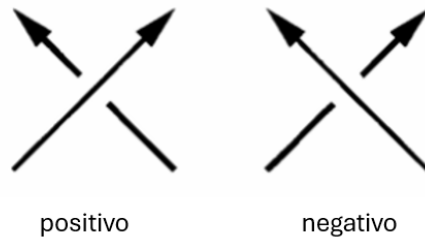


Figura 1.11: Possibili tipologie di incrocio

## 1.6 Mosse di Reidemeister

Una mossa, o modifica locale, permette di cambiare una piccola porzione di diagramma lasciando il resto invariato. Queste mosse sono utilizzate per capire quando due diagrammi sono equivalenti.

**Definizione 1.6.1. (diagrammi equivalenti)** Due diagrammi sono *equivalenti* se esiste un'isotopia ambiente del piano che porta un diagramma sull'altro.

In Figura 1.12 sono riportate quelle che oggi sono note come le *mosse di Reidemeister*.<sup>1</sup>

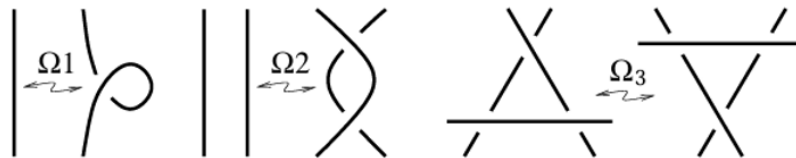


Figura 1.12: Mosse di Reidemeister

Queste tre mosse, insieme all'isotopia del piano, sono tutto ciò che serve per trasformare un dato diagramma di un link in un qualsiasi altro diagramma equivalente.

<sup>1</sup>Nella Figura 1. dell'articolo di M. Polyak [3] sono considerate due versioni di  $\Omega_1$  e due di  $\Omega_3$ , poiché non si fa riferimento a un insieme minimale di mosse. In particolare, la versione sinistra di  $\Omega_1$  nella Figura 1. può essere ottenuta combinando opportunamente le mosse minimali illustrate in Figura 1.12 (due volte  $\Omega_2$ , poi  $\Omega_3$ , e di nuovo  $\Omega_2$ ) mentre la versione sinistra di  $\Omega_3$  si ottiene a partire dalle stesse mosse minimali di Figura 1.12 con due ripetizioni di  $\Omega_2$  seguite da  $\Omega_3$ .

**Teorema 1.6.2. (Teorema di Reidemeister)** *Due diagrammi  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$  rappresentano link  $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$  isotopicamente equivalenti se e solo se possono essere ottenuti l'uno dall'altro tramite una sequenza finita di isotopie planari e mosse di Reidemeister.*

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Siano  $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$  due link isotopicamente equivalenti. Per definizione esiste un'isotopia ambiente che si può assumere liscia

$$H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t.c. \quad h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}, \quad h_1(L_1) = L_2,$$

ossia una famiglia continua di omeomorfismi  $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che deforma  $L_1$  in  $L_2$ . Consideriamo i diagrammi ottenuti per proiezione:

$$D_t = \pi(h_t(L_1)) \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1].$$

Si sceglie l'isotopia  $h_t$  in posizione generale, ovvero si richiede che la famiglia  $\{D_t\}_{t \in [0, 1]}$  sia una variazione continua di diagrammi regolari eccetto in istanti isolati  $t_1, \dots, t_m \in (0, 1)$  in cui la proiezione attraversa singolarità locali. In tali istanti, il cambiamento di  $D_t$  è descritto da una singola mossa di Reidemeister. Piccole perturbazioni dell'isotopia permettono sempre di ottenere tale condizione, pertanto non si perde generalità nel richiederla. Le singolarità locali possibili per la proiezione sono le seguenti:

- la comparsa o scomparsa di un “twist” locale (singolarità di tipo cuspidale tangenziale), corrispondente alla mossa  $\Omega_1$ ;
- l'incontro o la separazione trasversale di due archi, con comparsa o scomparsa di una coppia di incroci opposti, corrispondente alla mossa  $\Omega_2$ ;
- l'incidenza simultanea di tre archi nello stesso punto (intersezione tripla in proiezione), corrispondente alla mossa  $\Omega_3$ .

Poiché gli istanti critici sono isolati e in ciascun attraversamento singolare il cambiamento di  $D_t$  è descritto da una singola mossa di Reidemeister, la successione continua  $\{D_t\}_{t \in [0, 1]}$  si traduce in una sequenza finita di isotopie planari (per i valori di  $t$  in cui non si verificano singolarità) e di mosse  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  nei singoli istanti critici.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $D_2$  il diagramma ottenuto da  $D_1$  tramite una singola mossa di Reidemeister. Dimostriamo che esiste un'isotopia ambiente di  $\mathbb{R}^3$  che realizza la stessa modifica a livello di link  $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ .

Ciascuna mossa di Reidemeister può essere realizzata mediante una deformazione locale del filamento del link nello spazio tridimensionale, senza alterare l'isotopia ambiente globale.

Poiché ciascuna mossa è realizzabile tramite un'isotopia locale, una sequenza finita di mosse corrisponde alla composizione di isotopie locali, che è essa stessa un'isotopia ambiente globale tra i due link.

□

Le mosse raffigurate in Figura 1.12 sono riferite a diagrammi, e dunque a link, non orientati. Se invece, si prendessero in considerazione link orientati si avrebbero 4 diverse versioni della mossa  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , e 8 differenti versioni della mossa  $\Omega_3$ .

**Definizione 1.6.3. (insieme generatore di mosse)** Un insieme  $S$  di mosse orientate di Reidemeister è detto *insieme generatore* se una qualsiasi mossa orientata di Reidemeister  $\Omega$  può essere ottenuta da una sequenza finita di isotopie planari e mosse dell'insieme  $S$ .

Si può dimostrare che il numero minimale di generatori è 4: due mosse  $\Omega_1$ , una mossa  $\Omega_2$ , e una mossa  $\Omega_3$ .

**Teorema 1.6.4.** *Siano  $D_1$  e  $D_2$  due diagrammi in  $\mathbb{R}^2$  rappresentanti lo stesso link orientato. Si può passare da  $D_1$  a  $D_2$  tramite una sequenza finita di isotopie e mosse orientate di Reidemeister  $\Omega_{1a}, \Omega_{1b}, \Omega_{2a}, \Omega_{3a}$  mostrate in Figura 1.13.*

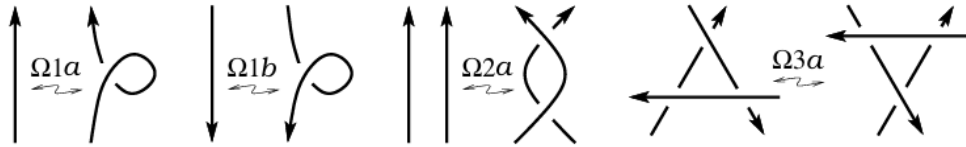


Figura 1.13: Insieme minimale di generatori di mosse di Reidemeister

*Dimostrazione.* Di seguito verrà mostrato, a titolo esemplificativo, come le mosse  $\Omega_{2c}$  e  $\Omega_{2d}$  (Figura 1.14) possono essere ottenute a partire dalle mosse in Figura 1.13. Per la dimostrazione delle restanti mosse si rimanda a [3].

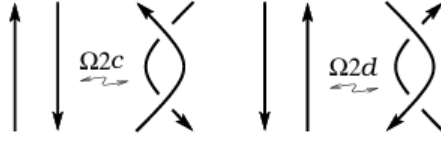


Figura 1.14: Mosse  $\Omega_{2c}$  e  $\Omega_{2d}$

La mossa  $\Omega_{2c}$  si realizza tramite un'opportuna sequenza di mosse  $\Omega_{1a}$ ,  $\Omega_{2a}$ ,  $\Omega_{3a}$ . In modo analogo, la mossa  $\Omega_{2d}$  si realizza tramite un'opportuna sequenza di mosse  $\Omega_{1b}$ ,  $\Omega_{2a}$ ,  $\Omega_{3a}$ . Si veda Figura 1.15.

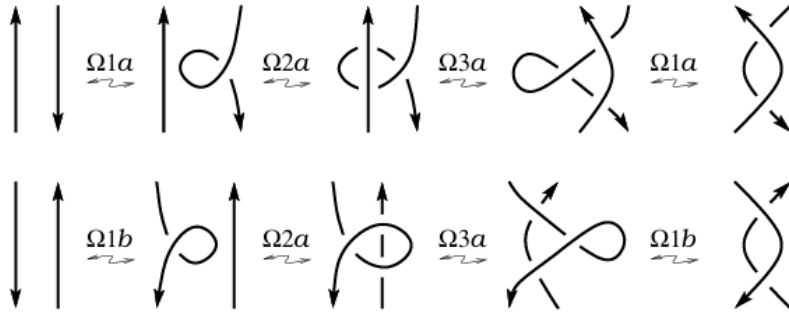


Figura 1.15: Realizzazione delle mosse  $\Omega_{2c}$  e  $\Omega_{2d}$

□

## Capitolo 2

# Nozioni preliminari algebriche

In questo capitolo verranno fornite alcune nozioni preliminari che saranno poi indispensabili per il prosieguo.

Nel primo paragrafo verrà introdotto il concetto di gruppo libero, centrale nella definizione di presentazione di gruppo trattata poi nel secondo paragrafo; infine il terzo e ultimo paragrafo sarà dedicato alla descrizione del gruppo fondamentale.

### 2.1 Gruppi liberi

Sia  $\mathcal{A}$  un insieme di cardinalità  $n$ , che chiameremo *alfabeto*, mentre gli elementi  $a \in \mathcal{A}$  verranno detti *lettere*. Inoltre,  $a^n$  con  $a \in \mathcal{A}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  sarà detta *sillaba*. In particolare, ciascuna sillaba  $a^1$  può essere intesa come lettera  $a \in \mathcal{A}$ . Una *parola* è una sequenza finita di sillabe, e ogni sillaba costituisce a sua volta una parola elementare.

Una parola si ottiene concatenando le sillabe, ovvero scrivendole una dopo l'altra; un esempio di parola con sei sillabe è il seguente:

$$a_3^{-1}a_1^2a_2^{-3}a_1^0a_4^1a_2^5 \quad \text{con } a_i \in \mathcal{A} \quad \forall i = 1, \dots, 4 \quad (2.1)$$

L'unica parola non contenente sillabe viene chiamata *parola vuota* ed indicata col simbolo 1.

Sia  $\mathcal{W}(\mathcal{A})$  l'insieme delle parole formate da sequenze finite di sillabe  $a^k$  con  $a \in \mathcal{A}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ ; se ad esso è associata l'operazione di concatenazione si ottiene il *monoide delle parole*:

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) = (\{a_1^{k_1}a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \mid a_i \in \mathcal{A}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0\}, \cdot)$$

Si vede facilmente che è un monoide poiché l'operazione di concatenazione, come definita sopra, gode della proprietà associativa, e l'elemento neutro è dato dalla parola vuota. Tuttavia esso non costituisce un gruppo poiché l'elemento inverso è definito soltanto per la parola vuota.

Per ottenere un gruppo bisogna considerare classi di equivalenza di parole. Due parole  $u$  e  $v$  si dicono equivalenti, denotando con  $u \sim v$  tale relazione, se una di esse può essere ottenuta dall'altra tramite una sequenza finita, eventualmente vuota, di espansioni e contrazioni elementari:

- dati  $u = w_1 a^0 w_2$  e  $v = w_1 w_2$  con  $w_1$  e  $w_2$  parole, allora  $u$  si dice espansione elementare di  $v$  di tipo I, mentre  $v$  contrazione elementare di  $u$  di tipo I;
- dati  $u = w_1 a^p a^q w_2$  e  $v = w_1 a^{p+q} w_2$  con  $w_1$  e  $w_2$  parole, allora  $u$  si dice espansione elementare di  $v$  di tipo II, mentre  $v$  contrazione elementare di  $u$  di tipo II.

Si dimostra banalmente che  $\sim$  è una relazione di equivalenza; pertanto  $\mathcal{W}(\mathcal{A})/\sim$  costituisce l'insieme delle classi di equivalenza delle parole dove, la classe rappresentata dalla parola  $u$  è indicata con  $[u]$ , e scrivere  $[u] = [v]$  equivale a scrivere  $u \sim v$ .

Poiché se  $u \sim v$  e  $u' \sim v'$  allora  $uv \sim u'v'$  (essendo  $uv \sim u'v \sim u'v'$ ), si ha che  $\mathcal{W}(\mathcal{A})/\sim$  eredita da  $\mathcal{W}(\mathcal{A})$  l'operazione di concatenazione. Tale operazione in  $\mathcal{W}(\mathcal{A})/\sim$  è definita come segue:  $[u][v] = [uv]$ .

La concatenazione in  $\mathcal{W}(\mathcal{A})/\sim$  oltre a godere della proprietà associativa (che vale a livello di rappresentanti, pertanto vale anche a livello di classi) e dell'esistenza dell'elemento neutro (la classe della parola vuota), ammette anche l'esistenza dell'inverso per ogni suo elemento: l'inverso di una classe  $[u]$ , indicato con  $[u]^{-1}$ , ha come rappresentante  $\bar{u}$  ottenuto da  $u$  invertendo l'ordine delle sillabe e cambiando il segno a ogni esponente; l'inverso della parola (2.1) è il seguente:

$$a_2^{-5} a_4^{-1} a_1^0 a_2^3 a_1^{-2} a_3^1 \quad (2.2)$$

Da quanto detto, segue che  $\mathcal{W}(\mathcal{A})/\sim$  è un gruppo e viene chiamato *gruppo libero* sull'alfabeto  $\mathcal{A}$ , e indicato con  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ .

**Definizione 2.1.1. (insieme generatore di un gruppo)** Dato un gruppo arbitrario  $G$  e un suo sottoinsieme  $E$ , se il sottogruppo generato da  $E$  coincide con  $G$  allora  $E$  viene chiamato *insieme generatore di  $G$* .



In  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  ogni elemento può essere scritto come concatenazione di potenze intere di elementi  $[a_i]$  con  $a_i \in \mathcal{A} \forall i = 1, \dots, n$ . Considerando l'esempio (2.1) si ha

$$[a_3^{-1}a_1^2a_2^{-3}a_1^0a_4^1a_2^5] = [a_3^{-1}][a_1^2][a_2^{-3}][a_1^0][a_4^1][a_2^5].$$

Pertanto, l'insieme  $[\mathcal{A}]$ , ovvero l'insieme delle classi di equivalenza degli elementi  $a_i \in \mathcal{A} \forall i = 1, \dots, n$ , è un insieme generatore di  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ ; più precisamente è una base libera.

**Definizione 2.1.2. (base libera)** Sia  $G$  un gruppo, e sia  $E$  un suo insieme generatore.  $E$  si dice *base libera* di  $G$  se, dato un qualsiasi gruppo  $H$ , una qualsiasi funzione  $\varphi : E \rightarrow H$  può essere estesa a un unico omomorfismo di  $G$  in  $H$ .

**Definizione 2.1.3. (gruppo libero)** Un gruppo che ammette una base libera, viene detto *gruppo libero*.

**Teorema 2.1.4.** *Un gruppo è libero se e solo se è isomorfo a  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  per un qualche alfabeto  $\mathcal{A}$ .*

La dimostrazione del Teorema 2.1.4. può essere consultata in [2]. Tale dimostrazione mostra anche che la cardinalità della base libera  $E$  di  $G$  è uguale alla cardinalità dell'alfabeto  $\mathcal{A}$ . Pertanto, dati due gruppi liberi  $G, G'$ , essi sono isomorfi se le loro rispettive basi libere  $E, E'$  hanno stessa cardinalità. In realtà, si può dimostrare anche che se i gruppi liberi  $G, G'$  hanno basi libere di cardinalità diversa, allora non sono isomorfi.

Da quanto appena detto, ne consegue che a ciascun gruppo libero  $G$  corrisponde un numero cardinale  $n$  tale che ogni sua base libera abbia cardinalità esattamente pari a  $n$ . Il numero cardinale  $n$  viene chiamato *rango* di  $G$ .

Di seguito, un risultato di massima importanza per la teoria delle presentazioni dei gruppi che sarà essenziale per il prossimo paragrafo.

**Teorema 2.1.5.** *Ogni gruppo è immagine omomorfa di un gruppo libero.*

*Dimostrazione.* Sia  $E$  un insieme di generatori di un gruppo arbitrario  $G$ , e sia  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  un gruppo libero su un alfabeto  $\mathcal{A}$ , dove la cardinalità di  $\mathcal{A}$  è uguale o maggiore della cardinalità di  $E$ . Sia  $\lambda : [\mathcal{A}] \rightarrow E$  un'applicazione suriettiva. Poiché  $[\mathcal{A}]$  è una base libera di  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , l'applicazione  $\lambda$  si estende a un omomorfismo del gruppo libero  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  su  $G$ .  $\square$

Di seguito alcuni esempi di gruppi liberi:

- $\mathcal{A} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) = [\emptyset];$
- $\mathcal{A} = \{a\} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathbb{Z} = \langle a \rangle;$
- $\mathcal{A} = \{a, b\} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a \rangle * \langle b \rangle;$
- $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) = *_n \mathbb{Z} = \langle a_1 \rangle * \langle a_2 \rangle * \dots * \langle a_n \rangle.$

## 2.2 Presentazione di un gruppo

Nel 1882-1883 Dyck introdusse la descrizione di un gruppo fornendo generatori e relazioni per esso: un gruppo  $G$  è determinato se è dato un insieme di *generatori*  $g_1, g_2, \dots$  che, come suggerisce il nome, generano il gruppo, e un insieme di equazioni  $f_1(g_1, g_2, \dots) = 1, f_2(g_1, g_2, \dots) = 1, \dots$ , dette *relazioni*, con la proprietà che ogni relazione soddisfatta dagli elementi  $g_1, g_2, \dots$  è una conseguenza algebrica di queste equazioni date.

Vediamo nel dettaglio cosa significa quanto appena detto.

Sia  $F$  un gruppo libero avente come base libera  $x_1, x_2, \dots$  in corrispondenza uno-a-uno con un insieme di generatori  $g_1, g_2, \dots$  di  $G$ .

Sia, inoltre,  $\varphi : F \rightarrow G$  l'omomorfismo suriettivo per cui  $\varphi(x_i) = g_i$  con  $i = 1, 2, \dots$  (la cui esistenza è garantita dal teorema 2.1.5.). Per ogni equazione  $f_i(g_1, g_2, \dots) = 1$  si considera  $r_i = f_i(x_1, x_2, \dots)$  con  $i = 1, 2, \dots$  dove  $r_i \in F$  ed è ottenuta sostituendo ciascun  $g_i$  col rispettivo  $x_i$ .

Un esempio è il seguente:

$$g_2 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1} = 1 \Rightarrow r_i = x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}$$

Dire che  $f_i(g_1, g_2, \dots) = 1$  è valida in  $G$ , equivale a dire che  $r_i$  appartiene al nucleo (Kernel) di  $\varphi$ , ovvero:

$$1 = \varphi(r_i) = f_i(g_1, g_2, \dots) \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots$$

dove gli  $r_i$  sono detti *relatori*.

Definiamo ora cosa vuol dire che un'equazione è conseguenza algebrica delle altre.

**Definizione 2.2.1. (conseguenza algebrica)** Un elemento  $f$  di un gruppo arbitrario  $Q$  è detto *conseguenza algebrica* (o più semplicemente, *conseguenza*) dell'insieme degli elementi  $f_1, f_2, \dots$  di  $Q$  se  $\forall \psi : Q \rightarrow H$  omomorfismo, con  $H$  gruppo, per cui  $\psi(f_i) = 1$  allora  $\psi(f) = 1$ .

Poiché ogni omomorfismo di  $Q$  determina un sottogruppo normale, ovvero il nucleo dell'omomorfismo, e viceversa, segue che l'insieme delle conseguenze è l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di  $Q$  che contengono tutti gli elementi  $r_1, r_2, \dots$ ; ma essendo l'intersezione a sua volta un sottogruppo normale, si ha che la conseguenza è il più piccolo sottogruppo normale di  $Q$  che contiene tutti gli elementi  $r_1, r_2, \dots$ .

*Osservazione 2.2.2.* Un elemento di  $Q$  è conseguenza di  $f_1, f_2, \dots$  se e solo se è della forma

$$\prod_{j=1}^l h_j f_{i(j)}^{n(j)} h_j^{-1}.$$

Ritornando all'omomorfismo  $\varphi : F \rightarrow G$ , sia  $R$  la conseguenza dei relatori  $r_1, r_2, \dots$ . Affermare che le equazioni  $f_i(g_1, g_2, \dots) = 1$  con  $i = 1, 2, \dots$  costituiscono un insieme di relazioni per  $G$ , dalle quali tutte le altre possono essere derivate, equivale a dire che  $R$  coincide col nucleo di  $\varphi$ . In questo caso il gruppo  $G$  è determinato dalla base libera  $x_1, x_2, \dots$  e dai relatori  $r_1, r_2, \dots$  poiché  $G$  è isomorfo a  $F / \ker \varphi$ .

Per formalizzare quest'ultima affermazione, enunciamo ora un risultato generale sugli omomorfismi di gruppi, che fornisce lo strumento chiave per descrivere i quozienti in termini di nuclei e immagini.

**Teorema 2.2.3. (Primo teorema d'isomorfismo)** *Sia  $\varphi : G \rightarrow H$  un omomorfismo di gruppi. Allora:*

1.  $\ker \varphi \trianglelefteq G$ ,<sup>1</sup>
2.  $\text{Im } \varphi \leq H$ ;
3. *esiste un isomorfismo canonico*

$$G / \ker \varphi \cong \text{Im } \varphi, \quad g \ker \varphi \mapsto \varphi(g).$$

---

<sup>1</sup>L'espressione  $\ker \varphi \trianglelefteq G$  indica che il nucleo di  $\varphi$  è un sottogruppo normale del gruppo  $G$ .

*Dimostrazione.* Per definizione  $\ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1_H\}$ , ovvero è un sottogruppo di  $G$ . Inoltre, se  $x \in \ker \varphi$  e  $g \in G$ , allora  $\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g)^{-1} = 1_H$ . Quindi  $gxg^{-1} \in \ker \varphi$ , cioè  $\ker \varphi \trianglelefteq G$ . Se  $a = \varphi(g_1), b = \varphi(g_2) \in \text{Im } \varphi$ , allora  $ab^{-1} = \varphi(g_1g_2^{-1}) \in \text{Im } \varphi$ . Quindi  $\text{Im } \varphi$  è un sottogruppo di  $H$ .

Definiamo

$$\psi : G/\ker \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi, \quad g \ker \varphi \mapsto \varphi(g).$$

Questa applicazione è ben definita: se  $g \ker \varphi = g' \ker \varphi$ , allora  $g^{-1}g' \in \ker \varphi$ , da cui  $\varphi(g) = \varphi(g')$ . È un omomorfismo:  $\psi((g_1 \ker \varphi)(g_2 \ker \varphi)) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ . Ed è, inoltre, suriettiva per definizione dell'immagine, ed è iniettiva poiché  $\psi(g \ker \varphi) = 1$  implica  $g \in \ker \varphi$ . Dunque  $\psi$  è un isomorfismo.  $\square$

Grazie al primo teorema d'isomorfismo possiamo finalmente dimostrare il seguente.

**Teorema 2.2.4.** *Ogni gruppo è isomorfo a un quoziente di un gruppo libero.*

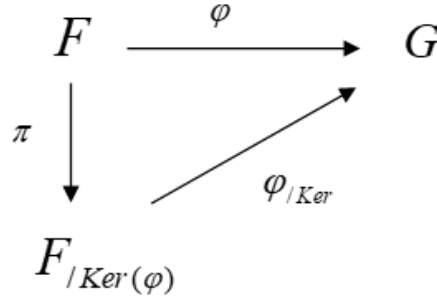


Figura 2.1: Costruzione dell'isomorfismo tra  $F/\ker(\varphi)$  e  $G$

In Figura 2.1 si può vedere come viene costruito l'isomorfismo tra  $F/\ker(\varphi)$  e  $G$ :  $\varphi$  è l'omomorfismo di  $F$  su  $G$ , dunque suriettivo, quando viene quozientato tramite  $\pi$ , proiezione canonica, diventa anche iniettivo.

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un gruppo arbitrario e sia  $E \subseteq G$  un insieme di generatori di  $G$ . Consideriamo il gruppo libero  $F = F(E)$  generato da  $E$ . La funzione inclusione  $\iota : E \hookrightarrow G$  si estende in modo unico, per il Teorema 2.1.5., ad un omomorfismo  $\varphi : F \rightarrow G$  tale che  $\varphi(e) = e$  per ogni  $e \in E$ . Poiché  $\text{Im } \varphi$  contiene  $E$ , si ha  $\text{Im } \varphi = G$ , dunque  $\varphi$  è suriettivo.

La proiezione canonica  $\pi : F \rightarrow F/\ker \varphi$  soddisfa  $\ker \pi = \ker \varphi$ . Per il primo teorema d'isomorfismo per gruppi (Teorema 2.2.3.) esiste un isomorfismo  $\varphi/\ker : F/\ker \varphi \xrightarrow{\cong} G$  tale che  $\varphi = \varphi/\ker \circ \pi$ . Quindi  $G \cong F/\ker \varphi$ , come volevasi dimostrare.  $\square$

**Definizione 2.2.5. (presentazione di un gruppo)** Una presentazione del gruppo  $G \cong F(X)/\ker \varphi$  è data da  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ , dove  $X$  rappresenta l'insieme dei *generatori* e  $\mathcal{R}$  l'insieme dei *relatori* della presentazione. Inoltre, una presentazione  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  si dice *finita* se  $X$  e  $\mathcal{R}$  sono finiti, in tal caso il gruppo  $G$  viene detto *finitamente presentato*. La presentazione  $\langle X \mid \rangle$  è la presentazione del gruppo libero  $F(X)$ , mentre  $\langle \mid \rangle$  è quella del gruppo banale.

Il nome “presentazione” è stato scelto per descrivere il contesto in cui un gruppo  $G$  viene studiato mappando su di esso un gruppo noto (il gruppo libero  $F(X)$ ), poiché si è ritenuto che fosse in qualche modo duale al contesto in cui un gruppo  $G$  viene studiato mappandolo in un gruppo noto, dove quest'ultima mappa viene detta “rappresentazione” di  $G$ .

Sebbene la presentazione  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  è data da generatori e relatori, si possono considerare le relazioni al posto dei relatori poiché esse sono più facili da maneggiare: se  $a$  e  $b$  commutano è facile vedere che  $(ab)^2 = 1$  implica  $a^2b^2 = 1$ , mentre è più laborioso dimostrare che  $a^2b^2$  è una conseguenza dei due relatori  $aba^{-1}b^{-1}$  e  $(ab)^2$  (infatti  $a^2b^2 = b^{-1}(aba^{-1}b^{-1})^{-1}bb^{-1}(ab^2)b$ ).

Non necessariamente i gruppi hanno una presentazione finita. Alcuni esempi di presentazione di gruppo sono riportati di seguito:

- $\mathbb{Z}_3 = \langle a \mid a^3 \rangle$ ;
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ ;
- Il gruppo dei razionali  $\mathbb{Q}$  non è finitamente generato, infatti se per assurdo  $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \dots, \frac{r_n}{s_n}$  fosse un insieme di generatori, si consideri un primo  $p$  che non divide nessun  $s_i$  e allora non è possibile scrivere:  $\frac{1}{p} = a_1 \frac{r_1}{s_1} + a_2 \frac{r_2}{s_2} + \dots + a_n \frac{r_n}{s_n}$  con  $a_i$  interi.

Prima di enunciare la proposizione seguente, di particolare rilievo e che verrà ripresa anche nel capitolo successivo, è opportuno introdurre un lemma preliminare, su cui si basa l'argomentazione.

**Lemma 2.2.6. (Lemma di fattorizzazione)** Siano  $F, G, H$  gruppi e siano  $v : F \rightarrow G$ ,  $\alpha : F \rightarrow H$  omomorfismi tali che:

1.  $v$  è suriettivo;

2.  $\ker v \subseteq \ker \alpha$ .

Allora esiste un unico omomorfismo  $\alpha' : G \rightarrow H$  tale che

$$\alpha = \alpha' \circ v.$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $\alpha'(g) = \alpha(f)$  scegliendo un qualsiasi  $f \in F$  con  $v(f) = g$  (possibile poiché  $v$  è suriettivo). Se  $f_1, f_2$  soddisfano  $v(f_1) = v(f_2) = g$ , allora  $f_1 f_2^{-1} \in \ker v \subseteq \ker \alpha$ , da cui  $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ . Quindi  $\alpha'$  è ben definito.

Siano  $g_1 = v(f_1), g_2 = v(f_2)$ . Allora

$$\alpha'(g_1 g_2) = \alpha'(v(f_1 f_2)) = \alpha(f_1 f_2) = \alpha(f_1) \alpha(f_2) = \alpha'(g_1) \alpha'(g_2),$$

perciò  $\alpha'$  è un omomorfismo.

Infine, per ogni  $f \in F$  si ha

$$(\alpha' \circ v)(f) = \alpha'(v(f)) = \alpha(f),$$

ossia  $\alpha = \alpha' \circ v$ . L'unicità segue dalla suriettività di  $v$ . □

Come conseguenza immediata, otteniamo il seguente risultato che descrive omomorfismi nel contesto delle presentazioni.

**Proposizione 2.2.7. (Test di sostituzione)** *Sia  $G \cong \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  una presentazione di gruppo, sia  $H$  un gruppo e sia  $\theta : X \rightarrow H$  una mappa sull'insieme dei generatori. Posto  $\bar{x}$  l'immagine del generatore  $x \in X$  di  $G$ , esiste un unico omomorfismo  $\tilde{\theta} : G \rightarrow H$  tale che  $\tilde{\theta}(\bar{x}) = \theta(x)$  per ogni  $x \in X$  se e solo se ogni  $r \in \mathcal{R}$  valutata sostituendo  $x \mapsto \theta(x)$  assume il valore identità in  $H$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F = F(X)$  il gruppo libero su  $X$  e  $\pi : F \rightarrow G \cong F/N$  la proiezione canonica, dove  $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$  è il sottogruppo normale generato da  $\mathcal{R}$ . Per il Teorema 2.1.5. la mappa  $\theta$  si estende in modo unico a un omomorfismo  $\varphi : F \rightarrow H$ .

( $\Rightarrow$ ) Se esiste  $\tilde{\theta} : G \rightarrow H$  tale che  $\tilde{\theta}(\bar{x}) = \theta(x)$  per ogni  $x \in X$ , allora  $\varphi = \tilde{\theta} \circ \pi$  e pertanto  $\ker \pi \subseteq \ker \varphi$ ; siccome  $\mathcal{R} \subseteq \ker \pi$  segue che  $\varphi(r) = 1_H$  per ogni  $r \in \mathcal{R}$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\varphi(r) = 1_H$  per ogni  $r \in \mathcal{R}$ , allora  $N \subseteq \ker \varphi$  e quindi  $\ker \pi \subseteq \ker \varphi$ . Per il Lemma di fattorizzazione 2.2.6.,  $\varphi$  fattorizza in modo unico tramite  $G = F/N$ : esiste dunque un unico omomorfismo  $\tilde{\theta} : G \rightarrow H$  tale che  $\varphi = \tilde{\theta} \circ \pi$  e  $\tilde{\theta}(\bar{x}) = \theta(x)$  per ogni  $x \in X$ . □

*Osservazione 2.2.8.* Per verificare concretamente l'estendibilità di  $\theta$  è sufficiente controllare che ogni  $r \in \mathcal{R}$  valga l'identità in  $H$  dopo la sostituzione  $x \mapsto \theta(x)$ .

Un gruppo può avere presentazioni diverse; pertanto ci si pone il problema di determinare quando due presentazioni determinano gruppi isomorfi, e questo problema va sotto il nome di *problema di isomorfismo*. Non è possibile dare una soluzione generale a tale problema, tuttavia si possono dare condizioni sulle presentazioni che devono essere soddisfatte affinché i gruppi presentati siano isomorfi.

**Definizione 2.2.9. (mappa tra presentazioni)** Siano  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  e  $\langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$  due presentazioni. Una *mappa tra presentazioni*  $f : \langle X \mid \mathcal{R} \rangle \rightarrow \langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$  consiste in un omomorfismo  $f : F(X) \rightarrow F(Y)$  tale che l'immagine  $f(\mathcal{R})$  di  $\mathcal{R}$  rispetto a  $f$  sia contenuta nella conseguenza di  $\mathcal{S}$ .

**Definizione 2.2.10. (mappe omotope)** Due mappe  $f_1, f_2 : \langle X \mid \mathcal{R} \rangle \rightarrow \langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$  sono *omotope*, e si scrive  $f_1 \simeq f_2$ , se  $f_1(g_i) \cdot f_2(g_i^{-1}) \in \mathcal{S} \forall g_i \in X$ .

**Definizione 2.2.11. (presentazioni equivalenti)** Le presentazioni  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  e  $\langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$  vengono dette dello stesso *tipo* se esistono mappe  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle \xrightarrow{f}_g \langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$  tali che  $gf \simeq 1$  e  $fg \simeq 1$ . La coppia di mappe  $f, g$  è detta *equivalenza della presentazione*.

**Teorema 2.2.12.** *Due presentazioni sono dello stesso tipo se e solo se i gruppi presentati da esse sono isomorfi.*

La dimostrazione del Teorema 2.2.12. può essere consultata in [2].

Queste equivalenze ci permettono dunque di passare da una presentazione a un'altra; molto importanti sono le equivalenze di Tietze, esse sono di quattro tipi a seconda che si aggiunga o tolga una relazione oppure un generatore:

1. Se  $s$  è una conseguenza di  $\mathcal{R}$ , allora  $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle = \langle X \mid \mathcal{R} \cup s \rangle$ . A seconda che si aggiunga o tolga la relazione  $s$ , si ha l'equivalenza di tipo  $I$  o  $I'$ ;
2. Se  $\xi \in F(X)$ , allora  $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle = \langle X \cup y \mid \mathcal{R} \cup y\xi^{-1} \rangle$ . A seconda che si aggiungano o tolgano il generatore e la relazione, si ha l'equivalenza di tipo  $II$  o  $II'$ .

**Teorema 2.2.13. (Teorema di Tietze)** *Date due presentazioni finite  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  e  $\langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$  di uno stesso gruppo, esiste una successione finita di equivalenze di Tietze che porta da  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  a  $\langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$ , e viceversa.*

*Dimostrazione.* Poiché entrambe le presentazioni definiscono lo stesso gruppo  $G$ , esistono omomorfismi suriettivi

$$\pi_X : F(X) \rightarrow G, \quad \pi_Y : F(Y) \rightarrow G$$

i cui nuclei sono rispettivamente i sottogruppi normali generati da  $R$  e da  $S$ . Denotiamo  $N_X = \langle\langle R \rangle\rangle$  e  $N_Y = \langle\langle S \rangle\rangle$ , così che

$$G \cong F(X)/N_X \cong F(Y)/N_Y.$$

L'idea è la seguente: a partire da  $\langle X \mid R \rangle$  introduciamo i generatori  $Y$  come nuovi simboli, insieme a relazioni che li collegano a parole in  $F(X)$  (equivalenze di tipo II); quindi aggiungiamo le relazioni  $S$  (equivalenze di tipo I); infine eliminiamo i generatori e le relazioni superflue (equivalenze di tipo II' e I').

1. Scelta di parole rappresentative. Per ogni  $y \in Y$  fissiamo una parola  $w_y \in F(X)$  tale che

$$\pi_X(w_y) = \pi_Y(y) \in G.$$

2. Aggiunta dei generatori  $Y$  (equivalenze di tipo II). Introduciamo un nuovo generatore  $y$  e la relazione  $yw_y^{-1}$  per ciascun  $y \in Y$ . Otteniamo la presentazione

$$P_1 = \langle X \cup Y \mid R \cup \{yw_y^{-1} : y \in Y\} \rangle,$$

che definisce ancora  $G$ .

3. Inserimento delle relazioni  $S$  (equivalenze di tipo I). Ciascuna relazione  $s \in S$ , espressa in  $F(Y)$ , rappresenta l'identità in  $G$ , dunque è conseguenza delle relazioni in  $P_1$ . Possiamo quindi aggiungerle ottenendo

$$P_2 = \langle X \cup Y \mid R \cup \{yw_y^{-1} : y \in Y\} \cup S \rangle.$$

4. Eliminazione dei generatori  $X$ . Per ogni  $x \in X$  scegliamo una parola  $u_x \in F(Y)$  tale che  $\pi_Y(u_x) = \pi_X(x)$ . Aggiungiamo allora le relazioni  $xu_x^{-1}$ , ottenendo

$$P_3 = \langle X \cup Y \mid R \cup \{yw_y^{-1} : y \in Y\} \cup S \cup \{xu_x^{-1} : x \in X\} \rangle.$$

Ora ciascun  $x \in X$  è esprimibile in termini dei generatori di  $Y$ , e possiamo rimuovere i generatori  $X$  e le corrispondenti relazioni tramite equivalenze di tipo II'. Si giunge così a

$$P_4 = \langle Y \mid S \cup \{yw_y^{-1} : y \in Y\} \rangle.$$

5. Rimozione delle relazioni ausiliarie (equivalenze di tipo I'). Le relazioni  $yw_y^{-1}$  sono conseguenza di  $S$ , poiché per costruzione  $w_y$  rappresenta in  $G$  lo



stesso elemento che rappresenta  $y$ . Possiamo dunque eliminarle, ottenendo infine la presentazione

$$P_5 = \langle Y \mid S \rangle.$$

Abbiamo dunque mostrato una successione finita di equivalenze di Tietze che porta  $\langle X \mid R \rangle$  in  $\langle Y \mid S \rangle$ . Poiché ciascuna equivalenza è invertibile, vale anche l'implicazione inversa.  $\square$

Le equivalenze di Tietze permettono di dire, ad esempio, che i gruppi  $\langle x, y, z \mid xyz = yzx \rangle$  e  $\langle x, y, a \mid xa = ax \rangle$  sono isomorfi.

$$\begin{aligned} & \langle x, y, z \mid xyz(yzx)^{-1} \rangle \\ & \quad \downarrow II \\ & \langle x, y, z, a \mid xyz(yzx)^{-1}, a(yz)^{-1} \rangle \\ & \quad \downarrow I \\ & \langle x, y, z, a \mid xa(ax)^{-1}, a(yz)^{-1}, xyz(yzx)^{-1} \rangle \\ & \quad \downarrow I' \\ & \langle x, y, z, a \mid xa(ax)^{-1}, a(yz)^{-1} \rangle \\ & \quad \downarrow I \\ & \langle x, y, z, a \mid xa(ax)^{-1}, z(y^{-1}a)^{-1}, a(yz)^{-1} \rangle \\ & \quad \downarrow I' \\ & \langle x, y, z, a \mid xa(ax)^{-1}, z(y^{-1}a)^{-1} \rangle \\ & \quad \downarrow II' \\ & \langle x, y, a \mid xa(ax)^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

## 2.3 Gruppo fondamentale

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $*$   $\in X$  un punto fissato, detto *punto base* di  $X$ , così da avere uno spazio topologico puntato  $(X, *)$ .

A partire da esso si definisce l'insieme dei cappi  $\omega$  che partono e tornano nel punto base:

$$\Omega(X, *) = \{\omega : [0, 1] \rightarrow X \mid \omega(0) = \omega(1) = *\}.$$

Su tale insieme definiamo le seguenti nozioni:

- Cappio costante

$$* : [0, 1] \rightarrow X \quad \text{t.c.} \quad *(t) = * \quad \forall t \in [0, 1];$$

- Coppio inverso

$$\bar{\omega} : [0, 1] \rightarrow X \quad \text{t.c.} \quad \bar{\omega}(t) = \omega(1 - t) \quad \forall t \in [0, 1], \omega \in \Omega(X, *);$$

- Operazione di concatenazione

dati  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X, *)$ , si definisce  $\omega = \omega_1 \cdot \omega_2$  il cappio

$$\omega : [0, 1] \rightarrow X \quad \text{t.c.} \quad \omega(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) & \text{se } t \leq 1/2, \\ \omega_2(1 - 2t) & \text{se } t \geq 1/2. \end{cases}$$

*Osservazione 2.3.1.* L'insieme  $\Omega(X, *)$  e l'operazione di concatenazione appena definita non costituiscono un gruppo poiché non esistono l'elemento neutro, l'elemento inverso e non vale la proprietà associativa; tuttavia si può ottenere un gruppo se l'insieme dei cappi  $\Omega(X, *)$  viene quozientato per l'omotopia relativa  $\{0, 1\}$ .

**Definizione 2.3.2. (omotopia relativa)** Sia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  un'omotopia, e sia  $S \subset X$ .  $H$  è un'omotopia relativa a  $S \iff h_t|_S = h_0|_S \forall t \in [0, 1]$ .

- Elemento neutro.

$*$  non è l'elemento neutro di  $\Omega(X, *)$  poiché  $* \cdot \omega \neq \omega \neq \omega \cdot *$ ; infatti fare  $* \cdot \omega$  significa rimanere metà del tempo fermi nel punto base e poi percorrere il cappio  $\omega$  nel tempo rimanente, ovvero percorrerlo a velocità doppia rispetto a quando si considera il solo cappio  $\omega$ .

Tuttavia vale  $* \cdot \omega \simeq_{\{0,1\}} \omega$ . Infatti, data  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ , come mostrato in Figura 2.2, con  $h_0 = * \cdot \omega$  e  $h_1 = \omega$  si ha  $h_t(0) = h_0(0) = *$  e  $h_t(1) = h_0(1) = * \forall t \in [0, 1]$ . Dimostrazione analoga per  $\omega \cdot * \simeq_{\{0,1\}} \omega$ .

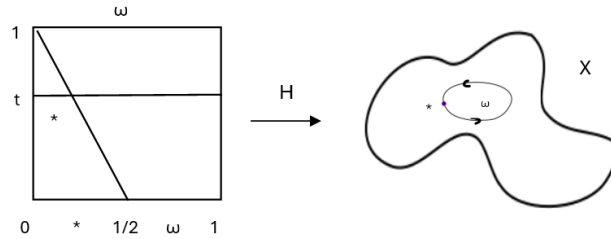


Figura 2.2: Omotopia  $H$  tra  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow X$  per mostrare l'esistenza dell'elemento neutro

- Elemento inverso.

$\bar{\omega}$  non è l'elemento inverso di  $\omega$  in  $\Omega(X, *)$  poiché  $\omega \cdot \bar{\omega} \neq * \neq \bar{\omega} \cdot \omega$ ; infatti fare  $\omega \cdot \bar{\omega}$  significa percorrere il cappio  $\omega$  a velocità doppia e con la stessa velocità poi percorrere  $\bar{\omega}$ ; mentre  $*$  è il cappio costante ovvero si rimane tutto il tempo fermi nel punto base. Tuttavia vale  $\omega \cdot \bar{\omega} \simeq_{\{0,1\}} *$ . Infatti, data  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ , come mostrato in Figura 2.3, con  $h_0 = \omega \cdot \bar{\omega}$  e  $h_1 = *$  si ha  $h_t(0) = h_0(0) = *$  e  $h_t(1) = h_0(1) = * \forall t \in [0, 1]$ . Dimostrazione analoga per  $\bar{\omega} \cdot \omega \simeq_{\{0,1\}} *$ .

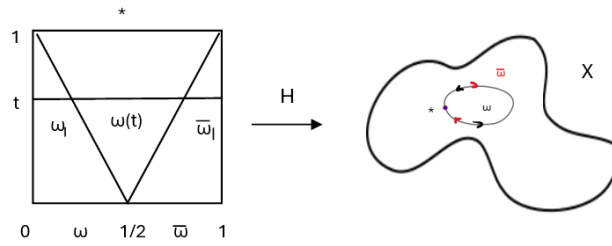


Figura 2.3: Omotopia  $H$  tra  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  per mostrare l'esistenza dell'elemento inverso

- Proprietà associativa.

Dati  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega(X, *)$  si ha  $(\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3 \neq \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3)$ ; infatti fare  $\omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3)$  significa percorrere il cappio  $\omega_1$  a velocità doppia mentre i cappi  $\omega_2$  e  $\omega_3$  a velocità quadrupla, mentre in  $(\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3$  si percorrono a velocità quadrupla  $\omega_1$  e  $\omega_2$  mentre  $\omega_3$  a velocità doppia. Tuttavia vale  $(\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3 \simeq_{\{0,1\}} \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3)$ . Infatti, data  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ , come mostrato in Figura 2.4, con  $h_0 = (\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3$  e  $h_1 = \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3)$  si ha  $h_t(0) = h_0(0) = *$  e  $h_t(1) = h_0(1) = * \forall t \in [0, 1]$ .

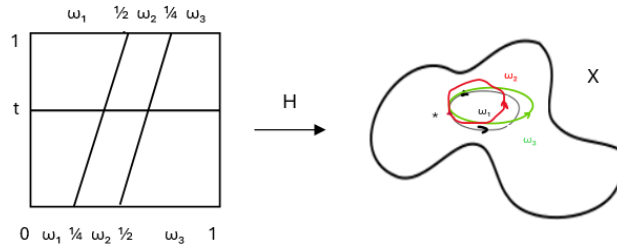


Figura 2.4: Omotopia  $H$  tra  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  per mostrare la proprietà associativa

A questo punto si può procedere con la definizione di gruppo fondamentale.

**Definizione 2.3.3. (gruppo fondamentale)** Dato uno spazio topologico puntato  $(X, *)$ , sia  $\Omega(X, *)$  l'insieme dei cappi definito su di esso e  $\simeq_{\{0,1\}}$  l'omotopia relativa  $\{0, 1\}$ , si definisce *gruppo fondamentale* di  $(X, *)$  il gruppo  $\pi_1(X, *) = (\Omega(X, *); \cdot) / \simeq_{\{0,1\}}$ .

Essendo definito come un gruppo quoziente, esso contiene classi di cappi ovvero gli elementi di  $\pi_1(X, *)$  sono del tipo  $[\omega]$  con  $\omega \in \Omega(X, *)$ . L'operazione binaria è data dal prodotto di due classi che coincide con la classe della concatenazione dei due rappresentanti: presi  $[\omega_1], [\omega_2]$  in  $\pi_1(X, *)$ ,  $[\omega_1] \cdot [\omega_2] = [\omega_1 \cdot \omega_2]$ . Tale operazione è ben definita e  $\pi_1(X, *)$  è un gruppo grazie alle osservazioni precedentemente fatte: l'elemento neutro è  $[*]$ , l'elemento inverso  $[w]^{-1}$  è  $[\bar{w}]$  e l'associatività vale a livello di classi.

*Osservazione 2.3.4.* Se lo spazio topologico  $X$  è connesso per archi, allora il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, *)$  risulta indipendente dalla scelta del punto base  $*$ . La dimostrazione di tale proprietà è riportata in [2].

Data la definizione di gruppo fondamentale per uno spazio topologico puntato generico, consideriamo ora il gruppo di un nodo.

Dato un nodo  $K \in \mathbb{R}^3$ , si ha  $\text{Gr}(K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ .

Molto importante per descrivere il gruppo di un nodo  $K$  è la *presentazione di Wirtinger*, definita come segue

$$\text{Gr}(K) \cong \langle g_1, g_2, \dots, g_n | r_1, r_2, \dots, r_n \rangle^2 \quad (2.3)$$

Sia  $K \subset \mathbb{R}^3$  un nodo orientato e sia  $D$  un suo diagramma; siano inoltre  $c_1, c_2, \dots, c_n$  gli archi che costituiscono  $D$ , dove  $n$  è il numero degli incroci presenti nel diagramma. Vediamo cosa sono  $g_i$  e  $r_i \forall i = 1, \dots, n$  nella (2.3), assumendo che il punto base sia posto a una distanza sufficientemente grande rispetto al piano del diagramma del nodo.

- $g_i$  è il generatore del corrispondente arco  $c_i \forall i = 1, \dots, n$ . Ovvero  $g_i$  è un cappio che parte dal punto base, attraversa l'arco  $c_i$  da destra a sinistra, relativamente all'orientazione del nodo, e poi ritorna nel punto base. Se l'attraversamento dell'arco avviene in verso opposto allora si ha  $g_i^{-1}$ . La numerazione degli  $g_i$  avviene partendo da un arco qualsiasi di  $D$  e seguendo poi il verso di percorrenza.

---

<sup>2</sup>In generale, il numero di  $g_i$  e  $r_i$  coincide. Questo non accade quando si ha un solo generatore senza relazioni, come nel caso di  $S^1$ .

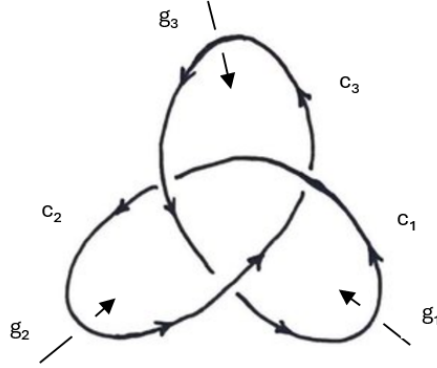


Figura 2.5: Generatori del trifoglio sinistro

- $r_i$  è una relazione  $\forall i = 1, \dots, n$ , e se ne ha una per ogni incrocio. Si parte dal punto base, si segue il primo generatore  $g_i$ , si torna al punto base, si segue il secondo generatore e così fino al quarto generatore; tuttavia a meno di omotopia relativa che fissa  $\{0, 1\}$ , ciò equivale a partire dal punto base, seguire i 4 generatori e tornare nel punto base, come mostrato in Figura 2.6.

La relazione  $r_i$  mostrata in Figura 2.6 è data da

$$r_i = g_i \cdot g_j^{\pm 1} \cdot g_{i+1}^{-1} \cdot g_j^{\mp 1}$$

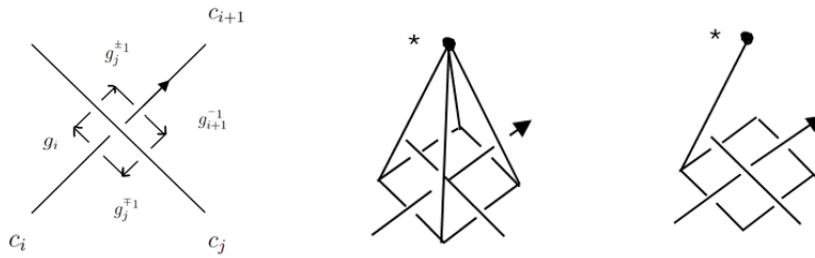


Figura 2.6: Relazione  $r_i$

Di seguito sono riportati due esempi di calcolo del gruppo di un nodo.

1. Sia  $K = S^1$ , ovvero il nodo banale, il suo gruppo è

$$\text{Gr}(S^1) \cong \langle g_1 \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$$

poiché, come si può vedere in Figura 2.7, c'è un solo arco e dunque un solo generatore, e nessun incrocio.

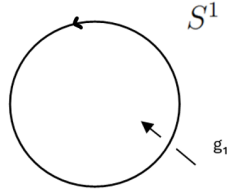


Figura 2.7: Generatore del nodo banale

2. Sia  $K$  il nodo trifoglio sinistro, il suo gruppo è

$$\text{Gr}(K) \cong \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 g_3^{-1} g_2^{-1} g_3, g_2 g_1^{-1} g_3^{-1} g_1, g_3 g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 \rangle$$

poiché, come mostrato in Figura 2.5, ci sono 3 archi e 3 incroci, di conseguenza 3 generatori e 3 relazioni.

*Osservazione 2.3.5.* Il gruppo del nodo trifoglio sinistro  $\text{Gr}(K)$  non è abeliano. Per dimostrarlo consideriamo l'applicazione:

$$\varphi : \text{Gr}(K) \longrightarrow \Sigma_3$$

dove  $\Sigma_3$  è il gruppo delle permutazioni di  $\{1, 2, 3\}$ . Definiamo  $\varphi$  sui generatori come segue:

$$\varphi(g_1) = (1\ 2), \quad \varphi(g_2) = (2\ 3), \quad \varphi(g_3) = (1\ 3).$$

Verifichiamo che  $\varphi$  rispetti le relazioni della presentazione:

- $\varphi(g_3 g_2 g_3^{-1}) = (1\ 3)(2\ 3)(1\ 3) = (1\ 2) = \varphi(g_1)$ ;
- $\varphi(g_1 g_3 g_1^{-1}) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2) = (2\ 3) = \varphi(g_2)$ ;
- $\varphi(g_2 g_1 g_2^{-1}) = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3) = \varphi(g_3)$ .

Poiché tutte le relazioni sono rispettate, grazie al Test di sostituzione (Proposizione 2.2.7.)  $\varphi$  si estende a un omomorfismo di gruppi ben definito. Inoltre, l'immagine di  $\varphi$  contiene le tre permutazioni di  $\Sigma_3$ , e quindi coincide con tutto  $\Sigma_3$ :

$$\text{Im}(\varphi) = \Sigma_3.$$

Poiché  $\Sigma_3$  non è abeliano, anche  $\text{Gr}(K)$  non può essere abeliano: se lo fosse, ogni sua immagine sarebbe abeliana, il che contraddice il fatto che  $\text{Im}(\varphi) = \Sigma_3$ .

Pertanto, il gruppo del nodo trifoglio sinistro non è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , ed essendo il gruppo di un nodo un invariante topologico (si veda il Paragrafo 1.4), si conclude che il nodo trifoglio sinistro non è isotopicamente equivalente al nodo banale.

## Capitolo 3

# Gruppi Elettrici

In questo capitolo verrà discusso il concetto di gruppo elettrico di nodi e link orientati, argomento fulcro della tesi.

In particolare, nel primo paragrafo verrà definito il concetto di gruppo elettrico e spiegato il relativo calcolo per nodi e link orientati; nel secondo paragrafo verranno mostrati esempi di calcolo del gruppo elettrico dei nodi comuni riportati in Figura 1.1, del link di Whitehead e degli anelli borromei; infine, nel terzo e ultimo paragrafo verrà introdotto il concetto di colorazione di un diagramma di un nodo e link orientato, e verranno forniti un paio di esempi.

### 3.1 Definizione

Sia  $L$  un link che non si spezza in sottolink separati e orientato, e sia  $D \subset S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  un diagramma del link  $L$  (dunque connesso)<sup>1</sup>. Supponiamo che  $S^2$  sia orientata in senso antiorario (ovviamente si può ragionare in modo analogo se si considera l'orientazione opposta).

Poniamo  $C(D) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  l'insieme degli incroci del diagramma  $D$ , e  $A(D) = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+2}\}$  l'insieme delle regioni di  $\mathbb{R}^2$  individuate da  $D$ .

---

<sup>1</sup>Nell'articolo di P. G. Korablev [4] non viene esplicitato che il link non debba spezzarsi in sottolink separati; tale ipotesi risulta tuttavia sottintesa, poiché si considerano diagrammi con  $n$  incroci e  $n + 2$  regioni del piano individuate dal diagramma. Questa relazione vale soltanto se il diagramma è connesso: infatti, se il diagramma è disconnesso e composto da  $k + 1$  componenti connesse, allora, per individuare  $n + 2$  regioni del piano, il numero degli incroci risulta pari a  $n - k$ .



Sia  $\mathcal{E}(D) = \langle a, b, x_1, x_2, \dots, x_n \mid \mathcal{R}_{a_1}, \mathcal{R}_{a_2}, \dots, \mathcal{R}_{a_{n+2}} \rangle$  con  $a$  e  $b$  generatori fissi,  $x_j$  generatore del corrispondente incrocio  $c_j \in C(D) \forall j = 1, 2, \dots, n$  e  $\mathcal{R}_{a_i}$  relazione associata alla regione  $a_i \in A(D) \forall i = 1, 2, \dots, n+2$ .

Vediamo come è definita ciascuna relazione  $\mathcal{R}_{a_i}$ .

Ad ogni incrocio  $c_j \in C(D)$  vengono associate quattro parole definite nel seguente modo:

- Se  $c_j$  è un incrocio positivo, posto  $x_j$  il suo generatore, allora le parole sono date da  $(x_j ab)$ ,  $(b^{-1} a^{-1} x_j^{-1})$ ,  $(a^{-1} x_j a)$  e  $(b^{-1} x_j^{-1} b)$ , a seconda di quale angolo nelle vicinanze dell'incrocio  $c_j$  ci si trova, si veda Figura 3.1 a sinistra;
- Se  $c_j$  è un incrocio negativo, posto  $x_j$  il suo generatore, allora le parole sono date da  $(x_j ab)$ ,  $(b^{-1} a^{-1} x_j^{-1})$ ,  $(a^{-1} x_j^{-1} a)$  e  $(b^{-1} x_j b)$ , a seconda di quale angolo nelle vicinanze dell'incrocio  $c_j$  ci si trova, si veda Figura 3.1 a destra.

Una volta definite le parole per ogni incrocio  $c_j$ , si sceglie un punto generico del bordo della regione  $a_i \in A(D)$  e lo si percorre seguendo l'orientazione precedentemente scelta di  $S^2$ . La relazione  $\mathcal{R}_{a_i}$  è la concatenazione di tutte le parole che si incontrano percorrendo il bordo di tale regione  $a_i$ .



Figura 3.1: Parole nelle vicinanze dell'incrocio  $c_j$  (positivo a sinistra, negativo a destra)

**Teorema 3.1.1.** *Siano  $D_1, D_2 \subset S^2$  due diagrammi di un link  $L$  non spezzato e orientato. Allora i gruppi  $\mathcal{E}(D_1)$  e  $\mathcal{E}(D_2)$  sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* Come discusso nel Paragrafo 1.6, dati due diagrammi di uno stesso link orientato, si può passare da uno all'altro tramite una sequenza finita di mosse di Reidemeister. Pertanto, è sufficiente dimostrare il

teorema nel caso in cui  $D_2$  si ottiene da  $D_1$  mediante una delle quattro mosse appartenenti all'insieme minimale di generatori di mosse di Reidemeister riportate in Figura 3.2.

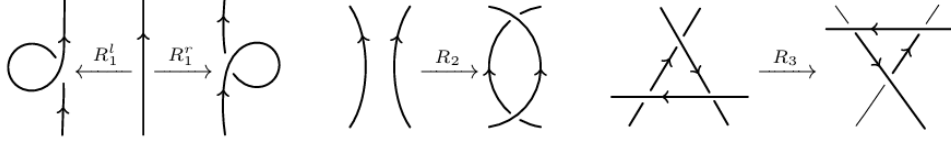


Figura 3.2: Insieme minimale di generatori di mosse di Reidemeister per link orientati

Analizziamole nel dettaglio.

- *Mossa  $R_1^r$ .*

Sia  $a_1 \in A(D_1)$  la regione a sinistra dell'arco del diagramma  $D_1$  e  $a_2 \in A(D_1)$  la regione a destra. Siano  $a'_1, a'_2 \in A(D_2)$  le regioni corrispondenti, rispettivamente a sinistra e a destra, individuate dal diagramma  $D_2$ , e sia  $\bar{a} \in A(D_2)$  la nuova regione venutasi a creare. Si veda Figura 3.3.

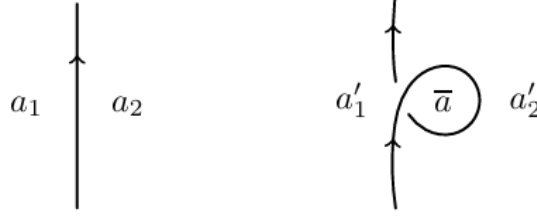


Figura 3.3: Regioni prima (a sinistra) e dopo (a destra) la mossa  $R_1^r$

Sia  $\mathcal{E}(D_1) = \langle \mathcal{G} \mid \mathcal{R} \rangle$ , dove  $\mathcal{G}$  è l'insieme dei generatori e  $\mathcal{R}$  l'insieme delle relazioni di  $D_1$ . Sia, inoltre,  $x$  il nuovo generatore associato al nuovo incrocio del diagramma  $D_2$ . Allora si ha  $\mathcal{E}(D_2) = \langle \mathcal{G}, x \mid \mathcal{R}' \rangle$ , dove

$$\mathcal{R}' = (\mathcal{R} \setminus \{\mathcal{R}_{a_1}, \mathcal{R}_{a_2}\}) \cup \{\mathcal{R}_{a'_1}, \mathcal{R}_{a'_2}, \mathcal{R}_{\bar{a}}\}.$$

Occorre dimostrare che  $x$  può essere rimosso dall'insieme dei generatori di  $\mathcal{E}(D_2)$ , e che  $\mathcal{R}'$ , dopo aver sostituito a  $x$  un'opportuna combinazione dei generatori di  $\mathcal{E}(D_1)$ , coincide con  $\mathcal{R}$ .

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a'_1, a'_2, \bar{a} \in A(D_2)$ , si ottiene

$$\mathcal{R}_{a'_1} = \mathcal{R}_{a_1} \cdot (a^{-1}xa); \quad (3.1)$$

$$\mathcal{R}_{a'_2} = \mathcal{R}_{a_2} \cdot (b^{-1}a^{-1}x) \cdot (xab); \quad (3.2)$$

$$\mathcal{R}_{\bar{a}} = b^{-1}x^{-1}b. \quad (3.3)$$

Uguagliando le tre relazioni a 1, si ricava  $x = 1$  da (3.3) e quindi  $x$  può essere rimosso dall'insieme dei generatori di  $\mathcal{E}(D_2)$ ; inoltre, sostituendo quanto appena trovato in (3.1) e (3.2), si ha  $\mathcal{R}_{a'_1} = \mathcal{R}_{a_1}$  e  $\mathcal{R}_{a'_2} = \mathcal{R}_{a_2}$ .

Pertanto,  $\mathcal{E}(D_1)$  e  $\mathcal{E}(D_2)$  sono isomorfi.

- *Mossa  $R_1^l$ .*

Si ragiona in maniera del tutto analoga alla mossa  $R_1^r$ .

- *Mossa  $R_2$ .*

Siano  $a_1, a_2, a_3 \in A(D_1)$  le regioni a sinistra, al centro e a destra del diagramma  $D_1$ . Siano, invece,  $a'_1, a'_2, a''_2, a'_3 \in A(D_2)$  le regioni corrispondenti individuate dal diagramma  $D_2$ , dove la regione  $a_2$  è stata divisa in  $a'_2, a''_2$ , e sia  $\bar{a} \in A(D_2)$  la nuova regione venutasi a formare. Si veda Figura 3.4.

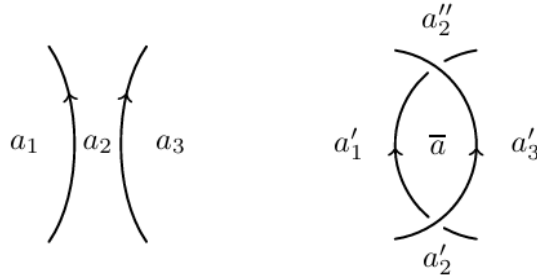


Figura 3.4: Regioni prima (a sinistra) e dopo (a destra) la mossa  $R_2$

Sia  $\mathcal{E}(D_1) = \langle \mathcal{G} \mid \mathcal{R} \rangle$ , con  $\mathcal{G}$  insieme dei generatori e  $\mathcal{R}$  insieme delle relazioni di  $D_1$ . Siano, inoltre,  $w_1, w_2$  due parole costituite dagli elementi dell'insieme  $\mathcal{G}$  tali che  $\mathcal{R}_{a_2} = w_1 \cdot w_2$ , dove  $w_1$  corrisponde alla parte inferiore della regione  $a_2$ , e  $w_2$  alla parte superiore.

Siano  $x, y$  i due nuovi generatori associati ai due nuovi incroci del diagramma  $D_2$ ; nello specifico,  $x$  è associato all'incrocio positivo, mentre  $y$  all'incrocio negativo.

Allora si ha  $\mathcal{E}(D_2) = \langle \mathcal{G}, x, y \mid \mathcal{R}' \rangle$ , dove

$$\mathcal{R}' = (\mathcal{R} \setminus \{\mathcal{R}_{a_1}, \mathcal{R}_{a_2}, \mathcal{R}_{a_3}\}) \cup \{\mathcal{R}_{a'_1}, \mathcal{R}_{a'_2}, \mathcal{R}_{a''_2}, \mathcal{R}_{a'_3}, \mathcal{R}_{\bar{a}}\}.$$

Occorre dimostrare che  $x$  e  $y$  possono essere rimossi dai generatori di  $\mathcal{E}(D_2)$  e che  $\mathcal{R}'$ , dopo aver sostituito a  $x$  e a  $y$  un'opportuna combinazione dei generatori di  $\mathcal{E}(D_1)$ , coincide con  $\mathcal{R}$ .

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a'_1, a'_2, a''_2, a'_3, \bar{a} \in A(D_2)$ , si trova

$$\mathcal{R}_{a'_1} = \mathcal{R}_{a_1} \cdot (a^{-1}xa) \cdot (a^{-1}y^{-1}a); \quad (3.4)$$

$$\mathcal{R}_{a'_2} = w_1 \cdot (xab); \quad (3.5)$$

$$\mathcal{R}_{a''_2} = w_2 \cdot (b^{-1}a^{-1}y^{-1}); \quad (3.6)$$

$$\mathcal{R}_{a'_3} = \mathcal{R}_{a_3} \cdot (b^{-1}yb) \cdot (b^{-1}x^{-1}b); \quad (3.7)$$

$$\mathcal{R}_{\bar{a}} = (b^{-1}a^{-1}x^{-1}) \cdot (yab). \quad (3.8)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ottiene  $x = y$  da (3.8) e quindi  $y$  può essere rimosso dai generatori di  $\mathcal{E}(D_2)$ ; inoltre, sostituendo  $x$  a  $y$  nelle altre relazioni, da (3.4) e (3.7) segue che  $\mathcal{R}_{a'_1} = \mathcal{R}_{a_1}$  e  $\mathcal{R}_{a'_3} = \mathcal{R}_{a_3}$ .

A questo punto, rimangono le relazioni

$$\mathcal{R}_{a'_2} = w_1 \cdot (xab); \quad (3.9)$$

$$\mathcal{R}_{a''_2} = w_2 \cdot (b^{-1}a^{-1}x^{-1}). \quad (3.10)$$

Da (3.10) si ricava  $x = w_2 \cdot b^{-1}a^{-1}$  e, dunque,  $x$  può essere rimosso dai generatori di  $\mathcal{E}(D_2)$ ; infine, sostituendo quanto appena trovato in (3.9), si ha  $\mathcal{R}_{a'_2} = w_1 \cdot w_2$  che coincide, per definizione, con  $\mathcal{R}_{a_2}$ .

Pertanto,  $\mathcal{E}(D_1)$  e  $\mathcal{E}(D_2)$  sono isomorfi.

- *Mossa  $R_3$ .*

Siano  $c_1, c_2, c_3 \in C(D_1)$  gli incroci del diagramma  $D_1$  utilizzati durante la mossa  $R_3$ , mentre  $c'_1, c'_2, c'_3 \in C(D_2)$  i corrispondenti incroci del diagramma  $D_2$ .

Inoltre, siano  $a_1, a_2, \dots, a_7 \in A(D_1)$  le regioni del diagramma  $D_1$  individuate dagli incroci  $c_1, c_2, c_3$ , e  $a'_1, a'_2, \dots, a'_7 \in A(D_2)$  le corrispondenti regioni del diagramma  $D_2$ . Si veda Figura 3.5.

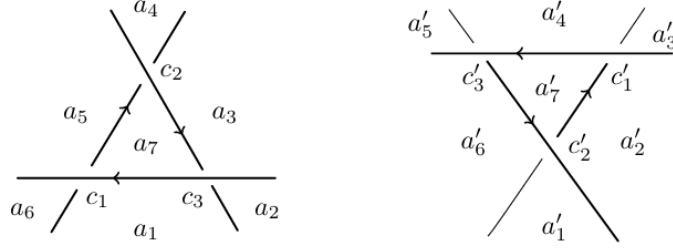


Figura 3.5: Regioni prima (a sinistra) e dopo (a destra) la mossa  $R_3$

Allora si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(D_1) &= \langle \mathcal{G}, x_1, x_2, x_3 \mid \mathcal{R}, \mathcal{R}_{a_1}, \mathcal{R}_{a_2}, \dots, \mathcal{R}_{a_7} \rangle, \\ \mathcal{E}(D_2) &= \langle \mathcal{G}, y_1, y_2, y_3 \mid \mathcal{R}, \mathcal{R}_{a'_1}, \mathcal{R}_{a'_2}, \dots, \mathcal{R}_{a'_7} \rangle,\end{aligned}$$

dove il generatore  $x_i$  corrisponde all'incrocio  $c_i$ , mentre il generatore  $y_i$  corrisponde all'incrocio  $c'_i$  con  $i = 1, 2, 3$ . Tutti gli altri generatori, dati dall'insieme  $\mathcal{G}$ , sono gli stessi poiché corrispondono agli incroci che non sono coinvolti nella mossa  $R_3$ .

Anche l'insieme delle relazioni  $\mathcal{R}$  è lo stesso in quanto corrisponde alle regioni non coinvolte nella mossa  $R_3$ .

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a_1, a_2, \dots, a_7 \in A(D_1)$ , si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{a_1} &= (b^{-1}a^{-1}x_3^{-1}) \cdot (x_1ab) \cdot w_1; \\ \mathcal{R}_{a_2} &= (a^{-1}x_3a) \cdot w_2; \\ \mathcal{R}_{a_3} &= (b^{-1}a^{-1}x_2^{-1}) \cdot (x_3ab) \cdot w_3; \\ \mathcal{R}_{a_4} &= (a^{-1}x_2a) \cdot w_4; \\ \mathcal{R}_{a_5} &= (b^{-1}a^{-1}x_1^{-1}) \cdot (x_2ab) \cdot w_5; \\ \mathcal{R}_{a_6} &= (a^{-1}x_1^{-1}a) \cdot w_6; \\ \mathcal{R}_{a_7} &= (b^{-1}x_1b) \cdot (b^{-1}x_3^{-1}b) \cdot (b^{-1}x_2^{-1}b).\end{aligned}$$

Dove ciascun  $w_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  è una parola costituita dagli elementi dell'insieme  $\mathcal{G}$ , data dalla concatenazione delle parole associate agli altri incroci non coinvolti nella mossa  $R_3$  che costituiscono il bordo della regione  $a_i$  (e di  $a'_i$ ).

Invece, le relazioni associate alle regioni  $a'_1, a'_2, \dots, a'_7 \in A(D_2)$  sono

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{a'_1} &= (b^{-1}y_2^{-1}b) \cdot w_1; \\
\mathcal{R}_{a'_2} &= (y_1ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}y_2^{-1}) \cdot w_2; \\
\mathcal{R}_{a'_3} &= (b^{-1}y_1b) \cdot w_3; \\
\mathcal{R}_{a'_4} &= (y_3ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}y_1^{-1}) \cdot w_4; \\
\mathcal{R}_{a'_5} &= (b^{-1}y_3^{-1}b) \cdot w_5; \\
\mathcal{R}_{a'_6} &= (y_2ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}y_3^{-1}) \cdot w_6; \\
\mathcal{R}_{a'_7} &= (a^{-1}y_2a) \cdot (a^{-1}y_1^{-1}a) \cdot (a^{-1}y_3a).
\end{aligned}$$

Occorre dimostrare che  $y_1, y_2, y_3$  possono essere ricavati dai generatori di  $\mathcal{E}(D_1)$  e che ciascuna relazione  $\mathcal{R}_{a'_i}$ , dopo aver sostituito a  $y_1, y_2, y_3$  un'opportuna combinazione dei generatori di  $\mathcal{E}(D_1)$ , coincide con la corrispondente relazione  $\mathcal{R}_{a_i}$ , e viceversa.

Innanzitutto, si osserva che dalla relazione  $\mathcal{R}_{a_7}$  si ricava

$$x_1 = x_2x_3; \quad (3.11)$$

mentre dalla relazione  $\mathcal{R}_{a'_7}$  si ricava

$$y_1 = y_3y_2. \quad (3.12)$$

Per prima cosa, facciamo vedere che  $\mathcal{E}(D_2)$  può essere ottenuto da  $\mathcal{E}(D_1)$  sostituendo nelle relazioni  $\mathcal{R}_{a'_i}$  le seguenti equazioni

$$y_1 = a^{-1}x_2^{-1}x_3a; \quad (3.13)$$

$$y_2 = a^{-1}x_1^{-1}x_3a; \quad (3.14)$$

$$y_3 = a^{-1}x_2^{-1}x_1a. \quad (3.15)$$

Dopo aver sostituito (3.13), (3.14) e (3.15) nelle relazioni  $\mathcal{R}_{a'_i}$  e aver semplificato ove possibile, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{a'_1} &= b^{-1}a^{-1}x_3^{-1}x_1ab \cdot w_1; \\
\mathcal{R}_{a'_2} &= a^{-1}x_2^{-1}x_1a \cdot w_2; \\
\mathcal{R}_{a'_3} &= b^{-1}a^{-1}x_2^{-1}x_3ab \cdot w_3; \\
\mathcal{R}_{a'_4} &= a^{-1}x_2^{-1}x_1x_3^{-1}x_2a \cdot w_4; \\
\mathcal{R}_{a'_5} &= b^{-1}a^{-1}x_1^{-1}x_2ab \cdot w_5; \\
\mathcal{R}_{a'_6} &= a^{-1}x_1^{-1}x_3x_1^{-1}x_2a \cdot w_6; \\
\mathcal{R}_{a'_7} &= 1.
\end{aligned}$$

Le relazioni  $\mathcal{R}_{a'_1}$ ,  $\mathcal{R}_{a'_3}$  e  $\mathcal{R}_{a'_5}$  coincidono già con le rispettive relazioni  $\mathcal{R}_{a_i}$ ; mentre nelle relazioni  $\mathcal{R}_{a'_2}$ ,  $\mathcal{R}_{a'_4}$  e  $\mathcal{R}_{a'_6}$  è necessario utilizzare la (3.11), infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{a'_2} &= a^{-1}x_2^{-1}x_2x_3a \cdot w_2 = a^{-1}x_3a \cdot w_2; \\ \mathcal{R}_{a'_4} &= a^{-1}x_2^{-1}x_2x_3x_3^{-1}x_2a \cdot w_4 = a^{-1}x_2a \cdot w_4; \\ \mathcal{R}_{a'_6} &= a^{-1}x_3^{-1}x_2^{-1}x_3x_3^{-1}x_2^{-1}x_2a \cdot w_6 = a^{-1}x_1^{-1}a \cdot w_6.\end{aligned}$$

Infine, per quanto riguarda la relazione  $\mathcal{R}_{a'_7}$ , essa coincide con  $\mathcal{R}_{a_7}$  poiché utilizzando la (3.11) in quest'ultima si ha

$$\mathcal{R}_{a_7} = (b^{-1}x_2x_3b) \cdot (b^{-1}x_3^{-1}b) \cdot (b^{-1}x_2^{-1}b) = 1.$$

Mostriamo che vale anche il viceversa.

A partire dalle equazioni (3.13)-(3.15) ricaviamo i generatori  $x_1, x_2, x_3$  in funzione di  $y_1, y_2, y_3$

$$x_1 = ay_3y_2^{-1}a^{-1}; \quad (3.16)$$

$$x_2 = ay_3y_1^{-1}a^{-1}; \quad (3.17)$$

$$x_3 = ay_1y_2^{-1}a^{-1}. \quad (3.18)$$

Facciamo vedere che  $\mathcal{E}(D_1)$  può essere ottenuto da  $\mathcal{E}(D_2)$  sostituendo le equazioni (3.16)-(3.18) nelle relazioni  $\mathcal{R}_{a_i}$ .

Dopo aver sostituito (3.16), (3.17) e (3.18) nelle relazioni  $\mathcal{R}_{a_i}$  e aver semplificato ove possibile, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{a_1} &= b^{-1}y_2y_1^{-1}y_3y_2^{-1}b \cdot w_1; \\ \mathcal{R}_{a_2} &= y_1y_2^{-1} \cdot w_2; \\ \mathcal{R}_{a_3} &= b^{-1}y_1y_3^{-1}y_1y_2^{-1}b \cdot w_3; \\ \mathcal{R}_{a_4} &= y_3y_1^{-1} \cdot w_4; \\ \mathcal{R}_{a_5} &= b^{-1}y_2y_1^{-1}b \cdot w_5; \\ \mathcal{R}_{a_6} &= y_2y_3^{-1} \cdot w_6; \\ \mathcal{R}_{a_7} &= 1.\end{aligned}$$

Le relazioni  $\mathcal{R}_{a_2}$ ,  $\mathcal{R}_{a_4}$  e  $\mathcal{R}_{a_6}$  coincidono già con le rispettive relazioni  $\mathcal{R}_{a'_i}$ ; mentre nelle relazioni  $\mathcal{R}_{a_1}$ ,  $\mathcal{R}_{a_3}$  e  $\mathcal{R}_{a_5}$  è necessario utilizzare la (3.12), infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{a_1} &= b^{-1}y_2y_2^{-1}y_3^{-1}y_3y_2^{-1}b \cdot w_1 = b^{-1}y_2^{-1}b \cdot w_1; \\ \mathcal{R}_{a_3} &= b^{-1}y_3y_2y_3^{-1}y_3y_2y_2^{-1}b \cdot w_3 = b^{-1}y_1b \cdot w_3; \\ \mathcal{R}_{a_5} &= b^{-1}y_2y_2^{-1}y_3^{-1}b \cdot w_5 = b^{-1}y_3^{-1}b \cdot w_5.\end{aligned}$$

Infine, per quanto riguarda la relazione  $\mathcal{R}_{a_7}$ , essa coincide con  $\mathcal{R}_{a'_7}$  poiché utilizzando la (3.12) in quest'ultima si ha

$$\mathcal{R}_{a'_7} = (a^{-1}y_2a) \cdot (a^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}a) \cdot (a^{-1}y_3a) = 1.$$

Pertanto, la presentazione di  $\mathcal{E}(D_2)$  si ottiene dalla presentazione di  $\mathcal{E}(D_1)$  utilizzando (3.13)-(3.15), mentre la presentazione di  $\mathcal{E}(D_1)$  si ottiene dalla presentazione di  $\mathcal{E}(D_2)$  utilizzando (3.16)-(3.18), e questo prova che i due gruppi sono isomorfi.

□

Dopo aver dimostrato il precedente risultato, si può procedere con la definizione di gruppo elettrico.

**Definizione 3.1.2. (gruppo elettrico)** Sia  $L$  un link non spezzato e orientato in  $S^2$ . Si definisce *gruppo elettrico* di  $L$ , e si indica con  $\mathcal{E}(L)$ , il gruppo  $\mathcal{E}(D)$  per un qualsiasi diagramma  $D$  di  $L$ .

**Definizione 3.1.3. (gruppo elettrico ridotto)** Si chiama *gruppo elettrico ridotto* di  $L$ , e si indica con  $\mathcal{E}_r(L)$ , il gruppo definito nello stesso modo di  $\mathcal{E}(L)$  ma ponendo i generatori  $a$  e  $b$  banali.

**Proposizione 3.1.4.** Sia  $K$  un nodo orientato, e sia  $K'$  lo stesso nodo ma con orientazione opposta. Allora i gruppi  $\mathcal{E}_r(K)$  e  $\mathcal{E}_r(K')$  sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Siano  $D$  e  $D'$  due diagrammi che rappresentano, rispettivamente,  $K$  e  $K'$  e che differiscono tra loro solo per il verso di percorrenza.



Siano

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r(D) &= \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle; \\ \mathcal{E}_r(D') &= \langle \xi_1, \dots, \xi_n \mid s_1, \dots, s_k \rangle.\end{aligned}$$

Sia  $F$  gruppo libero avente base libera  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Il Teorema 2.1.5. garantisce l'esistenza dell'omomorfismo  $\tilde{\varphi} : F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{E}_r(D')$  tale che  $\tilde{\varphi}(x_i) = \xi_i^{-1} \forall i = 1, \dots, n$  (questa mappa è motivata dal fatto che invertendo l'orientazione del nodo, ciascun generatore  $x_i$  viene sostituito dal suo inverso, come mostrato in Figura 3.6).



Figura 3.6: Omomorfismo che manda ciascun  $x_i$  nel corrispondente  $\xi_i$

A questo punto, in base alla Proposizione 2.2.7., affinché  $\tilde{\varphi}$  induca un omomorfismo  $\varphi$  definito sul quoziente  $\mathcal{E}_r(D)$  è necessario che mandi le relazioni che generano il sottogruppo normale nell'identità; più precisamente, che l'immagine delle relazioni generatrici sia contenuta nella chiusura normale delle relazioni di  $\mathcal{E}_r(D')$ .

$\forall j = 1, \dots, k$  si ha

$$\tilde{\varphi}(r_j(x_1, x_2, \dots, x_n)) = r_j(\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}) = s_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Poiché ciascuna  $s_j$  è una relazione in  $\mathcal{E}_r(D')$  che vale l'identità, anche  $s_j^{-1}$  vale l'identità. Quindi  $\tilde{\varphi}(r_j) = 1$  in  $\mathcal{E}_r(D') \forall j = 1, \dots, k$ . Ne segue che la chiusura normale delle  $r_j$  è mandata nell'identità; pertanto  $\tilde{\varphi}$  passa al quoziente e definisce un omomorfismo  $\varphi : \mathcal{E}_r(D) \rightarrow \mathcal{E}_r(D')$ .

In modo analogo, si definisce  $\tilde{\psi} : F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \rightarrow \mathcal{E}_r(D)$  tale che  $\tilde{\psi}(\xi_i) = x_i^{-1} \forall i = 1, \dots, n$ , e si trova  $\tilde{\psi}(s_j) = 1$  in  $\mathcal{E}_r(D) \forall j = 1, \dots, k$ . Pertanto, in base alla Proposizione 2.2.7.,  $\tilde{\psi}$  induce un omomorfismo  $\psi : \mathcal{E}_r(D') \rightarrow \mathcal{E}_r(D)$ .

Calcolando le immagini dei generatori sotto le composizioni  $\psi \circ \varphi$  e  $\varphi \circ \psi$ , posto  $[x_i]$  la classe del generatore  $x_i$  in  $\mathcal{E}_r(D)$  e  $[\xi_i]$  quella di  $\xi_i$  in  $\mathcal{E}_r(D')$ , si ha

$$(\psi \circ \varphi)([x_i]) = \psi(\varphi([x_i])) = \psi([\xi_i^{-1}]) = [\psi(\xi_i)]^{-1} = [x_i^{-1}]^{-1} = [x_i];$$

e

$$(\varphi \circ \psi)([\xi_i]) = \varphi(\psi([\xi_i])) = \varphi([x_i^{-1}]) = [\varphi(x_i)]^{-1} = [\xi_i^{-1}]^{-1} = [\xi_i].$$

Poiché le composizioni fissano i generatori, fissano tutto il gruppo; dunque,  $\varphi$  è un isomorfismo tra  $\mathcal{E}_r(D)$  e  $\mathcal{E}_r(D')$  con inversa  $\psi$ . □

## 3.2 Esempi

Di seguito alcuni esempi di calcolo di gruppi elettrici.

- *Nodo banale*

Sia  $K$  il nodo banale, in cui è stato fissato un verso di percorrenza, e  $D$  un suo diagramma. Poniamo  $C(D) = \{c\}$  e  $A(D) = \{a_1, a_2, a_3\}$ . Si veda Figura 3.7<sup>2</sup>.

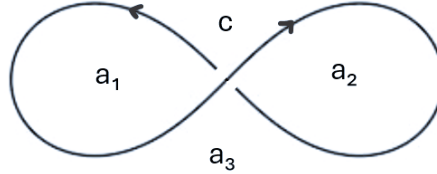


Figura 3.7: Diagramma del nodo banale

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a_1, a_2, a_3 \in A(D)$ , si ha

$$\mathcal{R}_{a_1} = a^{-1}x^{-1}a; \tag{3.19}$$

$$\mathcal{R}_{a_2} = b^{-1}xb; \tag{3.20}$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = (b^{-1}a^{-1}x^{-1}) \cdot (xab). \tag{3.21}$$

---

<sup>2</sup>Si è scelto di usare questo diagramma del nodo banale, invece di quello in Figura 1.1, in modo da avere così un incrocio.

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x = 1$  da (3.19) e (3.20), e quindi il generatore  $x$  può essere rimosso; mentre la (3.21) fornisce, banalmente, l'identità.

Pertanto, il gruppo elettrico del nodo banale è

$$\mathcal{E}(K) = \langle a, b \mid \quad \rangle.$$

Invece, se si considera il suo gruppo elettrico ridotto si ha

$$\mathcal{E}_r(K) = \langle \quad \mid \quad \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

- *Nodo trifoglio sinistro*

Sia  $K$  il nodo trifoglio sinistro, in cui è stato fissato un verso di percorrenza, e  $D$  un suo diagramma. Poniamo  $C(D) = \{c_1, c_2, c_3\}$  e  $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ . Si veda Figura 3.8.

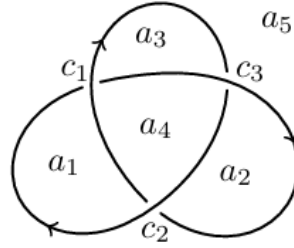


Figura 3.8: Diagramma del nodo trifoglio sinistro

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a_1, a_2, \dots, a_5 \in A(D)$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{a_1} &= (x_1 a b) \cdot (b^{-1} a^{-1} x_2^{-1}); \\ \mathcal{R}_{a_2} &= (x_2 a b) \cdot (b^{-1} a^{-1} x_3^{-1}); \\ \mathcal{R}_{a_3} &= (x_3 a b) \cdot (b^{-1} a^{-1} x_1^{-1}); \\ \mathcal{R}_{a_4} &= (b^{-1} x_1 b) \cdot (b^{-1} x_2 b) \cdot (b^{-1} x_3 b); \\ \mathcal{R}_{a_5} &= (a^{-1} x_1^{-1} a) \cdot (a^{-1} x_3^{-1} a) \cdot (a^{-1} x_2^{-1} a). \end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene

$$\mathcal{R}_{a_1} = x_1 x_2^{-1}; \quad (3.22)$$

$$\mathcal{R}_{a_2} = x_2 x_3^{-1}; \quad (3.23)$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = x_3 x_1^{-1}; \quad (3.24)$$

$$\mathcal{R}_{a_4} = b^{-1} x_1 x_2 x_3 b; \quad (3.25)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = a^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1} a. \quad (3.26)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x_1 = x_2 = x_3$  da (3.22), (3.23) e (3.24), e quindi i generatori  $x_1, x_2, x_3$  possono essere ridotti a uno soltanto che indichiamo, per semplicità, con  $x$ ; inoltre, sostituendo quanto appena trovato nelle relazioni (3.25) e (3.26), si ottiene  $x^3 = 1$ .

Pertanto, il gruppo elettrico del trifoglio sinistro è

$$\mathcal{E}(K) = \langle a, b, x \mid x^3 = 1 \rangle.$$

Invece, se si considera il suo gruppo elettrico ridotto si ha

$$\mathcal{E}_r(K) = \langle x \mid x^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_3.$$

- *Nodo a otto*

Sia  $K$  il nodo a otto, in cui è stato fissato un verso di percorrenza, e  $D$  un suo diagramma. Poniamo  $C(D) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  e  $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ . Si veda Figura 3.9.

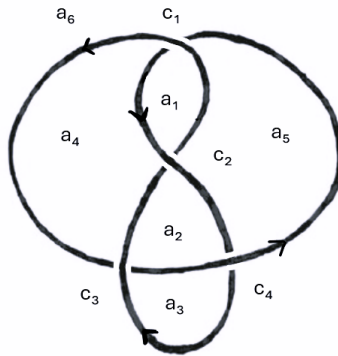


Figura 3.9: Diagramma del nodo a otto

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a_1, a_2, \dots, a_6 \in A(D)$ , si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{a_1} &= (a^{-1}x_1a) \cdot (a^{-1}x_2a); \\
\mathcal{R}_{a_2} &= (b^{-1}x_2^{-1}b) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_3^{-1}) \cdot (x_4ab); \\
\mathcal{R}_{a_3} &= (b^{-1}x_3b) \cdot (b^{-1}x_4b); \\
\mathcal{R}_{a_4} &= (b^{-1}a^{-1}x_1^{-1}) \cdot (a^{-1}x_3^{-1}a) \cdot (x_2ab); \\
\mathcal{R}_{a_5} &= (x_1ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_2^{-1}) \cdot (a^{-1}x_4^{-1}a); \\
\mathcal{R}_{a_6} &= (b^{-1}x_1^{-1}b) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_4^{-1}) \cdot (x_3ab).
\end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene

$$\mathcal{R}_{a_1} = a^{-1}x_1x_2a; \quad (3.27)$$

$$\mathcal{R}_{a_2} = b^{-1}x_2^{-1}a^{-1}x_3^{-1}x_4ab; \quad (3.28)$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = b^{-1}x_3x_4b; \quad (3.29)$$

$$\mathcal{R}_{a_4} = b^{-1}a^{-1}x_1^{-1}a^{-1}x_3^{-1}ax_2ab; \quad (3.30)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = x_1x_2^{-1}a^{-1}x_4^{-1}a; \quad (3.31)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = b^{-1}x_1^{-1}a^{-1}x_4^{-1}x_3ab. \quad (3.32)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x_2 = x_1^{-1}$  da (3.27) e  $x_4 = x_3^{-1}$  da (3.29), quindi i generatori  $x_2, x_4$  possono essere rimossi; inoltre, sostituendo quanto appena trovato nelle altre relazioni, si ha

$$\mathcal{R}_{a_2} = b^{-1}x_1a^{-1}x_3^{-2}ab; \quad (3.33)$$

$$\mathcal{R}_{a_4} = b^{-1}a^{-1}x_1^{-1}a^{-1}x_3^{-1}ax_1^{-1}ab; \quad (3.34)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = x_1^2a^{-1}x_3a; \quad (3.35)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = b^{-1}x_1^{-1}a^{-1}x_3^2ab. \quad (3.36)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x_1 = a^{-1}x_3^2a$  da (3.33), quindi il generatore  $x_1$  può essere rimosso; sostituendo quanto appena trovato nelle altre relazioni, si trova

$$\mathcal{R}_{a_4} = b^{-1}a^{-1}(a^{-1}x_3^{-2}a)a^{-1}x_3^{-1}a(a^{-1}x_3^{-2}a)ab; \quad (3.37)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = (a^{-1}x_3^2a)(a^{-1}x_3^2a)a^{-1}x_3a; \quad (3.38)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = b^{-1}(a^{-1}x_3^{-2}a)a^{-1}x_3^2ab. \quad (3.39)$$

Semplificando, ove possibile, e uguagliando le relazioni a 1, si ottiene  $x_3^5 = 1$  da (3.37); mentre le restanti relazioni, dopo aver sostituito l'ultima informazione trovata, forniscono banalmente l'identità.

Pertanto, ponendo  $x_3 = x$  per semplicità, il gruppo elettrico del nodo a otto è

$$\mathcal{E}(K) = \langle a, b, x \mid x^5 = 1 \rangle.$$

Invece, se si considera il suo gruppo elettrico ridotto si ha

$$\mathcal{E}_r(K) = \langle x \mid x^5 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_5.$$

- *Link di Whitehead*

Sia  $L$  il link di Whitehead, in cui è stato fissato un verso di percorrenza, e  $D$  un suo diagramma. Poniamo  $C(D) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$  e  $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ . Si veda Figura 3.10.

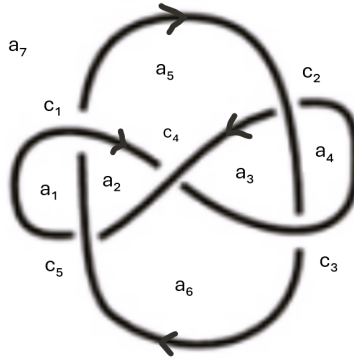


Figura 3.10: Diagramma del link di Whitehead

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a_1, a_2, \dots, a_7 \in A(D)$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{a_1} &= (x_1 ab) \cdot (b^{-1} a^{-1} x_5^{-1}); \\ \mathcal{R}_{a_2} &= (b^{-1} x_1^{-1} b) \cdot (b^{-1} x_5^{-1} b) \cdot (b^{-1} x_4^{-1} b); \\ \mathcal{R}_{a_3} &= (a^{-1} x_4 a) \cdot (x_3 ab) \cdot (b^{-1} a^{-1} x_2^{-1}); \\ \mathcal{R}_{a_4} &= (a^{-1} x_2^{-1} a) \cdot (a^{-1} x_3^{-1} a); \\ \mathcal{R}_{a_5} &= (b^{-1} a^{-1} x_1^{-1}) \cdot (x_4 ab) \cdot (b^{-1} x_2 b); \\ \mathcal{R}_{a_6} &= (x_5 ab) \cdot (b^{-1} x_3 b) \cdot (b^{-1} a^{-1} x_4^{-1}); \\ \mathcal{R}_{a_7} &= (a^{-1} x_1 a) \cdot (x_2 ab) \cdot (b^{-1} a^{-1} x_3^{-1}) \cdot (a^{-1} x_5 a). \end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene

$$\mathcal{R}_{a_1} = x_1 x_5^{-1}; \quad (3.40)$$

$$\mathcal{R}_{a_2} = x_1^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1}; \quad (3.41)$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = a^{-1} x_4 a x_3 x_2^{-1}; \quad (3.42)$$

$$\mathcal{R}_{a_4} = x_2^{-1} x_3^{-1}; \quad (3.43)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = a^{-1} x_1^{-1} x_4 a x_2; \quad (3.44)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = x_5 a x_3 a^{-1} x_4^{-1}; \quad (3.45)$$

$$\mathcal{R}_{a_7} = x_1 a x_2 x_3^{-1} a^{-1} x_5. \quad (3.46)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x_5 = x_1$  da (3.40) e  $x_3 = x_2^{-1}$  da (3.43), quindi i generatori  $x_3, x_5$  possono essere rimossi; inoltre, sostituendo quanto appena trovato nelle altre relazioni, si ha

$$\mathcal{R}_{a_2} = x_1^{-2} x_4^{-1}; \quad (3.47)$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = a^{-1} x_4 a x_2^{-2}; \quad (3.48)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = a^{-1} x_1^{-1} x_4 a x_2; \quad (3.49)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = x_1 a x_2^{-1} a^{-1} x_4^{-1}; \quad (3.50)$$

$$\mathcal{R}_{a_7} = x_1 a x_2^2 a^{-1} x_1. \quad (3.51)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x_4 = x_1^{-2}$  da (3.47), quindi il generatore  $x_4$  può essere rimosso; sostituendo quanto appena trovato nelle altre relazioni, si trova

$$\mathcal{R}_{a_3} = a^{-1} x_1^{-2} a x_2^{-2}; \quad (3.52)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = a^{-1} x_1^{-3} a x_2; \quad (3.53)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = x_1 a x_2^{-1} a^{-1} x_1^2; \quad (3.54)$$

$$\mathcal{R}_{a_7} = x_1 a x_2^2 a^{-1} x_1. \quad (3.55)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ottiene  $x_2 = a^{-1} x_1^3 a$  da (3.54), quindi anche il generatore  $x_2$  può essere rimosso. Infine, sostituendo quest'ultima informazione trovata, si ottiene  $x_1^8 = 1$  da (3.52) e (3.55), mentre (3.53) fornisce banalmente l'identità.

Pertanto, ponendo  $x_1 = x$  per semplicità, il gruppo elettrico del link di Whitehead è

$$\mathcal{E}(L) = \langle a, b, x \mid x^8 = 1 \rangle.$$

Invece, se si considera il suo gruppo elettrico ridotto si ha

$$\mathcal{E}_r(L) = \langle x \mid x^8 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_8.$$

- *Anelli di Borromeo*

Sia  $L$  il link degli anelli di Borromeo, in cui è stato fissato un verso di percorrenza, e  $D$  un suo diagramma. Poniamo  $C(D) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$  e  $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ . Si veda Figura 3.11.

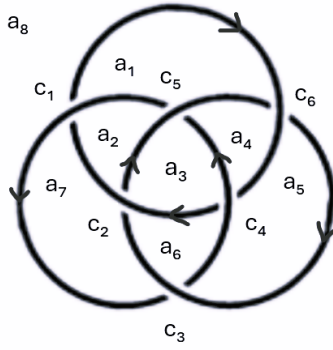


Figura 3.11: Diagramma del link degli anelli di Borromeo

Calcolando le relazioni associate alle regioni  $a_1, a_2, \dots, a_8 \in A(D)$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{a_1} &= (b^{-1}x_1b) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_5^{-1}) \cdot (x_6ab); \\ \mathcal{R}_{a_2} &= (x_1ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_2^{-1}) \cdot (a^{-1}x_5a); \\ \mathcal{R}_{a_3} &= (x_5ab) \cdot (b^{-1}x_2b) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_4^{-1}); \\ \mathcal{R}_{a_4} &= (b^{-1}x_5^{-1}b) \cdot (b^{-1}x_4^{-1}b) \cdot (b^{-1}x_6^{-1}b); \\ \mathcal{R}_{a_5} &= (b^{-1}a^{-1}x_6^{-1}) \cdot (x_4ab) \cdot (b^{-1}x_3b); \\ \mathcal{R}_{a_6} &= (x_2ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_3^{-1}) \cdot (a^{-1}x_4a); \\ \mathcal{R}_{a_7} &= (a^{-1}x_1^{-1}a) \cdot (a^{-1}x_3^{-1}a) \cdot (a^{-1}x_2^{-1}a); \\ \mathcal{R}_{a_8} &= (a^{-1}x_6a) \cdot (x_3ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}x_1^{-1}). \end{aligned}$$



Semplificando, si ottiene

$$\mathcal{R}_{a_1} = x_1 a^{-1} x_5^{-1} x_6 a; \quad (3.56)$$

$$\mathcal{R}_{a_2} = x_1 x_2^{-1} a^{-1} x_5 a; \quad (3.57)$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = x_5 a x_2 a^{-1} x_4^{-1}; \quad (3.58)$$

$$\mathcal{R}_{a_4} = x_5^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1}; \quad (3.59)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = a^{-1} x_6^{-1} x_4 a x_3; \quad (3.60)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = x_2 x_3^{-1} a^{-1} x_4 a; \quad (3.61)$$

$$\mathcal{R}_{a_7} = x_1^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1}; \quad (3.62)$$

$$\mathcal{R}_{a_8} = a^{-1} x_6 a x_3 x_1^{-1}. \quad (3.63)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x_5 = x_4^{-1} x_6^{-1}$  da (3.59) e  $x_1 = x_3^{-1} x_2^{-1}$  da (3.62), quindi i generatori  $x_1, x_5$  possono essere rimossi; inoltre, sostituendo quanto appena trovato nelle altre relazioni, si ha

$$\mathcal{R}_{a_1} = x_3^{-1} x_2^{-1} a^{-1} x_6 x_4 x_6 a; \quad (3.64)$$

$$\mathcal{R}_{a_2} = x_3^{-1} x_2^{-2} a^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} a; \quad (3.65)$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = x_4^{-1} x_6^{-1} a x_2 a^{-1} x_4^{-1}; \quad (3.66)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = a^{-1} x_6^{-1} x_4 a x_3; \quad (3.67)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = x_2 x_3^{-1} a^{-1} x_4 a; \quad (3.68)$$

$$\mathcal{R}_{a_8} = a^{-1} x_6 a x_3 x_2 x_3. \quad (3.69)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ricava  $x_3 = x_2^{-1} a^{-1} x_6 x_4 x_6 a$  da (3.64), quindi il generatore  $x_3$  può essere rimosso; sostituendo quanto appena trovato nelle altre relazioni, si trova

$$\mathcal{R}_{a_2} = a^{-1} x_6^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} a x_2^{-1} a^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} a; \quad (3.70)$$

$$\mathcal{R}_{a_3} = x_4^{-1} x_6^{-1} a x_2 a^{-1} x_4^{-1}; \quad (3.71)$$

$$\mathcal{R}_{a_5} = a^{-1} x_6^{-1} x_4 a x_2^{-1} a^{-1} x_6 x_4 x_6 a; \quad (3.72)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = x_2 a^{-1} x_6^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} a x_2 a^{-1} x_4 a; \quad (3.73)$$

$$\mathcal{R}_{a_8} = a^{-1} x_6 a x_2^{-1} a^{-1} x_6 x_4 x_6^2 x_4 x_6 a. \quad (3.74)$$

Uguagliando le relazioni a 1, si ottiene  $x_6 = a x_2 a^{-1} x_4^{-2}$  da (3.71), quindi anche il generatore  $x_6$  può essere rimosso. Infine, dopo aver sostituito quest'ultima informazione trovata, (3.72) fornisce banalmente l'identità, mentre le restanti relazioni diventano

$$\mathcal{R}_{a_2} = a^{-1}x_4^2ax_2^{-1}a^{-1}x_4ax_2^{-2}a^{-1}x_4ax_2^{-1}; \quad (3.75)$$

$$\mathcal{R}_{a_6} = x_2a^{-1}x_4^2ax_2^{-1}a^{-1}x_4^2a; \quad (3.76)$$

$$\mathcal{R}_{a_8} = x_2a^{-1}x_4^{-3}ax_2a^{-1}x_4^{-2}ax_2a^{-1}x_4ax_2a^{-1}x_4^{-2}a. \quad (3.77)$$

Ponendo  $x_2 = x$  e  $x_4 = y$  per semplicità, da (3.76) si ricava

$$axa^{-1}y^{-2}a = y^2ax. \quad (3.78)$$

Sostituendo (3.78) in (3.75) e (3.77) si ha

$$\mathcal{R}_{a_2} = x^{-1}a^{-1}y^{-1}ax^{-2}a^{-1}yax^{-1}; \quad (3.79)$$

$$\mathcal{R}_{a_8} = xa^{-1}y^{-1}ax^2a^{-1}y^3ax. \quad (3.80)$$

Concatenando le relazioni (3.79) e (3.80) si ottiene  $y^2 = 1$ , ovvero  $y^{-1} = y$ . Sostituendo questo risultato in (3.78) si ricava l'identità. A questo punto, tra le relazioni (3.79) e (3.80) è sufficiente considerarne una sola, ad esempio (3.80), poiché l'altra si ottiene direttamente combinandola con la condizione  $y^2 = 1$ , e viceversa. Dopo aver semplificato la relazione (3.80), si ha che il gruppo elettrico del link degli anelli di Borromeo è

$$\mathcal{E}(L) = \langle a, b, x, y \mid y^2 = 1, (xa^{-1}yax)^2 = 1 \rangle.$$

Invece, se si considera il suo gruppo elettrico ridotto si ha

$$\mathcal{E}_r(L) = \langle x, y \mid y^2 = 1, (xyx)^2 = 1 \rangle.$$

### 3.3 Colorazioni

Sia  $L$  un link che non si spezza in sottolink separati e orientato, e sia  $D \subset S^2$  un diagramma di  $L$  (dove in  $S^2$  è stata fissata un'orientazione). Un modo per studiare  $\mathcal{E}(L)$  è considerare colorazioni del diagramma  $D$ .

Definiamo il concetto di colorazione.

Sia  $C(D) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  l'insieme degli incroci del diagramma  $D$ , e  $A(D) = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+2}\}$  l'insieme delle regioni di  $\mathbb{R}^2$  individuate da  $D$ . Inoltre, sia  $G$  un gruppo finito e siano  $\alpha, \beta \in G$  due elementi fissati.

**Definizione 3.3.1. (colorazione)** Un omomorfismo  $\xi : C(D) \rightarrow G$  che associa ad ogni incrocio del diagramma  $D$  un elemento del gruppo  $G$ , viene detto *colorazione* del diagramma  $D$ .

Sia  $a_i \in A(D)$  e sia  $p_i \notin C(D)$  un punto lungo il bordo della regione  $a_i$ . Si costruisce l'elemento  $g_{a_i, p_i} \in G$  nel seguente modo.

- Inizialmente  $g_{a_i, p_i} = e$ , con  $e$  elemento neutro di  $G$ ;
- Partendo da  $p_i$  e procedendo lungo il bordo della regione  $a_i$ , seguendo l'orientazione precedentemente scelta di  $S^2$ , ogni volta che si incontra un incrocio  $c_j \in C(D)$ ,  $g_{a_i, p_i}$  viene moltiplicato per uno dei seguenti elementi:
  - Se  $c_j$  è un incrocio positivo, posto  $\xi(c_j)$  l'elemento di  $G$  che gli è stato associato, allora  $g_{a_i, p_i}$  viene moltiplicato per  $(\xi(c_j)\alpha\beta)$  o  $(\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_j)^{-1})$  o  $(\alpha^{-1}\xi(c_j)\alpha)$  o  $(\beta^{-1}\xi(c_j)^{-1}\beta)$ , a seconda di quale angolo nelle vicinanze dell'incrocio  $c_j$  appartiene alla regione  $a_i \in A(D)$ , si veda Figura 3.12 a sinistra;
  - Se  $c_j$  è un incrocio negativo, posto  $\xi(c_j)$  l'elemento di  $G$  che gli è stato associato, allora  $g_{a_i, p_i}$  viene moltiplicato per  $(\xi(c_j)\alpha\beta)$  o  $(\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_j)^{-1})$  o  $(\alpha^{-1}\xi(c_j)^{-1}\alpha)$  o  $(\beta^{-1}\xi(c_j)\beta)$  a seconda di quale angolo nelle vicinanze dell'incrocio  $c_j$  appartiene alla regione  $a_i \in A(D)$ , si veda Figura 3.12 a destra.

**Definizione 3.3.2. (colorazione propria)** Una colorazione  $\xi : C(D) \rightarrow G$  viene detta  $(\alpha, \beta)$ -colorazione propria se  $g_{a_i, p_i} = e$  per ogni regione  $a_i \in A(D)$ . L'insieme delle  $(\alpha, \beta)$ -colorazioni proprie del diagramma  $D$  è indicato con  $Col_{\alpha, \beta}(D)$ .



Figura 3.12: Moltiplicatori dell'elemento  $g_{a_i, p_i}$  corrispondenti all'incrocio  $c_j$  (positivo a sinistra, negativo a destra)

**Proposizione 3.3.3.** *Sia  $L$  un link non spezzato e orientato,  $D \subset S^2$  un suo diagramma e  $G$  un gruppo finito. Il numero di omomorfismi  $h : \mathcal{E}(L) \rightarrow G$  è un numero finito, e costituisce un invariante per il link  $L$ . Inoltre, si ha la seguente formula:*

$$|Hom(\mathcal{E}(L) \rightarrow G)| = \sum_{\alpha, \beta \in G} |Col_{\alpha, \beta}(D)|.$$

*Dimostrazione.* Richiamiamo che, fissato un diagramma  $D$ , il gruppo elettrico  $\mathcal{E}(D)$  ammette la presentazione

$$\mathcal{E}(D) = \langle a, b, x_1, \dots, x_n \mid \mathcal{R}_{a_1}, \dots, \mathcal{R}_{a_{n+2}} \rangle,$$

dove  $a, b$  sono i generatori fissi e  $x_j$  è il generatore associato all'incrocio  $c_j \in C(D) \forall j = 1, \dots, n$ .

Dato  $h \in Hom(\mathcal{E}(D) \rightarrow G)$ , poniamo  $\alpha = h(a)$ ,  $\beta = h(b)$  e  $\xi_h(c_j) = h(x_j) \forall j = 1, \dots, n$ , con  $\xi_h : C(D) \rightarrow G$  colorazione.

Allora per ogni relazione  $\mathcal{R}_{a_i}$  risulta  $h(\mathcal{R}_{a_i}) = 1$ , e ciò equivale a dire che la colorazione  $\xi_h$  è  $(\alpha, \beta)$ -propria.

Abbiamo dunque un'applicazione naturale

$$\Phi : Hom(\mathcal{E}(D) \rightarrow G) \longrightarrow \bigsqcup_{\alpha, \beta \in G} Col_{\alpha, \beta}(D), \quad h \longmapsto (\alpha, \beta, \xi_h).$$

Viceversa, fissata una  $(\alpha, \beta)$ -colorazione propria  $\xi$ , definiamo una mappa sui generatori di  $\mathcal{E}(D)$  ponendo  $a \mapsto \alpha$ ,  $b \mapsto \beta$  e  $x_j \mapsto \xi(c_j)$ . Poiché per ipotesi tutte le relazioni  $\mathcal{R}_{a_i}$  vengono soddisfatte, il Test di sostituzione (Proposizione 2.2.7.) garantisce che questa assegnazione si estende in modo unico ad un omomorfismo  $h_\xi : \mathcal{E}(D) \rightarrow G$ .

Le due applicazioni sono inverse l'una dell'altra, da cui segue la biezione

$$Hom(\mathcal{E}(D) \rightarrow G) \cong \bigsqcup_{\alpha, \beta \in G} Col_{\alpha, \beta}(D).$$

Pertanto

$$|Hom(\mathcal{E}(D) \rightarrow G)| = \sum_{\alpha, \beta \in G} |Col_{\alpha, \beta}(D)|.$$

La finitezza segue dal fatto che  $G$  è finito e  $\mathcal{E}(D)$  ha un numero finito di generatori. Infine, l'isomorfismo  $\mathcal{E}(D) \cong \mathcal{E}(L)$  assicura che il numero  $|Hom(\mathcal{E}(L) \rightarrow G)|$  dipenda solo dal link  $L$  e non dal diagramma scelto, fornendo così un invariante ben definito.  $\square$

*Osservazione 3.3.4.* La definizione di colorazione propria non dipende dal punto  $p_i$  scelto lungo il bordo della regione  $a_i \in A(D)$ ; pertanto, per semplicità, verrà utilizzata la notazione  $g_{a_i}$  al posto di  $g_{a_i, p_i}$ .

**Teorema 3.3.5.** *Sia  $G$  un gruppo finito e  $\alpha, \beta \in G$  due elementi fissati. Siano  $D_1, D_2 \subset S^2$  due diagrammi di un link  $L$  non spezzato e orientato. Allora esiste una biezione naturale tra l'insieme  $Col_{\alpha, \beta}(D_1)$  e l'insieme  $Col_{\alpha, \beta}(D_2)$ .*

*Osservazione 3.3.6.* La biezione è garantita dalla Proposizione 3.3.3. Il Teorema appena enunciato mostra che la biezione è naturale rispetto alle mosse di Reidemester.

*Dimostrazione (Teorema 3.3.5.)* L'idea alla base della dimostrazione è simile a quella utilizzata per dimostrare il teorema 3.1.1. Dimostreremo che  $\forall \xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1) \exists ! \xi' \in Col_{\alpha, \beta}(D_2)$ , dove  $D_2$  è ottenuto da  $D_1$  mediante una delle quattro mosse appartenenti all'insieme minimale di generatori di mosse di Reidemeister riportate in Figura 3.2.

Analizziamole nel dettaglio.

- *Mossa  $R_1^r$ .*

Sia  $a_1 \in A(D_1)$  la regione a sinistra dell'arco del diagramma  $D_1$  e  $a_2 \in A(D_1)$  la regione a destra. Siano  $a'_1, a'_2 \in A(D_2)$  le regioni corrispondenti, rispettivamente a sinistra e a destra, individuate dal diagramma  $D_2$ , e sia  $\bar{a} \in A(D_2)$  la nuova regione venutasi a creare. Si veda Figura 3.13.

Sia  $\xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1)$ , dunque si ha  $g_{a_1} = e, g_{a_2} = e$ .

Sia  $c \in C(D_2)$  il nuovo incrocio venutosi a creare dopo la mossa  $\mathcal{R}_1^r$ .

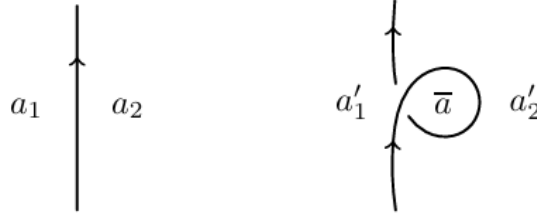


Figura 3.13: Regioni prima (a sinistra) e dopo (a destra) la mossa  $R_1^r$

Considerando una colorazione  $\xi' : C(D_2) \rightarrow G$  si ha

$$\begin{aligned} g_{a'_1} &= g_{a_1} \cdot (\alpha^{-1}\xi'(c)\alpha); \\ g_{a'_2} &= g_{a_2} \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi'(c)) \cdot (\xi'(c)\alpha\beta); \\ g_{\bar{a}} &= \beta^{-1}\xi'(c)^{-1}\beta. \end{aligned}$$

Occorre dimostrare che  $\xi' \in Col_{\alpha,\beta}(D_2)$  ed è unica.

Posto  $\xi'(c) = e$  si ottengono

$$\begin{aligned} g_{a'_1} &= g_{a_1}(= e); \\ g_{a'_2} &= g_{a_2}(= e); \\ g_{\bar{a}} &= e. \end{aligned}$$

Pertanto,  $\xi' \in Col_{\alpha,\beta}(D_2)$  ed è l'unica colorazione propria che estende  $\xi \in Col_{\alpha,\beta}(D_1)$ , poiché  $g_{\bar{a}} = e \iff \xi'(c) = e$ .

- *Mossa  $R_1^l$ .*

Si ragiona in maniera del tutto analoga alla mossa  $R_1^r$ .

- *Mossa  $R_2$ .*

Siano  $a_1, a_2, a_3 \in A(D_1)$  le regioni a sinistra, al centro e a destra del diagramma  $D_1$ . Siano, invece,  $a'_1, a'_2, a''_2, a'_3 \in A(D_2)$  le regioni corrispondenti individuate dal diagramma  $D_2$ , dove la regione  $a_2$  è stata divisa in  $a'_2, a''_2$ , e sia  $\bar{a} \in A(D_2)$  la nuova regione venutasi a formare. Si veda Figura 3.14.

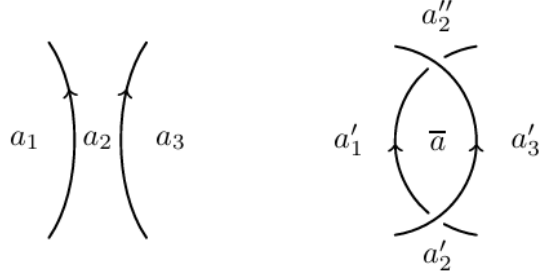


Figura 3.14: Regioni prima (a sinistra) e dopo (a destra) la mossa  $R_2$

Siano, inoltre,  $g_1, g_2$  due elementi di  $G$  tali che  $g_{a_2} = g_1 \cdot g_2$ , dove  $g_1$  corrisponde alla parte inferiore della regione  $a_2$ , e  $g_2$  alla parte superiore.

Sia  $\xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1)$ , dunque si ha

$$\begin{aligned} g_{a_1} &= e; \\ g_{a_2} &= g_1 \cdot g_2 = e; \\ g_{a_3} &= e. \end{aligned}$$

Siano  $c_1, c_2 \in C(D)$  i due nuovi incroci venuti a crearsi dopo la mossa  $\mathcal{R}_2$ ; nello specifico,  $c_1$  è l'incrocio positivo, mentre  $c_2$  l'incrocio negativo.

Considerando una colorazione  $\xi' : C(D_2) \rightarrow G$  si ha

$$g_{a'_1} = g_{a_1} \cdot (\alpha^{-1} \xi'(c_1) \alpha) \cdot (\alpha^{-1} \xi'(c_2)^{-1} \alpha); \quad (3.81)$$

$$g_{a'_2} = g_1 \cdot (\xi'(c_1) \alpha \beta); \quad (3.82)$$

$$g_{a''_2} = g_2 \cdot (\beta^{-1} \alpha^{-1} \xi'(c_2)^{-1}); \quad (3.83)$$

$$g_{a'_3} = g_{a_3} \cdot (\beta^{-1} \xi'(c_2) \beta) \cdot (\beta^{-1} \xi'(c_1)^{-1} \beta); \quad (3.84)$$

$$g_{\bar{a}} = (\beta^{-1} \alpha^{-1} \xi'(c_1)^{-1}) \cdot (\xi'(c_2) \alpha \beta). \quad (3.85)$$

Occorre dimostrare che  $\xi' \in Col_{\alpha, \beta}(D_2)$  ed è unica.

Affinché  $g_{\bar{a}} = e$  deve valere  $\xi'(c_1) = \xi'(c_2)$ ; sostituendo  $\xi'(c_1)$  a  $\xi'(c_2)$  nelle altre relazioni, da (3.81) e (3.84) segue che  $g_{a'_1} = g_{a_1} (= e)$  e  $g_{a'_3} = g_{a_3} (= e)$ .

A questo punto, rimangono

$$g_{a'_2} = g_1 \cdot (\xi'(c_1)\alpha\beta); \quad (3.86)$$

$$g_{a''_2} = g_2 \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi'(c_1)^{-1}). \quad (3.87)$$

Imponendo  $g_{a''_2} = e$  si ricava  $\xi'(c_1) = g_2 \cdot \beta^{-1}\alpha^{-1}$ ; sostituendo quanto appena trovato in (3.86), si ha  $g_{a'_2} = g_1 \cdot g_2$  che coincide, per definizione, con  $g_{a_2}(= e)$ .

Pertanto, ponendo  $\xi'(c_1) = \xi'(c_2) = g_2 \cdot \beta^{-1}\alpha^{-1}$ , si ha  $\xi' \in Col_{\alpha,\beta}(D_2)$  ed è l'unica colorazione propria che estende  $\xi \in Col_{\alpha,\beta}(D_1)$ , poiché  $\alpha, \beta$  e  $g_2$  sono fissati.

- *Mossa  $R_3$ .*

Siano  $c_1, c_2, c_3 \in C(D_1)$  gli incroci del diagramma  $D_1$  utilizzati durante la mossa  $R_3$ , mentre  $c'_1, c'_2, c'_3 \in C(D_2)$  i corrispondenti incroci del diagramma  $D_2$ .

Inoltre, siano  $a_1, a_2, \dots, a_7 \in A(D_1)$  le regioni del diagramma  $D_1$  individuate dagli incroci  $c_1, c_2, c_3$ , e  $a'_1, a'_2, \dots, a'_7 \in A(D_2)$  le corrispondenti regioni del diagramma  $D_2$ . Si veda Figura 3.15.

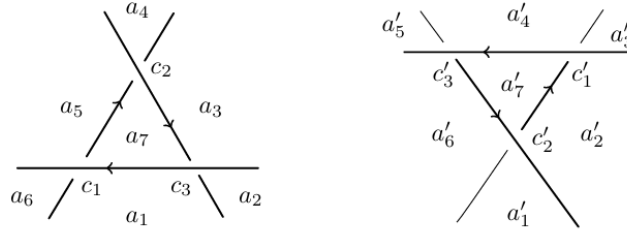


Figura 3.15: Regioni prima (a sinistra) e dopo (a destra) la mossa  $R_3$

Sia  $\xi \in Col_{\alpha,\beta}(D_1)$ , dunque si ha

$$g_{a_1} = (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}) \cdot (\xi(c_1)\alpha\beta) \cdot g_1 = e;$$

$$g_{a_2} = (\alpha^{-1}\xi(c_3)\alpha) \cdot g_2 = e;$$

$$g_{a_3} = (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_2)^{-1}) \cdot (\xi(c_3)\alpha\beta) \cdot g_3 = e;$$



$$\begin{aligned}
g_{a_4} &= (\alpha^{-1}\xi(c_2)\alpha) \cdot g_4 = e; \\
g_{a_5} &= (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}) \cdot (\xi(c_2)\alpha\beta) \cdot g_5 = e; \\
g_{a_6} &= (\alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}\alpha) \cdot g_6 = e; \\
g_{a_7} &= (\beta^{-1}\xi(c_1)\beta) \cdot (\beta^{-1}\xi(c_3)^{-1}\beta) \cdot (\beta^{-1}\xi(c_2)^{-1}\beta) = e.
\end{aligned}$$

Dove ciascun  $g_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  è un elemento di  $G$ , dato dalla moltiplicazione dei valori associati agli altri incroci non coinvolti nella mossa  $R_3$  che costituiscono il bordo della regione  $a_i$  (e di  $a'_i$ ).

Invece, considerando  $\xi' \in Col_{\alpha,\beta}(D_2)$  si ha

$$\begin{aligned}
g_{a'_1} &= (\beta^{-1}\xi'(c'_2)^{-1}\beta) \cdot g_1 = e; \\
g_{a'_2} &= (\xi'(c'_1)\alpha\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi'(c'_2)^{-1}) \cdot g_2 = e; \\
g_{a'_3} &= (\beta^{-1}\xi'(c'_1)\beta) \cdot g_3 = e; \\
g_{a'_4} &= (\xi'(c'_3)\alpha\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi'(c'_1)^{-1}) \cdot g_4 = e; \\
g_{a'_5} &= (\beta^{-1}\xi'(c'_3)^{-1}\beta) \cdot g_5 = e; \\
g_{a'_6} &= (\xi'(c'_2)\alpha\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi'(c'_3)^{-1}) \cdot g_6 = e; \\
g_{a'_7} &= (\alpha^{-1}\xi'(c'_2)\alpha) \cdot (\alpha^{-1}\xi'(c'_1)^{-1}\alpha) \cdot (\alpha^{-1}\xi'(c'_3)\alpha) = e.
\end{aligned}$$

Occorre dimostrare che ciascun valore  $g_{a'_i}$ , dopo aver sostituito a  $\xi'(c'_1), \xi'(c'_2), \xi'(c'_3)$  un'opportuna combinazione dei valori  $\xi(c_1), \xi(c_2), \xi(c_3)$ , coincide con il corrispondente valore  $g_{a_i}$ , e viceversa.

D'ora in avanti, per comodità, poniamo  $s_i = \xi(c_i)$  con  $i = 1, 2, 3$ ; mentre  $t_i = \xi'(c'_i)$  con  $i = 1, 2, 3$ .

Innanzitutto, si osserva che dal valore  $g_{a_7}$  si ricava

$$s_1 = s_2 s_3; \tag{3.88}$$

mentre dal valore  $g_{a'_7}$  si ricava

$$t_1 = t_3 t_2. \tag{3.89}$$

Per prima cosa, facciamo vedere che  $\xi' \in Col_{\alpha,\beta}(D_2)$  può essere ottenuta da  $\xi \in Col_{\alpha,\beta}(D_1)$  sostituendo nei valori  $g_{a'_i}$  le seguenti equazioni.

$$t_1 = \alpha^{-1} s_2^{-1} s_3 \alpha; \quad (3.90)$$

$$t_2 = \alpha^{-1} s_1^{-1} s_3 \alpha; \quad (3.91)$$

$$t_3 = \alpha^{-1} s_2^{-1} s_1 \alpha. \quad (3.92)$$

Dopo aver sostituito (3.90), (3.91) e (3.92) nei  $g_{a'_i}$  e aver semplificato ove possibile, si ha

$$g_{a'_1} = \beta^{-1} \alpha^{-1} s_3^{-1} s_1 \alpha \beta \cdot g_1;$$

$$g_{a'_2} = \alpha^{-1} s_2^{-1} s_1 \alpha \cdot g_2;$$

$$g_{a'_3} = \beta^{-1} \alpha^{-1} s_2^{-1} s_3 \alpha \beta \cdot g_3;$$

$$g_{a'_4} = \alpha^{-1} s_2^{-1} s_1 s_3^{-1} s_2 \alpha \cdot g_4;$$

$$g_{a'_5} = \beta^{-1} \alpha^{-1} s_1^{-1} s_2 \alpha \beta \cdot g_5;$$

$$g_{a'_6} = \alpha^{-1} s_1^{-1} s_3 s_1^{-1} s_2 \alpha \cdot g_6;$$

$$g_{a'_7} = e.$$

I valori  $g_{a'_1}$ ,  $g_{a'_3}$  e  $g_{a'_5}$  coincidono già con i rispettivi valori  $g_{a_i}$ ; mentre in  $g_{a'_2}$ ,  $g_{a'_4}$  e  $g_{a'_6}$  è necessario utilizzare la (3.88), infatti

$$g_{a'_2} = \alpha^{-1} s_2^{-1} s_2 s_3 \alpha \cdot g_2 = \alpha^{-1} s_3 \alpha \cdot g_2;$$

$$g_{a'_4} = \alpha^{-1} s_2^{-1} s_2 s_3 s_3^{-1} s_2 \alpha \cdot g_4 = \alpha^{-1} s_2 \alpha \cdot g_4;$$

$$g_{a'_6} = \alpha^{-1} s_3^{-1} s_2^{-1} s_3 s_3^{-1} s_2^{-1} s_2 \alpha \cdot g_6 = \alpha^{-1} s_1^{-1} \alpha \cdot g_6.$$

Mostriamo che vale anche il viceversa.

A partire dalle equazioni (3.90)-(3.92) ricaviamo i valori  $s_1, s_2, s_3$  in funzione di  $t_1, t_2, t_3$

$$s_1 = \alpha t_3 t_2^{-1} \alpha^{-1}; \quad (3.93)$$

$$s_2 = \alpha t_3 t_1^{-1} \alpha^{-1}; \quad (3.94)$$

$$s_3 = \alpha t_1 t_2^{-1} \alpha^{-1}. \quad (3.95)$$

Facciamo vedere che  $\xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1)$  può essere ottenuta da  $\xi' \in Col_{\alpha, \beta}(D_2)$  sostituendo le equazioni (3.93)-(3.95) nei valori  $g_{a_i}$ .

Dopo aver sostituito (3.93), (3.94) e (3.95) nei valori  $g_{a_i}$  e aver semplificato ove possibile si ha

$$\begin{aligned}
g_{a_1} &= \beta^{-1} t_2 t_1^{-1} t_3 t_2^{-1} \beta \cdot g_1; \\
g_{a_2} &= t_1 t_2^{-1} \cdot g_2; \\
g_{a_3} &= \beta^{-1} t_1 t_3^{-1} t_1 t_2^{-1} \beta \cdot g_3; \\
g_{a_4} &= t_3 t_1^{-1} \cdot g_4; \\
g_{a_5} &= \beta^{-1} t_2 t_1^{-1} \beta \cdot g_5; \\
g_{a_6} &= t_2 t_3^{-1} \cdot g_6; \\
g_{a_7} &= e.
\end{aligned}$$

I valori  $g_{a_2}$ ,  $g_{a_4}$  e  $g_{a_6}$  coincidono già con i rispettivi valori  $g_{a'_i}$ ; mentre in  $g_{a_1}$ ,  $g_{a_3}$  e  $g_{a_5}$  è necessario utilizzare la (3.89), infatti

$$\begin{aligned}
g_{a_1} &= \beta^{-1} t_2 t_2^{-1} t_3^{-1} t_3 t_2^{-1} \beta \cdot g_1 = \beta^{-1} t_2^{-1} \beta \cdot g_1; \\
g_{a_3} &= \beta^{-1} t_3 t_2 t_3^{-1} t_3 t_2 t_2^{-1} \beta \cdot g_3 = \beta^{-1} t_1 \beta \cdot g_3; \\
g_{a_5} &= \beta^{-1} t_2 t_2^{-1} t_3^{-1} \beta \cdot g_5 = \beta^{-1} t_3^{-1} \beta \cdot g_5.
\end{aligned}$$

Pertanto,  $\xi' \in Col_{\alpha, \beta}(D_2)$  si ottiene da  $\xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1)$  utilizzando (3.90)-(3.92), mentre  $\xi \in Col_{\alpha, \beta}(D_1)$  si ottiene da  $\xi' \in Col_{\alpha, \beta}(D_2)$  utilizzando (3.93)-(3.95), e questo prova che esiste una biezione tra le due colorazioni proprie.

□

Di seguito le colorazioni proprie del nodo trifoglio sinistro e del nodo a otto, prendendo come gruppo finito  $G = \mathbb{Z}_5$ .

- *Nodo trifoglio sinistro*

Sia  $K$  il nodo trifoglio sinistro, in cui è stato fissato un verso di percorrenza, e  $D$  un suo diagramma. Poniamo  $C(D) = \{c_1, c_2, c_3\}$  e  $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ . Si veda Figura 3.16.

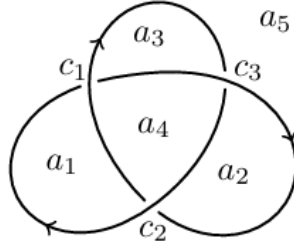


Figura 3.16: Diagramma del nodo trifoglio sinistro

Sia  $\xi : C(D) \rightarrow \mathbb{Z}_5$  una colorazione. Calcolando  $g_{a_i}$  con  $i = 1, 2, \dots, 5$ , si ha

$$\begin{aligned} g_{a_1} &= (\xi(c_1)\alpha\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_2)^{-1}); \\ g_{a_2} &= (\xi(c_2)\alpha\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}); \\ g_{a_3} &= (\xi(c_3)\alpha\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}); \\ g_{a_4} &= (\beta^{-1}\xi(c_1)\beta) \cdot (\beta^{-1}\xi(c_2)\beta) \cdot (\beta^{-1}\xi(c_3)\beta); \\ g_{a_5} &= (\alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}\alpha) \cdot (\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}\alpha) \cdot (\alpha^{-1}\xi(c_2)^{-1}\alpha). \end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene

$$g_{a_1} = \xi(c_1)\xi(c_2)^{-1}; \quad (3.96)$$

$$g_{a_2} = \xi(c_2)\xi(c_3)^{-1}; \quad (3.97)$$

$$g_{a_3} = \xi(c_3)\xi(c_1)^{-1}; \quad (3.98)$$

$$g_{a_4} = \beta^{-1}\xi(c_1)\xi(c_2)\xi(c_3)\beta; \quad (3.99)$$

$$g_{a_5} = \alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}\xi(c_3)^{-1}\xi(c_2)^{-1}\alpha. \quad (3.100)$$

Affinché  $\xi : C(D) \rightarrow \mathbb{Z}_5$  sia una colorazione propria, si deve avere  $g_{a_i} = e (= 0) \forall i = 1, 2, \dots, 5$ .

Uguagliando i valori  $g_{a_i}$  a  $e$ , si ricava  $\xi(c_1) = \xi(c_2) = \xi(c_3)$  da (3.96), (3.97) e (3.98), quindi agli incroci  $c_1, c_2, c_3$  deve essere associato lo stesso elemento di  $\mathbb{Z}_5$ ; inoltre, sostituendo quanto appena trovato in (3.99) e (3.100), si ottiene  $\xi(c_1)^3 = 1$  ( $3 \cdot \xi(c_1) = 0$  in notazione additiva).

Pertanto, fissata una coppia  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ , si ha un'unica colorazione propria con  $\xi(c_1) = \xi(c_2) = \xi(c_3) = 0$ . Così da avere un totale di 25 colorazioni proprie per il trifoglio sinistro.

- *Nodo a otto*

Sia  $K$  il nodo a otto, in cui è stato fissato un verso di percorrenza, e  $D$  un suo diagramma. Poniamo  $C(D) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  e  $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ . Si veda Figura 3.17.

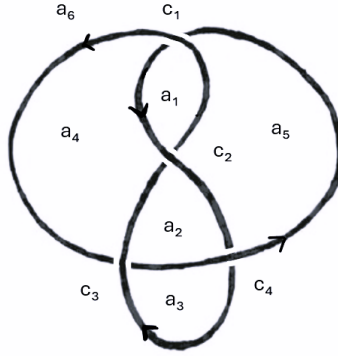


Figura 3.17: Diagramma del nodo a otto

Sia  $\xi : C(D) \rightarrow \mathbb{Z}_5$  una colorazione. Calcolando i valori  $g_{a_i}$  con  $i = 1, 2, \dots, 6$ , si ha

$$\begin{aligned} g_{a_1} &= (\alpha^{-1}\xi(c_1)\alpha) \cdot (\alpha^{-1}\xi(c_2)\alpha); \\ g_{a_2} &= (\beta^{-1}\xi(c_2)^{-1}\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}) \cdot (\xi(c_4)\alpha\beta); \\ g_{a_3} &= (\beta^{-1}\xi(c_3)\beta) \cdot (\beta^{-1}\xi(c_4)\beta); \\ g_{a_4} &= (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}) \cdot (\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}\alpha) \cdot (\xi(c_2)\alpha\beta); \\ g_{a_5} &= (\xi(c_1)\alpha\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_2)^{-1}) \cdot (\alpha^{-1}\xi(c_4)^{-1}\alpha); \\ g_{a_6} &= (\beta^{-1}\xi(c_1)^{-1}\beta) \cdot (\beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_4)^{-1}) \cdot (\xi(c_3)\alpha\beta). \end{aligned}$$

Semplificando, si ottiene

$$g_{a_1} = \alpha^{-1}\xi(c_1)\xi(c_2)\alpha; \quad (3.101)$$

$$g_{a_2} = \beta^{-1}\xi(c_2)^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}\xi(c_4)\alpha\beta; \quad (3.102)$$

$$g_{a_3} = \beta^{-1}\xi(c_3)\xi(c_4)\beta; \quad (3.103)$$

$$g_{a_4} = \beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}\alpha\xi(c_2)\alpha\beta; \quad (3.104)$$

$$g_{a_5} = \xi(c_1)\xi(c_2)^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_4)^{-1}\alpha; \quad (3.105)$$

$$g_{a_6} = \beta^{-1}\xi(c_1)^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_4)^{-1}\xi(c_3)\alpha\beta. \quad (3.106)$$

Affinché  $\xi : C(D) \rightarrow \mathbb{Z}_5$  sia una colorazione propria, si deve avere  $g_{a_i} = e (= 0) \forall i = 1, 2, \dots, 6$ .

Uguagliando i valori  $g_{a_i}$  a  $e$ , si ricava  $\xi(c_2) = \xi(c_1)^{-1}$  da (3.101) e  $\xi(c_4) = \xi(c_3)^{-1}$  da (3.103); inoltre, sostituendo quanto appena trovato nelle altre equazioni, si ha

$$g_{a_2} = \beta^{-1}\xi(c_1)\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-2}\alpha\beta; \quad (3.107)$$

$$g_{a_4} = \beta^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_1)^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}\alpha\xi(c_1)^{-1}\alpha\beta; \quad (3.108)$$

$$g_{a_5} = \xi(c_1)^2\alpha^{-1}\xi(c_3)\alpha; \quad (3.109)$$

$$g_{a_6} = \beta^{-1}\xi(c_1)^{-1}\alpha^{-1}\xi(c_3)^2\alpha\beta. \quad (3.110)$$

Uguagliando, nuovamente, i valori  $g_{a_i}$  a  $e$ , si ricava  $\xi(c_1) = \alpha^{-1}\xi(c_3)^2\alpha$  da (3.107); inoltre, sostituendo quanto appena trovato nelle altre equazioni, si trova

$$g_{a_4} = \beta^{-1}\alpha^{-1}(\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-2}\alpha)\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-1}\alpha(\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-2}\alpha)\alpha\beta; \quad (3.111)$$

$$g_{a_5} = (\alpha^{-1}\xi(c_3)^2\alpha)(\alpha^{-1}\xi(c_3)^2\alpha)\alpha^{-1}\xi(c_3)\alpha; \quad (3.112)$$

$$g_{a_6} = \beta^{-1}(\alpha^{-1}\xi(c_3)^{-2}\alpha)\alpha^{-1}\xi(c_3)^2\alpha\beta. \quad (3.113)$$

Semplificando, ove possibile, e uguagliando i valori a  $e$ , si ottiene da (3.111)  $\xi(c_3)^5 = 1$  ( $5 \cdot \xi(c_3) = 0$  in notazione additiva); mentre le restanti equazioni, dopo aver sostituito l'ultima informazione trovata, forniscono banalmente l'identità.

Pertanto, fissata una coppia  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ , si hanno 5 possibili colorazioni proprie:

1.  $\xi(c_3) = 0, \xi(c_4) = 0, \xi(c_1) = 0, \xi(c_2) = 0$
2.  $\xi(c_3) = 1, \xi(c_4) = 4, \xi(c_1) = 2, \xi(c_2) = 3$
3.  $\xi(c_3) = 2, \xi(c_4) = 3, \xi(c_1) = 4, \xi(c_2) = 1$
4.  $\xi(c_3) = 3, \xi(c_4) = 2, \xi(c_1) = 1, \xi(c_2) = 4$
5.  $\xi(c_3) = 4, \xi(c_4) = 1, \xi(c_1) = 3, \xi(c_2) = 2$

Così da avere un totale di 125 colorazioni proprie per il nodo a otto.

# Bibliografia

- [1] P. R. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2004.
- [2] R. H. Crowell and R. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Co., 1963.
- [3] M. Polyak, Minimal generating sets of Reidemeister moves, *Quantum Topology*, 2010, V. 1, No. 4, pp 399-411.
- [4] P. G. Korablev, Electric group for knots and links, 2024, arXiv:2408.04510 [math.GT].
- [5] D. L. Johnson, *Presentations of Groups*, Cambridge University Press, 1997.
- [6] J. W. Alexander, Topological Invariants of Knots and Links, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1928, V. 30, No. 2, pp 275-306.