

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Dipartimento di Matematica ed Informatica

Corso di Laurea in Matematica



Realizzazione di Nodi come Insiemi Algebrici

Tesi compilativa di Laurea in Geometria

Relatore

Prof. Riccardo Piergallini

Laureando

Alessandro Pilla

Anno Accademico 2007/2008

*al vento che spaginaa le bianche e pettinaa le spiagge,
al sole, energia,
al mare, musicale, rigenerante, suggeritore e
calmante,
ai salti per la tricolore,
agli amici in conta dita,
a coloro ribelle, scontroso ed in bello, miei cari,
ad alcune, non a tutte,
a mio padre,
a me stesso,
a la testa altrove!*

Indice

<i>Introduzione</i>	iv
1 Nozioni topologiche	1
1.1 Varietà topologiche	2
1.2 Varietà differenziabili	3
1.3 Varietà orientabili	6
1.4 Somma connessa e doppio	8
1.5 Superfici orientabili	9
1.6 Manici e bande	10
1.7 Intorni regolari	11
2 Nodi e superfici di Seifert	13
2.1 Nodi in \mathbb{R}^3	14
2.2 Superfici di Seifert	18
3 Algebricità reale dei nodi	21
3.1 Nozioni sugli insiemi algebrici	22
3.2 Risultati preliminari	26
3.3 Il teorema di Akbulut-King	29
<i>Bibliografia</i>	viii
<i>Indice analitico</i>	x
<i>Indice delle figure</i>	xii

Introduzione

Questa tesi tratta i nodi in \mathbb{R}^3 come oggetti topologici. Questi nascono come astrazione matematica dell'oggetto fisico dato da una corda coi capi giunti nello spazio tridimensionale, che può essere “annodata” oppure “non annodata”.

La teoria matematica dei nodi si sviluppa nella seconda metà dell'Ottocento a partire dagli studi di lord Kelvin sui vortici annodati di etere come modelli per gli atomi e rappresenta un settore molto sviluppato della topologia. Il problema principale di questa teoria è la classificazione dei nodi a meno di deformazioni topologiche. L'obiettivo di questa tesi è quello di presentare il teorema di Akbulut-King che afferma che ogni nodo ha una rappresentazione come varietà algebrica reale, cioè può essere realizzato come una curva chiusa che sia il luogo degli zeri di un polinomio reale.

Prima di considerare il teorema si introducono i concetti che intervengono nell'enunciato e gli strumenti necessari alla sua dimostrazione.

Nel primo capitolo si richiamano brevemente le nozioni preliminari di *varietà topologica*, *differenziabile*, *orientabile*. Nel para-

grafo 1.3 si presentano alcune costruzioni di varietà quali *somma connessa* e *doppio*, e si mostra che una superficie compatta con bordo è topologicamente una serie di bande incollate a dischi.

Nel secondo capitolo si entra nel merito della teoria dei nodi, definendo il concetto di nodo come classe di equivalenza di *immersioni* della circonferenza nello spazio. A questo punto si dà la definizione di *superficie di Seifert* di un nodo come superficie orientata che ha come bordo il nodo stesso.

Nel terzo capitolo si presentano gli *insiemi algebrici reali* come insiemi di zeri di polinomi sul campo reale, e alcune loro proprietà elementari. Nel paragrafo 3.3 si affronta la dimostrazione del teorema di Akbulut-King.

Ringrazio particolarmente il mio relatore e guida verso la tesi prof. Riccardo Piergallini, inoltre il dott. Roberto Pennesi, per l'aiuto in campo informatico, e i ricercatori Giacomo Tomassoni e Silvia Benvenuti.

Capitolo 1

Nozioni topologiche

In questo capitolo si forniscono i richiami delle principali nozioni di topologia necessarie riguardanti il concetto di varietà. Per maggiori dettagli cfr. [Kosi93].

1.1 Varietà topologiche

Definizione 1.1 (m-varietà topologica con bordo). *Una m -varietà topologica con bordo è uno spazio topologico M che sia T_2 , II-numerabile e tale che per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno aperto $U \subset M$ del punto p ed un omeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ con $\varphi(U)$ aperto in $\mathbb{R}_+^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 \geq 0\}$. Si dice bordo di M l'insieme $\partial M = \{p \in M \mid \exists (U, \varphi) \mid \varphi(p) = 0\}$. Se $\partial M = \emptyset$ si dice che M è una varietà senza bordo.*

La coppia (U, φ) nella definizione precedente si chiama *carta locale*. Una famiglia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ di carte locali $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tali che $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ si dice *atlante*.

Inoltre una 1-varietà topologica prende il nome di *curva*, mentre una 2-varietà quello di *superficie*.

Esempio 1.1 (di varietà topologiche). L'intervallo chiuso $[a, b]$ è una curva con bordo gli estremi a, b , mentre $]a, b[$ e S^1 sono curve senza bordo; la 2-boccia B^2 è una superficie con bordo S^1 , mentre la sfera S^2 e il toro T^2 sono altri esempi di superfici.

VARIETÀ	DIM	BORDO
R^1	1	\emptyset
B^1	1	$\{-1, 1\}$
S^1	1	\emptyset
I	1	$\{0, 1\}$
R^2	2	\emptyset
B^2	2	S^1
S^2	2	\emptyset
T^2	2	\emptyset

1.2 Varietà differenziabili

Un'applicazione $f : U \rightarrow V$ tra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ si dice *differenziabile* se e soltanto se tutte le derivate parziali di qualsiasi ordine $\partial^k f^j / \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}$ esistono e sono continue. Inoltre f si dice un *diffeomorfismo* se e solo se esiste l'inversa f^{-1} e sia f che f^{-1} sono differenziabili. Un'applicazione differenziabile è detta *regolare in* $\bar{x} \in U$ se e soltanto se il rango $rg_{\bar{x}} f$ della funzione f calcolato nel punto \bar{x} , cioè il rango della matrice Jacobiana $J_{\bar{x}} f = (\partial f^j / \partial x^i)$, è massimo, ovvero coincide con $\min\{m, n\}$.

Definizione 1.2 (*carte differenziabilmente compatibili*). *Sia M una m -varietà topologica allora $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) carte locali di M sono dif-*

ferenziabilmente compatibili se e soltanto se l'applicazione composta $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} : \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \longrightarrow \varphi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ è un diffeomorfismo.

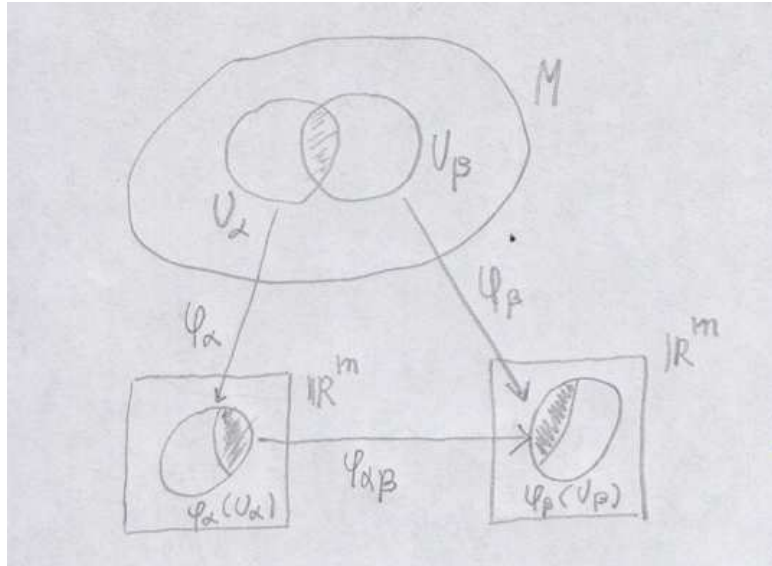


Figura 1.1: $\varphi_{\alpha\beta}$ applicazione che cambia le coordinate.

L'applicazione $\varphi_{\alpha\beta}$ prende il nome *cambiamento di carta/coordinate*.

Prima di dare la definizione di varietà differenziabile serve introdurre il concetto di atlante differenziabile e struttura generata.

Definizione 1.3 (atlante differenziabile). *Un atlante differenziabile è un atlante $\mathcal{U} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in I}$ tale che le carte $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ e $(U_{\beta}, \varphi_{\beta})$ siano differenziabilmente compatibili per ogni $\alpha, \beta \in I$.*

Definizione 1.4 (struttura differenziabile). *Una struttura differenziabile \mathcal{S} è un atlante differenziabile massimale.*

Si prova che per ogni atlante differenziabile \mathcal{U} esiste un'unica struttura differenziabile \mathcal{S} tale che $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$. Questa è costituita da tutte le carte differenziabilmente compatibili con quelle di \mathcal{U} .

Definizione 1.5 (m-varietà differenziabile). Una m -varietà differenziabile $M_{\mathcal{S}}$ è una coppia (M, \mathcal{S}) con M una m -varietà topologica e \mathcal{S} una struttura differenziabile su M .

Spesso nella notazione si ometterà il riferimento alla struttura differenziabile, assumendo questa sottointesa.

È importante osservare che in dimensione ≤ 3 ogni varietà topologica è differenziabile e ammette essenzialmente un'unica struttura differenziabile a meno di diffeomorfismi. Quindi d'ora in poi quando si parlerà di curve o di superfici s'intenderà sempre curve differenziabili e superfici differenziabili. Dette (U_{α}, φ) e (U_{β}, ψ) due carte rispettivamente di M e N varietà differenziabili, quanto espresso in precedenza in tema di applicazione differenziabile si può generalizzare nel contesto delle varietà considerando la composta $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ che agisce sugli aperti euclidei corrispondenti agli aperti di M ed N , legata dall'applicazione f , v. fig. 1.2.

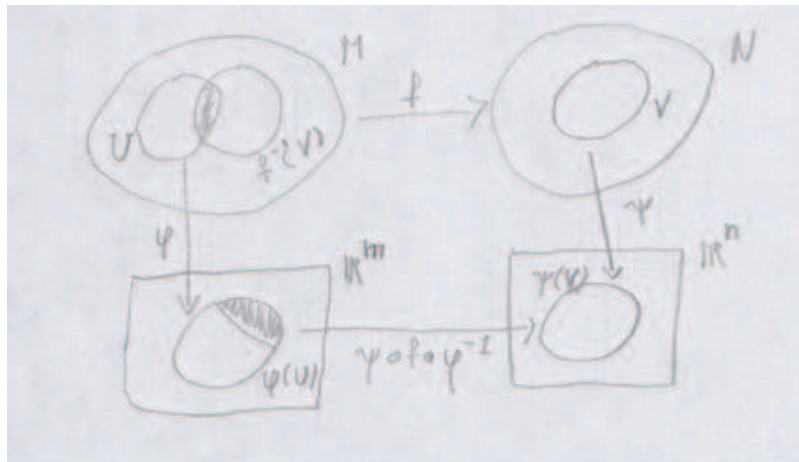


Figura 1.2: f applicazione differenziabile tra varietà.

Definizione 1.6 (applicazione differenziabile). Siano M, N due varietà differenziabili e siano $\mathcal{S}_M, \mathcal{S}_N$ le relative strutture differenziali, allora $f :$

$M \longrightarrow N$ si dice *applicazione differenziabile* se e soltanto se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenziabile $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{S}_M$ e $(V, \psi) \in \mathcal{S}_N$.

Il rango $rg_p f$, con $p \in U$, lo si definisce ora come $rg_{\varphi(p)} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, esso ha la proprietà di non dipendere dalle carte utilizzate. Per verificare che un'applicazione è differenziabile basta controllare che la condizione posta valga per le carte di due atlanti rispettivamente di M ed N .

Definizione 1.7 (diffeomorfismo). *Sia $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione tra varietà differenziabili, allora f diffeomorfismo se e soltanto se esiste l'inversa f^{-1} e sia f che f^{-1} sono differenziabili.*

Definizione 1.8 (sottovarietà differenziabile). *Sia (M, \mathcal{S}) una varietà differenziabile allora $N \subset M$ n -sottovarietà differenziabile se e soltanto se $\forall p \in N \exists (U, \varphi) \in \mathcal{S}$ tale che $p \in U$ e $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n$.*

Definizione 1.9 (applicazione regolare in un punto). *Siano $M = M_{\mathcal{S}_M}$ ed $N = N_{\mathcal{S}_N}$ varietà differenziabili di dimensione rispettivamente m e n , e sia $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione differenziabile allora, f si dice regolare in $p \in M$ se e soltanto se $rg_p f = \min\{m, n\}$.*

1.3 Varietà orientabili

Per introdurre il concetto di varietà orientabile è necessaria un'ulteriore condizione sui cambiamenti di carta: quella di conservazione dell'orientazione. Se $f : U \longrightarrow V$ è un'applicazione differenziabile regolare tra gli aperti $U, V \subset \mathbb{R}^m$, si dice che f *conserva l'orientazione* se e soltanto se $Det J_{\bar{x}} f > 0 \forall \bar{x} \in U$.

Definizione 1.10 (atlante orientato). *Un atlante differenziabile $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{S}$ si dice orientato se $\varphi_{\alpha\beta}$ conserva l'orientazione $\forall \alpha, \beta \in I$.*

Definizione 1.11 (orientazione). *Un'orientazione \mathcal{O} è un atlante orientato massimale.*

Una varietà si dice *orientabile* se ammette una orientazione. Si osserva che per ogni atlante \mathcal{U} orientato esiste ed è unica un'orientazione \mathcal{O} tale che $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

Definizione 1.12 (m-varietà orientata). *Una m -varietà orientata è una coppia (M, \mathcal{O}) , alternativamente $M_{\mathcal{O}}$, con $M = M_{\mathcal{S}}$ m -varietà differenziabile e \mathcal{O} un'orientazione su M .*

Ogni varietà differenziabile connessa orientabile ha esattamente due orientazioni opposte. Si può dare un'orientazione ad una curva semplicemente fissando un verso di percorrenza. Nel caso di una superficie immersa in \mathbb{R}^3 l'orientabilità coincide con l'esistenza di due facce distinte e scegliere un'orientazione equivale a scegliere una delle due facce, in altre parole scegliere un campo di vettori normali alla superficie. Un classico esempio di superficie non orientabile è il nastro di Moebius in fig. 1.3. La conservazione dell'orientazione

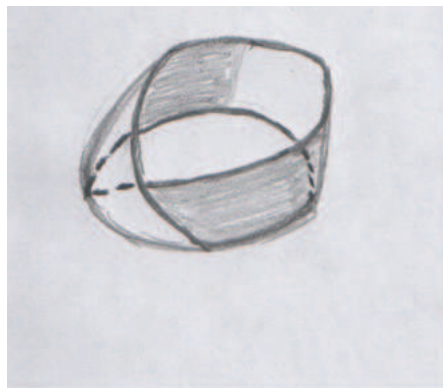


Figura 1.3: una superficie non orientabile (nastro di Moebius).

precedentemente espressa trova una sua definizione per le varietà orientate:

focalizzandosi sempre sulla composta $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ si può stabilire se passando da una varietà all'altra si mantiene o meno l'orientazione.

Definizione 1.13 (conservazione dell'orientazione). *Sia $f : M_{\mathcal{O}_1} \rightarrow N_{\mathcal{O}_2}$ un'applicazione differenziabile regolare tra varietà orientate allora f conserva l'orientazione se e soltanto se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ conserva l'orientazione.*

1.4 Somma connessa e doppio

A partire da due m -varietà connesse M , N se ne può costruire una terza con la *somma connessa*. Per gli scopi di questa tesi sarà sufficiente considerare il caso della somma connessa tra superfici illustrato in fig. 1.4.

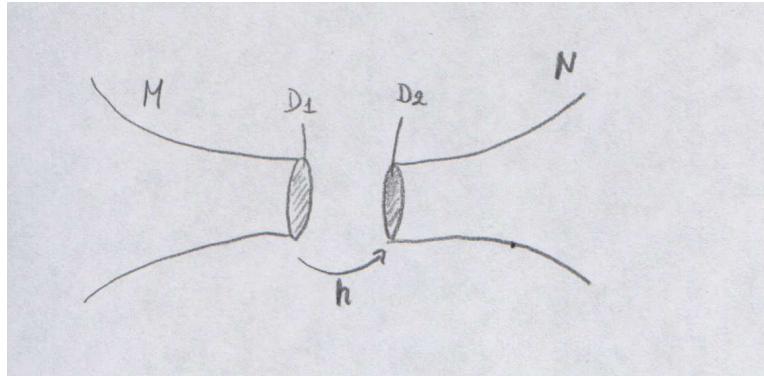


Figura 1.4: somma connessa nel caso di due superfici.

Definizione 1.14 (somma connessa). *Siano M e N due superfici connesse, la somma connessa $M \# N$ è la superficie connessa che si ottiene rimuovendo due dischi aperti D_1 e D_2 rispettivamente da M e N e attaccando $M \setminus D_1$ a $N \setminus D_2$ mediante l'identificazione dei bordi ∂D_1 e ∂D_2 con un omeomorfismo $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ (cioè si identifica ogni punto x di ∂D_1 con la sua immagine $h(x)$ in ∂D_2).*

Si può dimostrare che la somma connessa $M\#N$ dipende solo dalle due superfici M e N e non dalle scelte dei dischi D_1 e D_2 e dell'omeomorfismo h . Un'altra costruzione che si utilizzerà nel seguito è quella del doppio di una

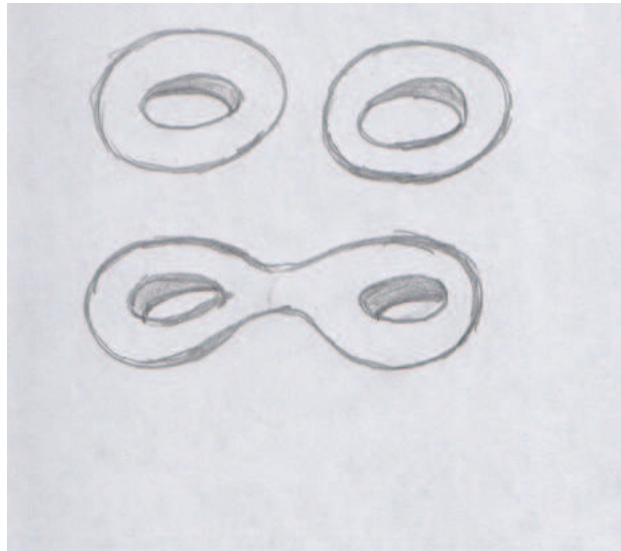


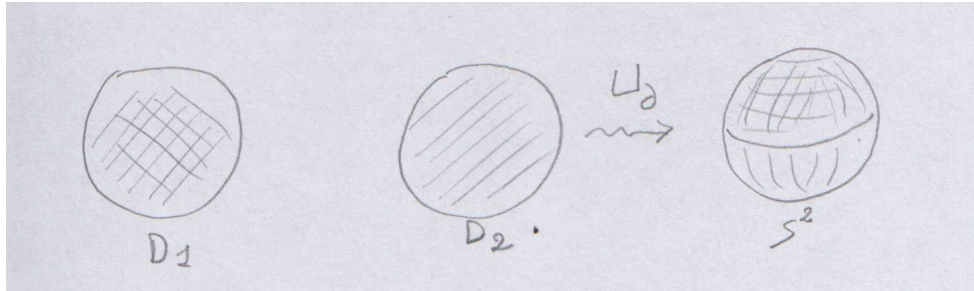
Figura 1.5: somma connessa nel caso di due tori.

varietà differenziabile. Anche in questo caso ci si limita a considerare il caso delle superfici (v. fig. 1.6).

Definizione 1.15 (doppio della varietà). *Sia M una superficie connessa con bordo, si definisce il suo doppio $2M$ essere la superficie connessa senza bordo che si ottiene come unione topologica di due copie di M i cui bordi sono tra loro identificati mediante l'identità.*

1.5 Superfici orientabili

Ogni superficie compatta connessa orientabile senza bordo è del tipo T_g (somma connessa di g tori); se ad una superficie compatta connessa orientabile con

Figura 1.6: $S^2 \cong 2B^2$.

bordo si incolla un disco lungo ogni componente di bordo si ottiene una superficie compatta senza bordo. Ogni superficie compatta connessa orientabile con bordo è del tipo $T_{g,n}$, queste sono a due a due non omeomorfe.

1.6 Manici e bande

Definizione 1.16 (m_i -manico). *Data una m -varietà con bordo M , un m_i -manico attaccato ad M , con $m_i \leq m$, è una copia omeomorfa del prodotto $B^{m_i} \times B^{m-m_i} \cong B^m$ incollata ad M mediante una immersione $h : \partial B^{m_i} \times B^{m-m_i} \rightarrow \partial M$.*

Nel caso delle superfici si hanno manici in dimensione 0, 1 e 2 come illustrato in fig. 1.7. In particolare, un 1-manico in dimensione 2 può essere pensato come una banda attaccata ad una superficie, identificando le due estremità con due intervalli contenuti nel bordo della superficie stessa.

Teorema 1.1 (trasformazione in bande). *Sia S una superficie compatta e connessa con bordo allora S si può rappresentare mediante un numero finito di bande (1-manici) incollate ad un numero finito di dischi (0-manici).*

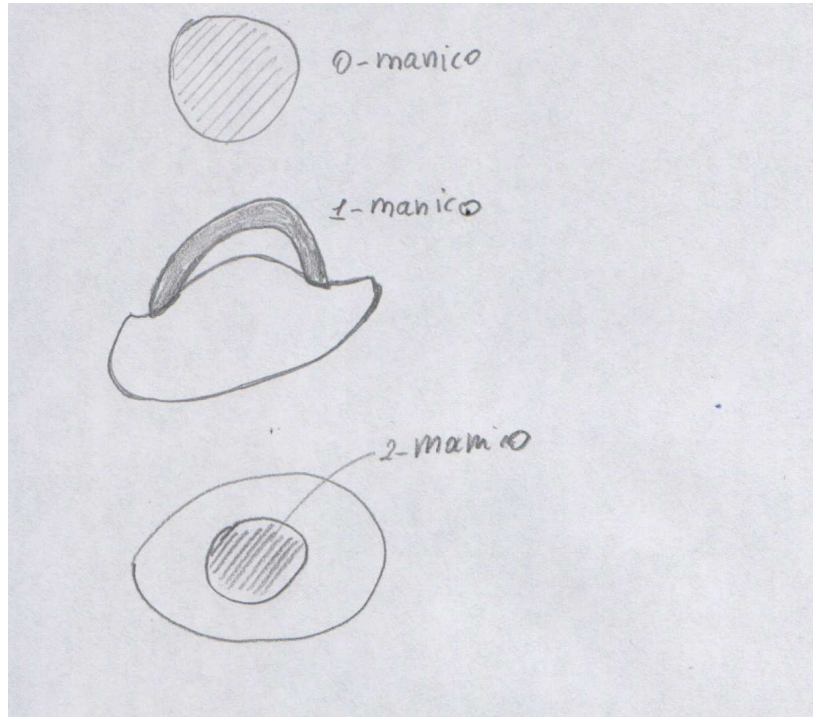


Figura 1.7: manici nel caso bidimensionale.

1.7 Intorni regolari

Ogni varietà differenziabile N ammette una *metrica riemanniana* g (v. [Kosi93]). Si indica con d la *distanza geodetica* indotta da g . Se $M \subset N$ è una sottovarietà differenziabile, si denota con $N_\epsilon M = \{q \in N \mid d(q, M) \leq \epsilon\}$ l'intorno tubolare di raggio $\epsilon > 0$ di M in N .

Teorema 1.2. *Data una varietà differenziabile N con distanza geodetica d e una sottovarietà differenziabile compatta $M \subset N$, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo $N_\epsilon M$ ammette una struttura di B^{n-m} -fibrato su M , con proiezione $\pi : N_\epsilon M \rightarrow M$ definita da $\pi(x) =$ punto di M più vicino ad x .*

Definizione 1.17 (intorno regolare differenziabile). *Data una sottovarietà $M \subset N$ si dice intorno regolare di M in N l'insieme $N_\epsilon M = \{q \in$*

$N \mid d(q, M) \leq \varepsilon$ del tipo definito sopra, dove d è una distanza geodetica arbitraria.

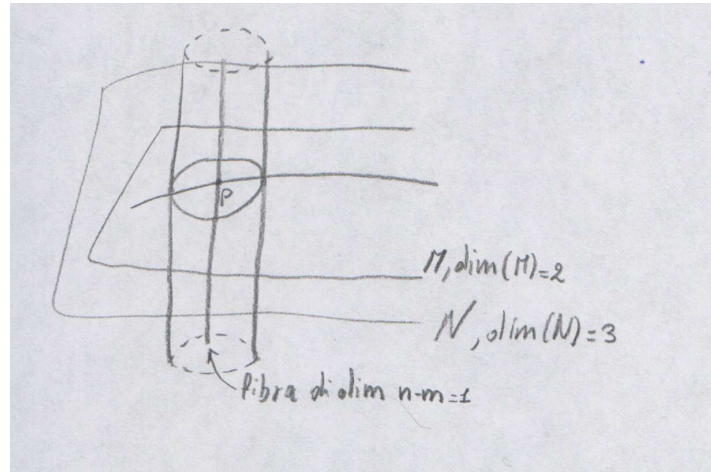


Figura 1.8: intorno regolare/tubolare caso $m = 2$.

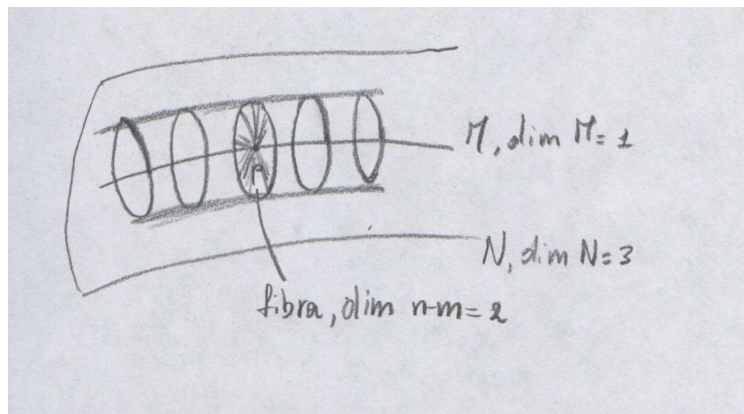


Figura 1.9: intorno regolare/tubolare caso $m = 1$.

Si osserva che per ogni sottovarietà differenziabile compatta $M \subset N$ esiste sempre un intorno regolare e questo è unico a meno di diffeomorfismi di N , cfr. [Kosi93].

Capitolo 2

Nodi e superfici di Seifert

2.1 Nodi in \mathbb{R}^3

In questo capitolo si concentra l'attenzione sui nodi in \mathbb{R}^3 e sulle superfici di Seifert. Come già anticipato nell'introduzione, i nodi nascono come astrazione matematica dell'oggetto fisico dato da una corda con i capi giunti nello spazio tridimensionale, che può essere "annodata" oppure "non annodata". In questa esposizione ci si limita a considerare nodi differenziabili regolari, altrimenti detti *docili*. In realtà, esiste anche un concetto più generale di nodo, comprendente anche i cosiddetti nodi *selvaggi*, ma questo va al di là degli scopi di questa tesi.

Definizione 2.1 (nodo). *Sia \mathbb{R}^3 lo spazio euclideo tridimensionale, allora $N \subset \mathbb{R}^3$ si dice nodo se esiste un'immersione (un omeomorfismo sull'immagine) differenziabile regolare $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $h(S^1) = N$. Una unione disgiunta di più nodi prende il nome di link.*

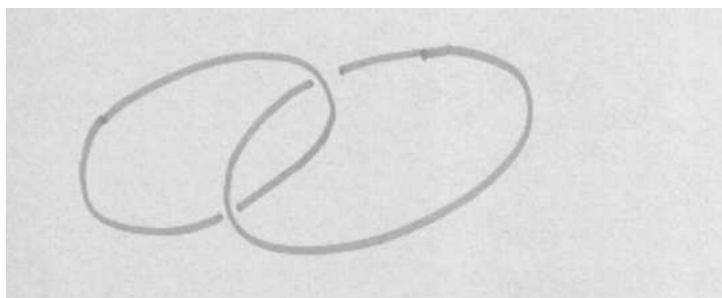


Figura 2.1: link di Hopf.

Due nodi possono essere equivalenti o isotopicamente equivalenti in base alle definizioni seguenti:

Definizione 2.2 (nodi equivalenti). N_1, N_2 nodi equivalenti se esiste un diffeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $h(N_1) = N_2$.

Definizione 2.3 (nodi isotopicamente equivalenti). N_1 e N_2 nodi isotopicamente equivalenti se esiste un'isotopia differenziabile dello spazio che porta N_1 su N_2 , ovvero se esiste un'applicazione differenziabile $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un diffeomorfismo per ogni $t \in [0, 1]$, $h_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ e $h_1(N_1) = N_2$.

Si può dimostrare che ogni diffeomorfismo di \mathbb{R}^3 che conservi l'orientazione si può realizzare mediante un'isotopia. Quindi la differenza tra l'equivalenza isotopica e l'equivalenza sta nel fatto che si richieda oppure no che il diffeomorfismo h nella definizione 2.1 conservi l'orientazione. Per esempio il trifoglio sinistro e quello destro di fig. 2.2 sono equivalenti mediante una riflessione (che inverte l'orientazione dello spazio), ma non sono isotopicamente equivalenti.

Un nodo si dice *banale* se è equivalente all'immersione standard di S^1 in \mathbb{R}^2 (come circonferenza unitaria), v. fig. 2.3. Tenendo conto del fatto che la riflessione rispetto al piano \mathbb{R}^2 fissa S^1 , è facile vedere che una tale equivalenza

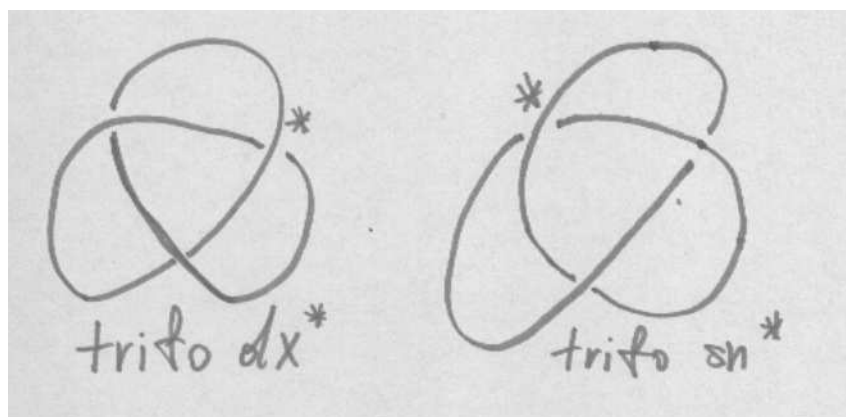


Figura 2.2: trifoglio destro e sinistro.

può essere sempre realizzata mediante un'isotopia. Un analogo concetto in

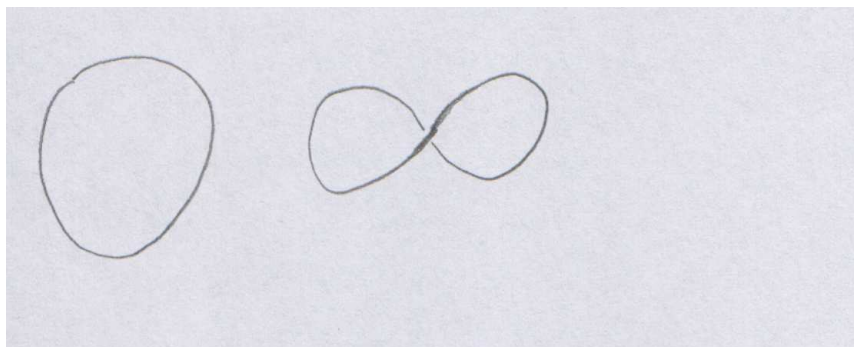


Figura 2.3: nodi banali.

dimensione diversa da 3 risulterebbe meno interessante, perché tutti i nodi in \mathbb{R}^n con $n \neq 3$ sarebbero banali. In particolare nel caso $n = 2$ si ha il seguente teorema (cfr. [Kos88]):

Teorema 2.1 (di Schönflies). *Sia N una curva chiusa semplice in \mathbb{R}^2 , allora esiste un omeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $h(N) \cong S^1$ con S^1 circonferenza standard in \mathbb{R}^2 . Inoltre se N è differenziabile e regolare, allora h si può assumere essere un diffeomorfismo.*

Definizione 2.4 (ε -isotopia). *Si definisce ε -isotopia una isotopia tale che $h_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ e $d(h_t(x), x) \leq \varepsilon$ per ogni t, x .*

Ogni nodo, a meno di perturbazioni isotopiche arbitrariamente piccole, cioè di ε -isotopie con ε sufficientemente piccolo, ammette un diagramma nel piano per mezzo di una proiezione *non degenera*, nel senso che gli unici punti multipli sono punti doppi trasversali del tipo quello *doppio proprio*, v. fig. 2.4.

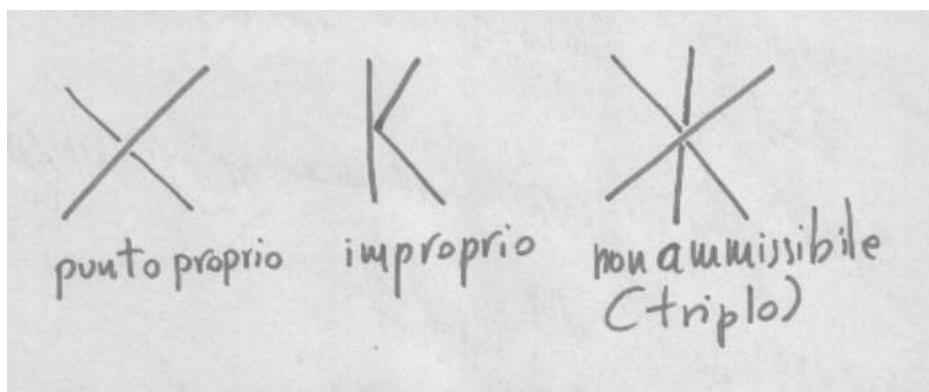


Figura 2.4: tipi di punti.

Definizione 2.5 (diagramma del nodo). *Sia $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$, la proiezione sul piano, si definisce il diagramma del nodo $N \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\mathcal{D} = p(N)$, con l'evidenziazione dei sottopassaggi dei punti propri doppi, assumendo sempre che la proiezione sia non degenera.*

Combinando le mosse descritte in fig. 2.5, Reidemeister dà un criterio per stabilire se due nodi sono isotopicamente equivalenti.

Teorema 2.2 (teorema di Reidemeister). *Siano N_1 ed N_2 nodi di \mathbb{R}^3 , \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 i rispettivi diagrammi, N_1 isotopicamente equivalente ad N_2 se e soltanto se esiste $\mathcal{M} = (M_1, M_2, \dots, M_j, \dots, M_n)$, sequenza finita di mosse che trasformi \mathcal{D}_1 in \mathcal{D}_2 .*

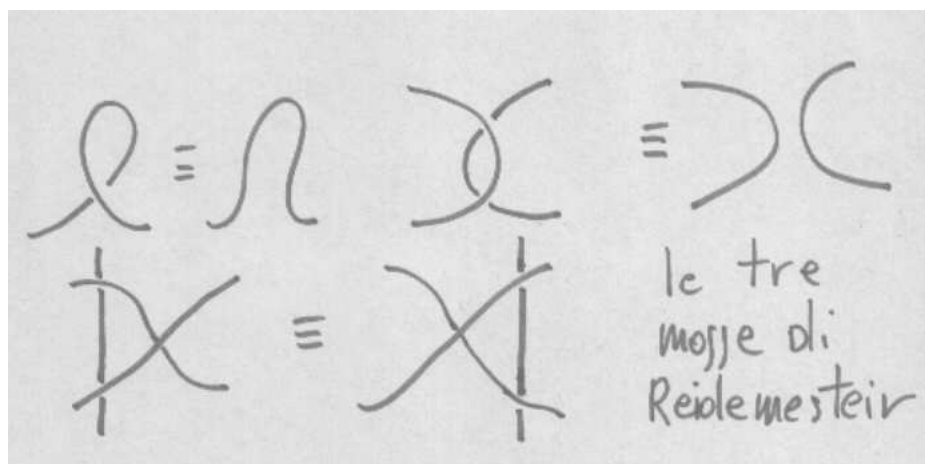


Figura 2.5: mosse di Reidemeister.

Utilizzando diagrammi e movimenti di Reidemeister sono stati classificati i nodi con diagrammi fino a 15 incroci. Nella fig. 2.7 si riportano i diagrammi dei nodi fino ad otto incroci, cfr. [Lic97].

2.2 Superfici di Seifert

Definizione 2.6 (superficie di Seifert). Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link orientato, una superficie di Seifert S per L è una superficie orientata in \mathbb{R}^3 tale che $\partial S = L$ e l'orientazione \mathcal{O}_L del link L è indotta da quella \mathcal{O} della superficie.

Ogni nodo ammette una superficie di Seifert (non unica, ovviamente). Per esempio si può costruire una superficie di Seifert a partire da un qualunque diagramma orientato in modo abbastanza semplice. Sia \mathcal{D} un diagramma orientato per un link orientato L in S^3 e $\hat{\mathcal{D}}$ sia \mathcal{D} modificato per renderlo senza sottopassaggi, compatibilmente all'orientazione. $\hat{\mathcal{D}}$ è unione disgiunta di curve semplici chiuse orientate in S^2 e $\hat{\mathcal{D}}$ è il bordo dell'unione di alcuni dischi disgiunti tutti su una parte di S^2 . Collegando questi dischi insieme con una banda mezza girata agli incroci, ciò forma una superficie orientata

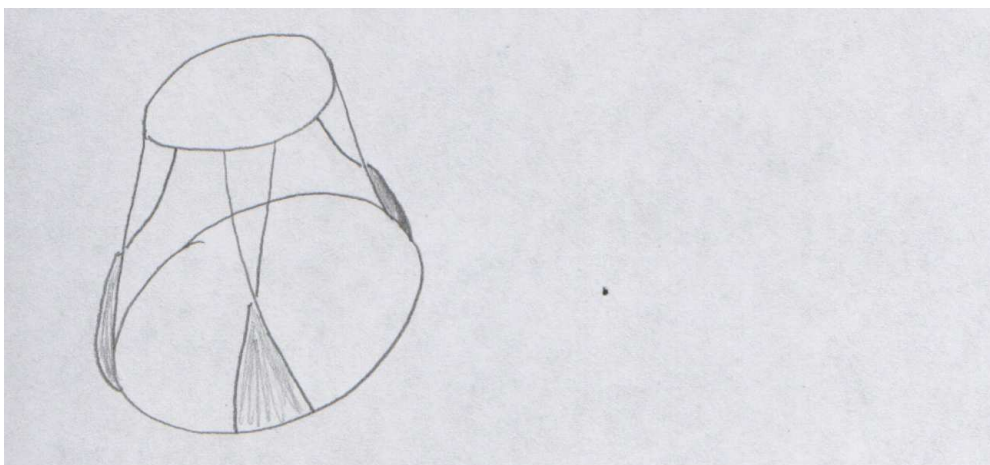


Figura 2.6: una superficie di Seifert.

con L il bordo (cfr. [Lic97]) ad esempio come in fig. 2.6, dove ci sono proprio due dischi derivanti da questa costruzione e tre bande che li collegano.

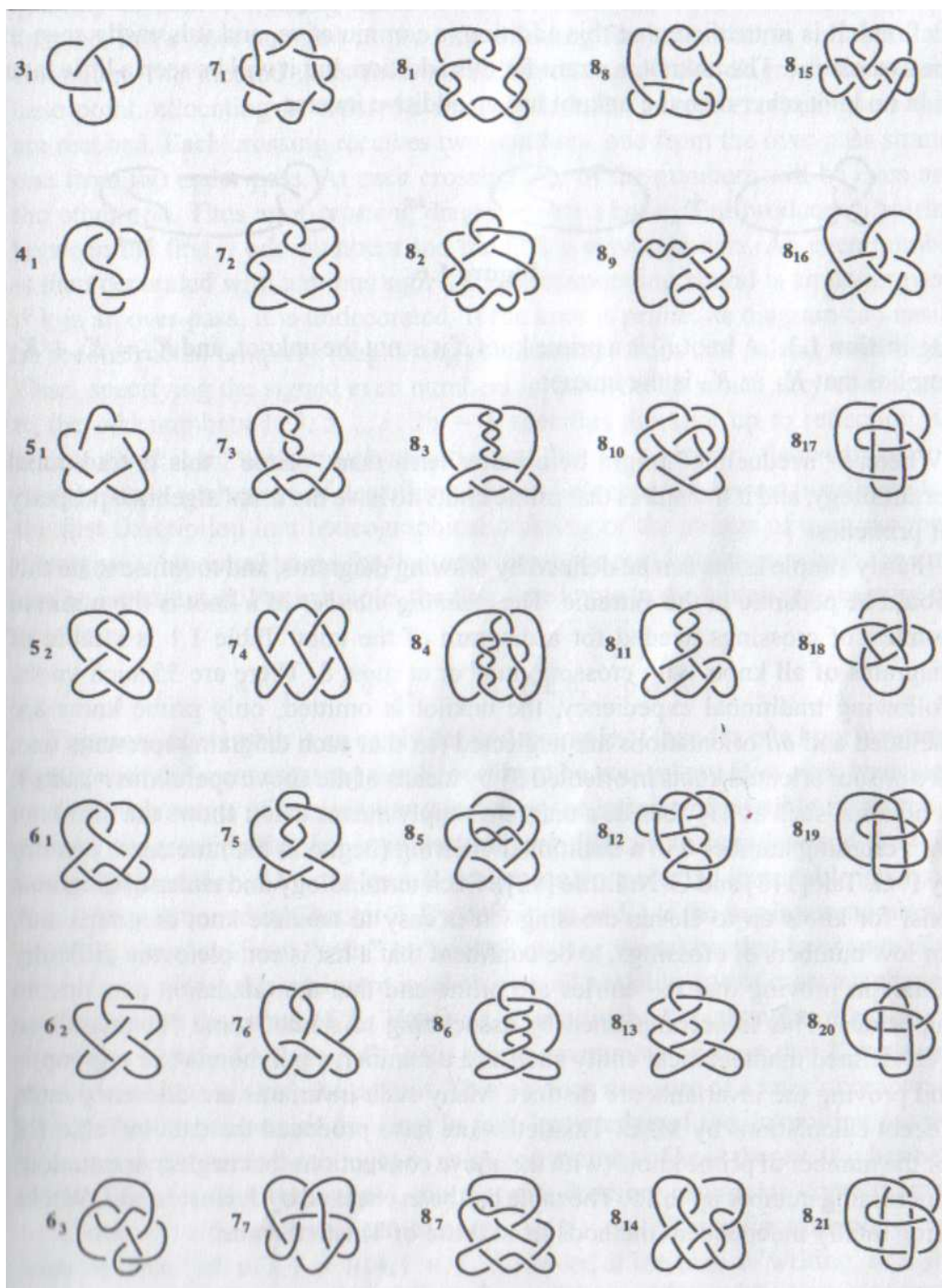


Figura 2.7: tabella dei nodi fino ad otto incroci.

Capitolo 3

Algebricità reale dei nodi

3.1 Nozioni sugli insiemi algebrici

Si inizia questo capitolo introducendo alcuni concetti relativi agli insiemi algebrici reali, che serviranno per la dimostrazione del teorema di Akbulut-King. Un insieme algebrico altro non è che l'insieme di zeri di una famiglia finita di polinomi. Nel seguito si identificheranno i polinomi con le funzioni polinomiali associate, cioè $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ sarà identificato con la funzione polinomiale $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita $(x_1, \dots, x_n) \mapsto p(x_1, \dots, x_n)$.

Definizione 3.1 (insieme algebrico reale). *Se $I = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, allora l'insieme algebrico reale associato ad I è l'insieme $V = V(I) = V(p_1, \dots, p_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_i(x) = 0 \forall i = 1, \dots, k\}$*

Si osserva che, dati $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ e posto $p = p_1^2 + \dots + p_k^2 \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, si ha: $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ se e solo se $p_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Quindi $V(p_1, \dots, p_k) = V(p)$. Questa uguaglianza vale però

solo a livello insiemistico, ma non quando si vogliono studiare gli insiemi algebrici nella loro struttura più fine, come per esempio le singolarità.

Ricordando la definizione di *ideale generato da* I , con I un sottoinsieme di $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, in notazione (I) , come l'intersezione di tutti gli ideali contenenti I , ovvero $(I) = \{p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_hq_h \mid p_1, p_2, \dots, p_h \in I \text{ e } q_1, q_2, \dots, q_h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]\}$, si ha che $V(I) = V((I))$. Infatti l'inclusione $I \subset (I)$ implica immediatamente che $V((I)) \subset V(I)$ mentre l'inclusione inversa segue dal fatto che se $p_1(x) = \dots = p_h(x) = 0$ allora si ha anche $p_1(x)q_1(x) + \dots + p_h(x)q_h(x) = 0$.

Esempio 3.1 (di insiemi algebrici reali).

- In \mathbb{R}^n , $V(1) = \emptyset$;
- in \mathbb{R}^n , $V(0) = \mathbb{R}^n$;
- in \mathbb{R}^2 , $V(x_1^2 + x_2^2 - 1) = S^1 \subset \mathbb{R}^2$, v. fig. 3.1;

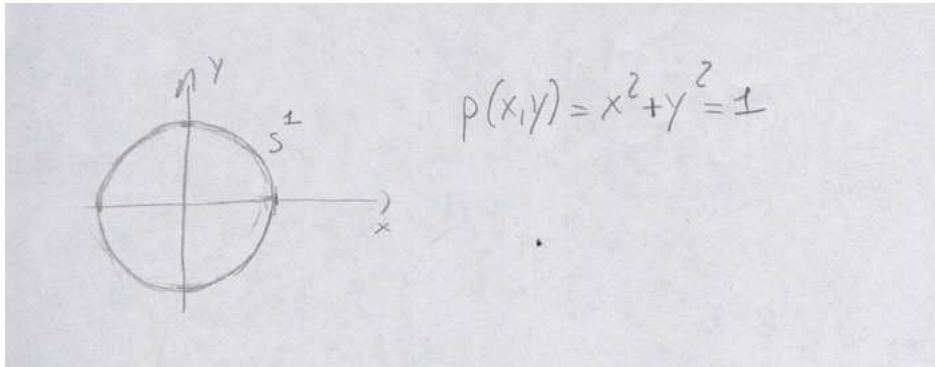


Figura 3.1: $V(x_1^2 + x_2^2 - 1) = S^1$.

- in \mathbb{R}^2 , $V(x_1^2 + x_2^2 - 1, x_1, x_2) = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, v. fig. 3.2;
- sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il toro di rotazione costituito dai punti di \mathbb{R}^3 che hanno distanza 1 dalla circonferenza di equazione $x = 0, y^2 + z^2 = 4$. Allora V

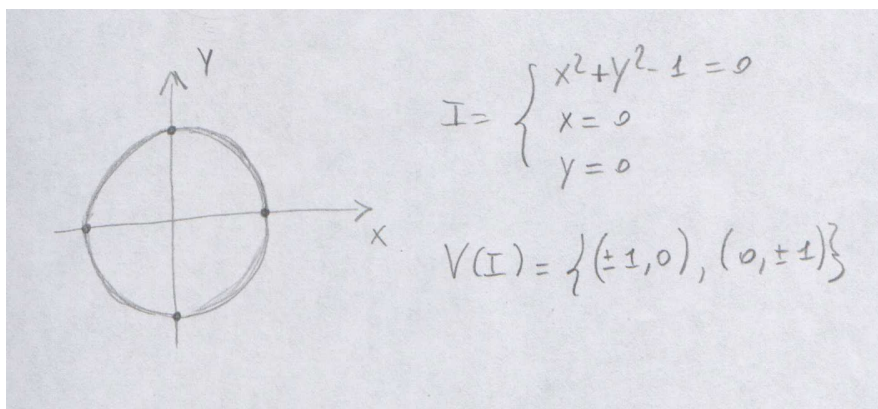


Figura 3.2: un altro insieme algebrico reale.

è un insieme algebrico di equazione $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(y^2 + z^2)$. Si individuano su V il meridiano V_1 di equazione $z = 0$, $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ e un parallelo V_2 di equazione $x = 0$, $y^2 + z^2 = 1$, entrambi insiemi algebrici, v. fig. 3.3.

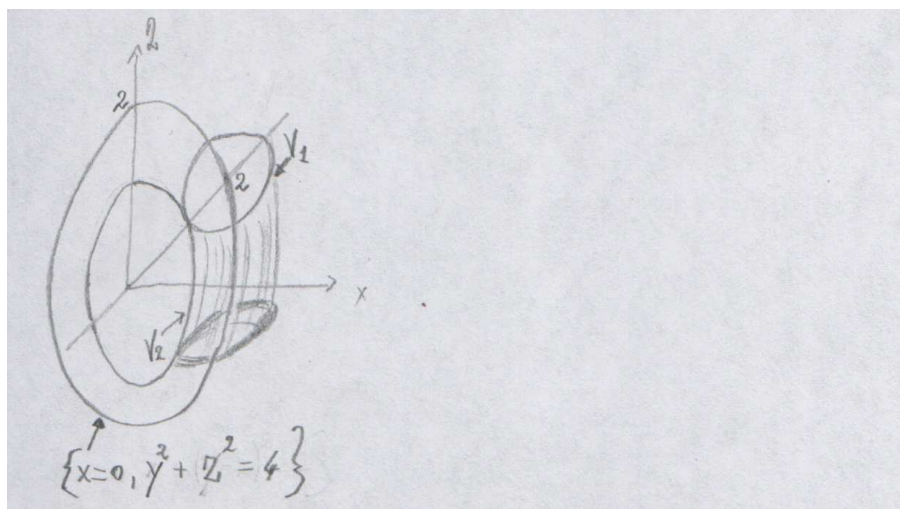


Figura 3.3: toro di rotazione intorno all'asse x .

Si dà ora la definizione di polinomio omogeneizzato associato di un dato polinomio.

Definizione 3.2 (omogeneizzato di un polinomio). Se $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ è un polinomio, allora il suo omogeneizzato è $p^* \in \mathbb{R}[t, x_1, \dots, x_n]$ definito $p^*(t, x) = t^d p(x/t)$ con d grado di p . Il polinomio p^* risulta essere omogeneo di grado d .

Esempio 3.2 (di polinomio omogeneizzato). Se $p(x, y) = x^2 + xy^3 + y^3$ allora $p^*(t, x, y) = t^4 \cdot p(x/t, y/t) = t^4((x/t)^2 + x/t(y/t)^3 + (y/t)^3) = t^2 x^2 + xy^3 + tx^3$. Va fatto notare che $p^*(1, x) = p(x)$. Questo passaggio, che consente di tornare dall'omogeneizzato al polinomio di partenza, si chiama *deomogeneizzazione*.

Definizione 3.3 (polinomio aperto). Un polinomio $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ si dice aperto se $p^*(0, x) \neq 0$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Esempio 3.3 (di polinomio aperto). $p(x, y) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, infatti: $p^*(0, x) = x_1^2 + x_2^2 + 0 \neq 0$ fuori da $(0, 0)$.

Definizione 3.4 (insieme algebrico chiuso proiettivamente). Un insieme algebrico $V \subset \mathbb{R}^n$ si dice proiettivamente chiuso se esiste un polinomio aperto $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $V = V(p)$.

Dire che V è proiettivamente chiuso equivale a dire che è limitato in \mathbb{R}^n .

Definizione 3.5 (punto non singolare di dimensione d in \mathbf{V}). $x \in V = V(I)$ tale che $\exists p_i \in (I)$, $i = 1, 2, \dots, n - d$, ed $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ intorno di x cosicché:

- $U \cap V = U \cap \bigcap_{i=1}^{n-d} p_i^{-1}(0)$,
- i gradienti $(\nabla p_i)_x$, $i = 1, 2, \dots, n - d$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 3.6 (dimensione di \mathbf{V}). $\dim(V) = \max\{d \mid \exists x \in V \text{ non singolare di dimensione } d\}$.

Definizione 3.7 (insieme delle non singolarità). Nonsing $V = \{x \in V \mid x \text{ punto non singolare di dimensione } \dim(V)\}$. Analogamente si definisce l'insieme delle singolarità di V come $\text{Sing } V = V \setminus \text{Nonsing } V$. Si dice insieme algebrico reale non singolare un insieme algebrico reale V tale che $\text{Sing } V = \emptyset$.

Esempio 3.4 (di insiemi algebrici singolari). In \mathbb{R}^3 , $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ è l'equazione di un cono che ha come unico punto singolare il suo vertice, $x_1x_2 = 0$ è l'equazione dell'unione di due piani coordinati, che ha come insieme di punti singolari tutta la retta comune ai due piani.

Esempio 3.5 (di insiemi algebrici non singolari).

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 16 \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = (3 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2)^2\},$$

$$V_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + (2 - x_2)^2 = 1\},$$

$$V_2 = \{(0, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

sono tutti insieme non singolari.

3.2 Risultati preliminari

È noto che la sfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ è possibile riguardarla come la *compattificazione di Alexandroff* di \mathbb{R}^3 , $\widehat{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$, infatti la *proiezione stereografica* (v. fig. 3.4) dal punto $\infty = (0, 0, 0, 1)$ dà un omeomorfismo tra $S^3 - \{\infty\}$ e \mathbb{R}^3 . Quindi ogni nodo in \mathbb{R}^3 si può in realtà intendere contenuto in S^3 .

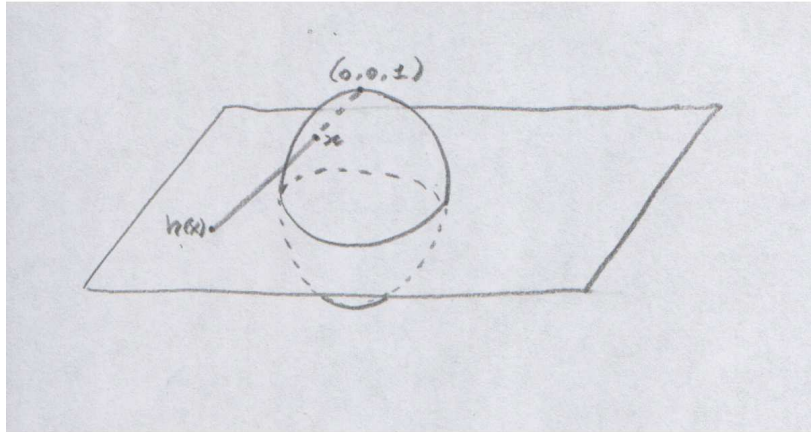


Figura 3.4: compattificazione del piano.

Definizione 3.8 (separazione compatta). *Sia X uno spazio topologico ed $S \subset X$, allora S separa compattamente X se esistono insiemi chiusi X_0 e X_1 tali che $X = X_0 \cup X_1$ e $S = X_0 \cap X_1$ con X_1 compatto.*

Lemma 3.1. *Siano X e $Y \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi algebrici non singolari tali che $X \subset Y$ e $\dim(X) = \dim(Y)$ allora $X \setminus Y$ è un insieme algebrico non singolare e $X \sqcup Y$ è anche esso un insieme algebrico non singolare.*

dimostrazione

La dimostrazione segue dal lemma 1.6 di [AK81b].

q.e.d.

Lemma 3.2. *Siano $X, Y_i, Z_i \subset \mathbb{R}^n$ insiemi algebrici con $i = 1, \dots, k$, sia $U \subset \text{Nonsing } X$ una sottovarietà compatta differenziabile con fibrato normale banale, sia poi $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ e sia $Y_i \subset (\text{Nonsing } Z_i) \cap \partial U$, inoltre $Z_i \cap \partial U$ contenga un intorno di Y_i in Z_i per ogni $i = 1, \dots, k$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste una ϵ -isotopia H , che fissa $Y_1 \cup \dots \cup Y_k$, tale che $h_1(\partial U)$ è un insieme algebrico non singolare. Inoltre se ogni Y_i è chiuso proiettivamente allora l'insieme algebrico $h_1(\partial U)$ di cui sopra si può assumere chiuso proiettivamente.*

Corollario 3.1. *Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ un link allora esiste una piccola isotopia di \mathbb{R}^3 che trasforma L ad un insieme algebrico non singolare chiuso proiettivamente.*

dimostrazione

Sia U una superficie di Seifert per N , il risultato segue dal lemma 3.2 ponendo $X = \mathbb{R}^3$, $Y_i = \emptyset = Z_i$ e $U = U$.

q.e.d.

3.3 Il teorema di Akbulut-King

S'intenda con $\epsilon S^3 \subset \mathbb{R}^4$ la sfera di raggio ϵ centrata nell'origine di \mathbb{R}^4 .

Teorema 3.1 (algebricità dei nodi in S^3). *Sia $N \subset S^3$ un nodo allora esiste un insieme algebrico reale $Z \subset \mathbb{R}^4$ con $\text{Sing } Z = \emptyset$ tale che la coppia (S^3, N) è diffeomorfa alla coppia $(\epsilon S^3, \epsilon S^3 \cap Z)$.*

dimostrazione

La dimostrazione consta di due parti, una sull'esistenza degli insiemi algebrici dai quali costruire l'isotopia e l'altra sull'esistenza dell'isotopia.

Si debbono prendere un punto ∞ sulla sfera, ma non sul nodo, ed un diffeomorfismo $h : S^3 \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$; si mostra che ci sono un insieme algebrico non singolare chiuso proiettivamente $W \subset \mathbb{R}^3$ ed un sottoinsieme algebrico $L \subset W$ tali che il bordo di un intorno regolare differenziabile di L in W è isotopo in \mathbb{R}^3 ad $h(N)$, copia diffeomorfa del nodo. Si prendano V, V_1, V_2

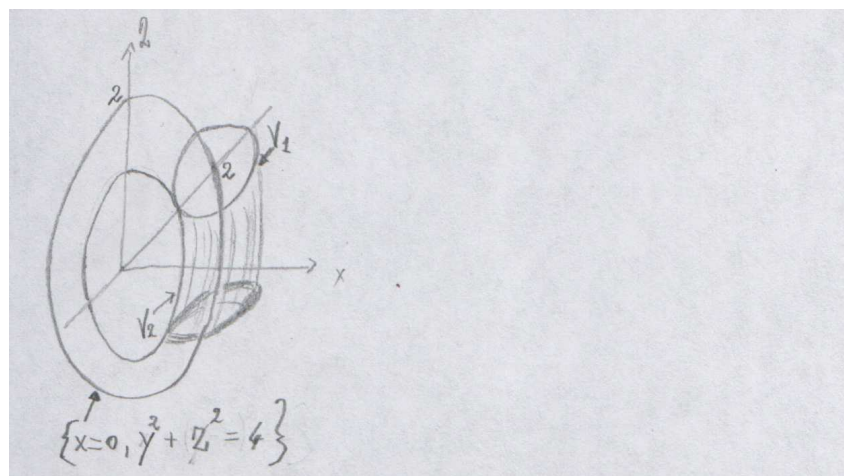


Figura 3.5: toro di rotazione intorno all'asse x .

dell'esempio 3.1 sugli insiemi algebrici reali di pag. 23, v. fig. 3.5, si nota

che V , V_1 e V_2 sono insiemi algebrici non singolari chiusi proiettivamente. Sia ora $U \subset \mathbb{R}^3$ una superficie di Seifert per $h(N)$. A meno di traslazione si può assumere $U \cap V = \emptyset$. Si pone quindi $U' = U \# V$ somma connessa di U e V per mezzo di un tubo (1-manico vuoto), curando di connetterlo a V da qualche parte in $V - (V_1 \cup V_2)$, v. fig. 3.6. In questo modo $V_1 \cup V_2 \subset U'$ e $V_2 \subset U'$, inoltre ogni intorno sufficientemente piccolo di $V_1 \cup V_2$ in U' è anche intorno di $V_1 \cup V_2$ in V . Togliendo un disco aperto D da U' , si ottiene una

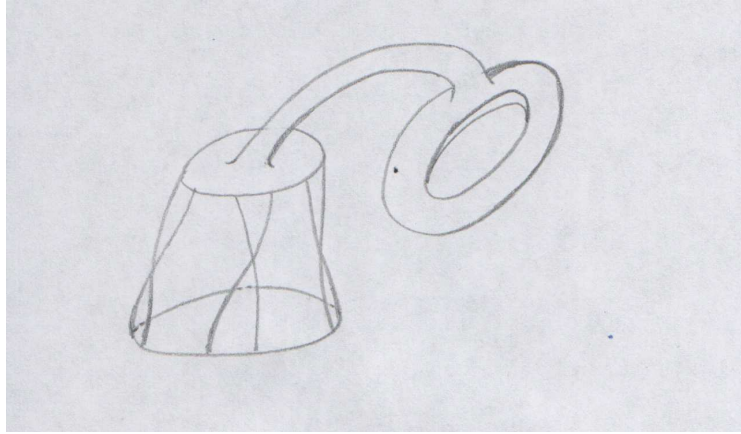


Figura 3.6: la Seifert connessa al toro.

superficie $U'' = U' - D$ il cui bordo $\partial U''$ è costituito da due componenti: N e ∂D . Se si astrae dall'immersione di U'' in \mathbb{R}^3 , per il teorema 1.1 (trasformata in bande) v'è una rappresentazione di U'' in \mathbb{R}^3 come unione di bande e dischi come mostrato in fig. 3.7.

Si considerino le due sottovarietà L_1 e L_2 di U'' tra loro trasversali rappresentate in fig. 3.8. Si può assumere che V_1 e V_2 siano rispettivamente componenti di L_1 e L_2 . Allora si ha che $U'' \setminus (L_1 \cup L_2)$ è diffeomorfa a $\partial U'' \times [0, 1)$, mentre $U' \setminus ((L_1 - V_1) \cup L_2)$ è diffeomorfa a $\partial U' \times [0, 1)$. Sia $W' = 2U''$ il doppio di U'' . Poiché U'' ha fibrato normale banale, si può considerare un diffeomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g(U'') \cap U'' = \partial U''$ e $g(U'') \cup U''$ sia una sottovarietà

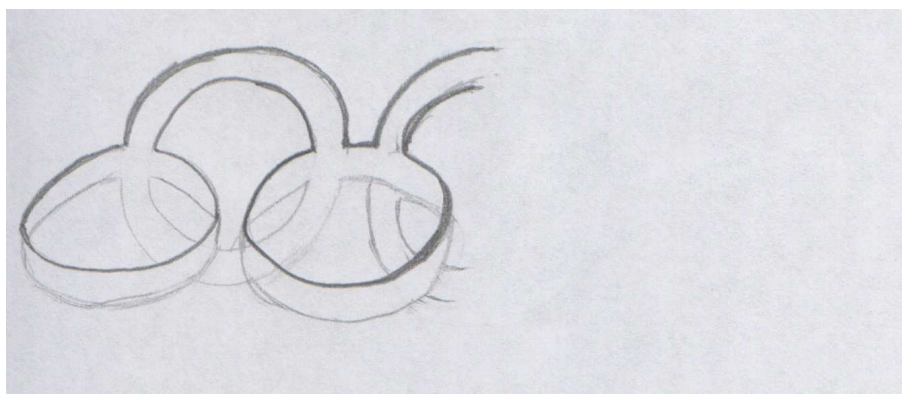


Figura 3.7: U'' in \mathbb{R}^3 dopo astrazione e riduzione in bande.

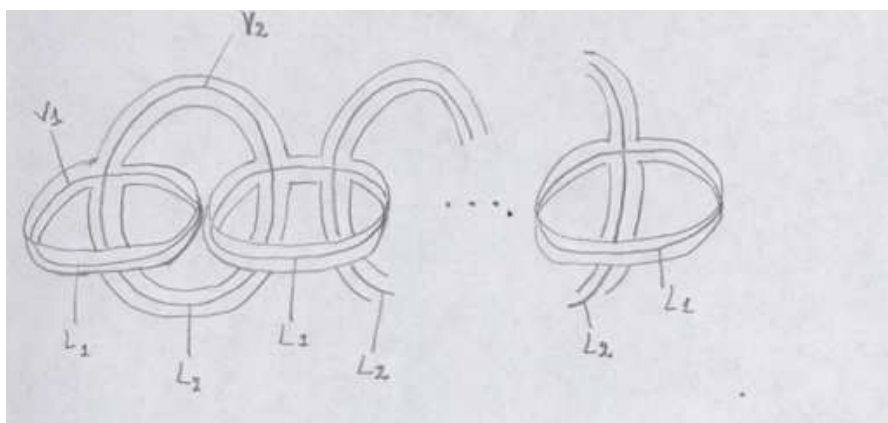


Figura 3.8: caratterizzazioni delle L_i .

differenziabile W' di \mathbb{R}^3 (v. fig. 3.9). Notare che $g(L_1) \cup (L_2 \setminus V_2)$ è un link. Per il corollario 3.1 c'è un'isotopia che trasforma $g(L_1) \cup (L_2 \setminus V_2)$ in un sottoinsieme algebrico non singolare chiuso proiettivamente di \mathbb{R}^3 e così si può assumere a meno di isotopie che $g(L_1) \cup L_2$ sia un insieme algebrico non singolare per il lemma 3.1.

W' separa compattamente \mathbb{R}^3 , per il lemma 3.2 c'è un'isotopia che porta W' su un insieme algebrico non singolare chiuso proiettivamente W , fissando $V_1 \cup L_2 \cup g(L_1)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il diffeomorfismo finale di questa isotopia e sia $W = f(W')$. $L_1 \cup g(L_1)$ separa in una parte compatta W' e per il lemma

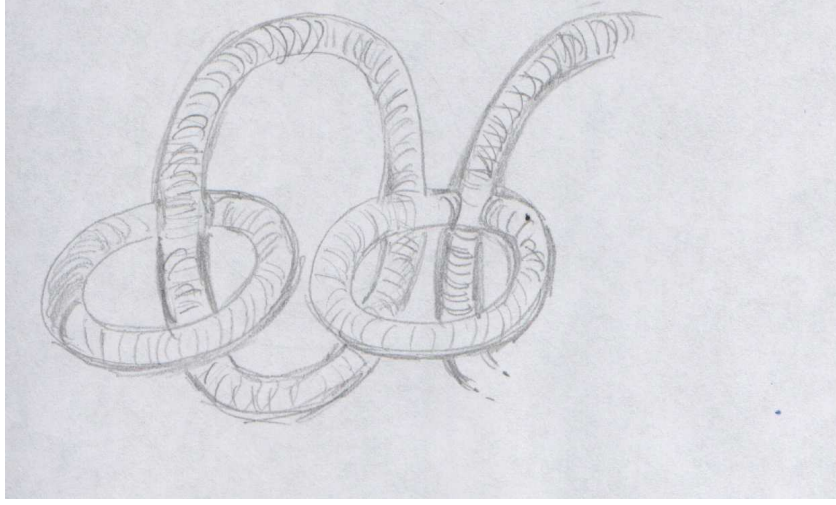


Figura 3.9: $2U''$ per incollamento.

3.2 $f(L_1 \cup g(L_1))$ è un insieme algebrico non singolare.

L'insieme $f(L_1 \cup g(L_1)) \setminus (V_1 \cup g(L_1)) = f(L_1 \setminus V_1)$ è algebrico non singolare per il lemma 3.1, inoltre $f(L_2 \cup (L_1 \setminus V_1)) = L_2 \cup f(L_1 \setminus V_1)$ è un sottoinsieme algebrico L di W . Da notare che un intorno regolare di L in W è isotopo ad un intorno regolare di $L_2 \cup (L_1 \setminus V_1)$ in U'' il cui bordo è isotopo a sua volta al nodo $h(N) = \partial U'$.

Siano p e q polinomi aperti tali che $W = V(p)$ e $L = V(q)$, e siano p^* e q^* i polinomi omogenei ad essi associati.

Si consideri l'insieme algebrico

$$Z = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t^{2\deg(q)+1} = (q^*(t, x))^2 \text{ e } p^*(t, x) = 0\}.$$

Se $(t, x) \in Z$ allora $t \geq 0$, inoltre se $t = 0$ allora $p^*(0, x) = 0$ così $x = 0$ essendo p un polinomio aperto.

Quindi $\varepsilon S^3 \cap Z = \varepsilon H^3 \cap Z$ con $\varepsilon H^3 = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t^2 + |x|^2 = \varepsilon^2, t > 0\}$ semisferetta superiore.

Se $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \varepsilon H^3$ è il diffeomorfismo

$$\varphi_\varepsilon(y) = (\varepsilon, \varepsilon y)/(1 + |y|^2)^{1/2} \text{ allora}$$

$$\varphi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon H^3 \cap Z) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid p(y) = 0 \text{ e } q^4(y)(1 + |y|^2) = \varepsilon^2\} =$$

$$\{y \in W \mid q^4(y)(1 + |y|^2) = \varepsilon^2\} \text{ infatti:}$$

$$y \in \varphi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon H^3 \cap Z) \iff \varphi_\varepsilon(y) \in \varepsilon H^3 \cap Z \iff (t, x) = \varepsilon(1, y)/\sqrt{1 + |y|^2}$$

soddisfa le equazioni di Z .

Si deve avere

$$(t, x) = \varepsilon(1, y)/\sqrt{1 + |y|^2} = (\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2}, \varepsilon y/\sqrt{1 + |y|^2}),$$

$$t = \varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2}, \quad x = \varepsilon y/\sqrt{1 + |y|^2}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$(\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2})^{2deg(q)+1} = (q^*(\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2}, \varepsilon y/\sqrt{1 + |y|^2}))^2,$$

$$(\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2})^{2deg(q)+1} = [(\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2})^{deg(q)} q^*(1, y)]^2,$$

$$(\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2})^{2deg(q)+1} = (\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2})^{2deg(q)} q(y)^2,$$

$$\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2} = q(y)^2,$$

$$\varepsilon^2/(1 + |y|^2) = q(y)^4,$$

$$q(y)^4(1 + |y|^2) = \varepsilon^2.$$

Dalla seconda equazione si ha:

$$p^*(\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2}, \varepsilon y/\sqrt{1 + |y|^2}) = 0,$$

$$(\varepsilon/\sqrt{1 + |y|^2})^{deg(p)} p^*(1, y) = 0,$$

$$p(y) = 0.$$

Essendo $q^4(y)(1 + |y|^2) = 0$ solamente su L , da [Kin] si ha che: per un ε abbastanza piccolo $\varphi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon H^3 \cap Z)$ è il bordo di un intorno regolare differenziabile di L in W , quindi:

$$\varphi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon H^3 \cap Z) \text{ è isotopo a } h(N),$$

$$\varepsilon H^3 \cap Z \text{ è isotopo a } \varphi_\varepsilon(h(N)),$$

$$\varepsilon S^3 \cap Z \text{ è isotopo a } \varepsilon N \text{ in } \varepsilon S^3, \text{ in quanto}$$

$$\varphi_\varepsilon(h(N)) \text{ e } \varepsilon N \text{ sono nodi equivalenti in } \varepsilon S^3.$$

q.e.d.

Bibliografia

- [AK81a] S. Akbulut-H. King, *All Knots are algebraic*, Comment. Math. Helvetici 56, pp. 339-351, 1981.
- [AK81b] S. Akbulut-H.C. King, *The Topology of Real Algebraic Sets with Isolated Singularities*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 113, No. 3. (May, 1981), pp. 425-446.
- [BZ85] G. Burde e H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter, 1985.
- [FG82] P.A. Firby, C.F. Gardiner, *Surface Topology*, Ellis Horwood Limited, 1982.
- [Kin] H. King, *Algebraic regular neighborhoods*, in pubblicazione.
- [Kos88] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli Editore S.p.A, 1988.
- [Kosi93] A.A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Academic Press Inc., 1993.
- [Lic97] W.B.R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer, 1997.
- [Mas67] W.S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Salomon Boscher and W.G. Lister Editors, 1967.

- [PS97] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Knots, Links Braids and 3-Manifolds*,
An introduction to New Invariants in Low-Dimensional Topology,
American Mathematical Society, 1997.
- [Rol03] D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, 2003.
- [Rud83] L. Rudolph, *Topology*, vol. 22, no. 2, pp. 191-203, 1983.

Indice analitico

- ε -sfera, 29
- m_i -manico, 10
- applicazione differenziabile, 3, 5
 - regolare, 6
- atlante, 2
 - differenziabile, 4
 - orientato, 6
- carta locale, 2
 - cambiamento di -, 4
 - differenziabilmente compatibile, 3
- compattificazione di *Alexandroff*, 26
- conservazione dell'orientazione, 6, 8
- curva, 3
- diffeomorfismo, 3, 6
- ideale generato, 23
- immersione, 14
- insieme algebrico reale, 22
 - non singolare, 26
 - chiuso proiettivamente, 25
 - dimensione dello -, 25
- insieme delle non singolarità, 26
- intorno regolare differenziabile, 11
- isotopia
 - ε -, 16
 - differenziabile, 15
- link, 14
 - di *Hopf*, 15
- matrice Jacobiana, 3
- mosse di *Reidemeister*, 17
- nastro di *Moebius*, 7
- nodo, 14
 - banale, 15
 - diagramma del -, 17
 - docile, 14
 - equivalente, 15
 - isotopicamente equivalente, 15
 - selvaggio, 14
- omotopia, 15
- polinomio
 - aperto, 25
 - deomogeneizzazione di un -, 25

- omogeneizzato di un -, 25
- proiezione
 - non degenerare, 17
 - stereografica, 26
- punto
 - doppio proprio, 17
 - non singolare di dimensione d , 25
- rango, 3, 6
- separazione compatta, 27
- somma connessa, 8
 - caso bidimensionale, 8
- sottovarietà differenziabile, 6
- struttura
 - differenziabile, 4
- superficie, 3
 - di *Seifert*, 18
 - orientabile, 9
- teorema di
 - Reidemeister*, 17
 - Schönflies*, 16
 - algebricità dei nodi**, 29
 - trasformazione in bande, 10
- trifoglio destro e sinistro, 15
- varietà topologica
 - con bordo, 2
 - differenziabile, 5
 - doppio della -, 9
 - orientabile, 7
 - orientata, 7
 - orientazione di una -, 7

Elenco delle figure

1.1	$\varphi_{\alpha\beta}$ applicazione che cambia le coordinate.	4
1.2	f applicazione differenziabile tra varietà.	5
1.3	una superficie non orientabile (nastro di Moebius).	7
1.4	somma connessa nel caso di due superfici.	8
1.5	somma connessa nel caso di due tori.	9
1.6	$S^2 \cong 2B^2$	10
1.7	manici nel caso bidimensionale.	11
1.8	intorno regolare/tubolare caso $m = 2$	12
1.9	intorno regolare/tubolare caso $m = 1$	12
2.1	link di Hopf.	15
2.2	trifoglio destro e sinistro.	16
2.3	nodi banali.	16
2.4	tipi di punti.	17
2.5	mosse di Reidemeister.	18
2.6	una superficie di Seifert.	19
2.7	tabella dei nodi fino ad otto incroci.	20
3.1	$V(x_1^2 + x_2^2 - 1) = S^1$	23
3.2	un altro insieme algebrico reale.	24
3.3	toro di rotazione intorno all'asse x	24

3.4	compattificazione del piano.	27
3.5	toro di rotazione intorno all'asse x	29
3.6	la Seifert connessa al toro.	30
3.7	U'' in \mathbb{R}^3 dopo astrazione e riduzione in bande.	31
3.8	caratterizzazioni delle L_i	31
3.9	$2U''$ per incollamento.	32