

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E APPLICAZIONI
(CLASSE L-35)

Superfici regolari nello spazio con
curvatura di Gauss nulla



Elaborato Finale in Geometria differenziale

Candidato:

Davide Pomeri

Relatore:

Prof. Riccardo Piergallini

ANNO ACCADEMICO 2020 - 2021

Indice

Introduzione	vii
1 Superfici regolari nello spazio	1
1.1 Operatore forma e curvature	4
1.2 Prima e seconda forma fondamentale	8
1.3 Isometrie	11
1.4 Geodetiche e applicazione esponenziale	15
2 Derivata covariante e simboli di Christoffel	21
2.1 Derivata covariante in spiccioli	21
2.2 Equazioni delle geodetiche e linee asintotiche	23
2.3 Curvatura di Gauss in coordinate normali	26
3 Superfici con curvatura di Gauss nulla	33
3.1 Forma canonica	33
3.2 Il teorema di Massey	36
3.3 Toro piatto equilatero	45
A	53
A.1 Elementi di topologia	53
A.2 Equazioni di Codazzi-Mainardi	55
A.3 Campi vettoriali: cenni	57
Bibliografia	61

*A mamma e babbo
e ai loro sacrifici*

Introduzione

La geometria differenziale di curve e superfici può essere classificata e divisa in due componenti. La prima si concentra sullo studio di proprietà locali, ovvero proprietà che dipendono dal comportamento di una curva o superficie nell'intorno di un punto. La seconda, cosiddetta geometria differenziale globale, si concentra sullo studio di proprietà estese all'intera curva o superficie.

In questo elaborato vengono discussi alcuni importanti risultati globali legati a superfici a curvatura gaussiana costante e nulla; in particolare, si vedrà che le uniche superfici a curvatura costante nulla immerse nello spazio euclideo sono cilindri e/o piani. Tale asserto, dimostrato abbastanza recentemente prima da P. Hartman e L.Nirenberg[4] (1959) poi da William S. Massey[3] (1962), rappresenta dunque il fulcro della tesi.

Per la trattazione, soprattutto per quanto riguarda la dimostrazione di W.S. Massey, ci si è basati essenzialmente sui testi di Manfredo P. do Carmo[1] e su quello di M. Abate ed E.Tovena[2], opportunamente integrati dove necessario.

L'elaborato è strutturato come segue: nel primo capitolo vengono introdotte le superfici, ed alcuni strumenti matematici di base che intervengono nella definizione di curvatura gaussiana di una superficie con relative immagini ed esempi; in questo capitolo vengono presentate anche le geodetiche, riprese in seguito.

Nel secondo capitolo si passa alla trattazione di altre nozioni utili alla dimostrazione del teorema centrale, quali la derivata covariante, che ci permette di ricavare le equazioni delle geodetiche, e le coordinate normali.

Il terzo capitolo, infine, è dedicato al teorema di classificazione delle superfici a curvatura Gaussiana identicamente nulla, con i relativi lemmi e proposizioni preliminari di cui si serve; per la dimostrazione del teorema, si è scelto di seguire quella

di Hartman-Niremberg. Si è dedicata una sezione alla descrizione dell'attività di stage svolta al termine dell'anno accademico, in cui si discute la possibilità di realizzare un toro piatto formato da soli triangoli equilateri.

L'appendice finale contiene chiarimenti su altri concetti che vengono ripresi durante l'esposizione dei precedenti argomenti, come nozioni legate alla topologia e le equazioni di Mainazzi-Codardi.

Capitolo 1

Superfici regolari nello spazio

In questo capitolo si introdurranno le superfici regolari in \mathbb{R}^3 ponendo particolare attenzione alle strutture geometriche fondamentali e alla nozione di curvatura; strumenti che verranno utilizzati e approfonditi nei capitoli successivi

Definizione 1.1. Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare $\iff \forall p \in S \exists \omega : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto (connesso) e $A = \omega(U)$ intorno aperto di p in S tale che

1. ω è un'immersione topologica, ovvero $\omega : U \rightarrow \omega(U)$ omeomorfismo ($A \cong U \subset \mathbb{R}^2$);
2. ω è differenziabile, cioè se scriviamo

$$\omega(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)), \quad (u_1, u_2) \in U,$$

le funzioni $x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)$ hanno tutte le derivate parziali di qualsiasi ordine continue in U ;

3. ω è regolare, ovvero i vettori $X_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u_1}$ e $X_2 = \frac{\partial \omega}{\partial u_2}$ sono linearmente indipendenti.

La condizione di regolarità equivale a richiedere che

$$rg \begin{bmatrix} | & | \\ X_1 & X_2 \\ | & | \end{bmatrix} = rg \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{bmatrix} = 2$$

In particolare, detto $p = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \omega(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in S$, le condizioni 1 e 3 garantiscono l'esistenza del piano tangente alla superficie S nel punto p , la cui equazione parametrica è data da

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \frac{\partial x}{\partial u_1} \Big|_{u=\bar{u}}(u_1 - \bar{u}_1) + \frac{\partial x}{\partial u_2} \Big|_{u=\bar{u}}(u_2 - \bar{u}_2) \\ y = \bar{y} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \Big|_{u=\bar{u}}(u_1 - \bar{u}_1) + \frac{\partial y}{\partial u_2} \Big|_{u=\bar{u}}(u_2 - \bar{u}_2) \\ z = \bar{z} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \Big|_{u=\bar{u}}(u_1 - \bar{u}_1) + \frac{\partial z}{\partial u_2} \Big|_{u=\bar{u}}(u_2 - \bar{u}_2) \end{cases}$$

ove $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. In realtà, come si vede dall'equazione, l'esistenza e la continuità del piano tangente dipende solo dall'esistenza e continuità delle derivate parziali del primo ordine.

Data una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$, possiamo quindi associare ad ogni punto $p = \omega(u_1, u_2) = \omega(u) \in S$ i due vettori $X_1(u)$ e $X_2(u)$, tangenti a S e tra loro linearmente indipendenti, i quali generano per l'appunto il piano $T_p S$ tangente a S in p : $T_p S = \langle X_1(u), X_2(u) \rangle$.

Inoltre, fissato un verso di percorrenza per gli angoli (in tal caso la superficie si dice orientata), al variare di $p \in S$ associamo a $T_p S$ il versore $N(p) = \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{|X_1(u) \times X_2(u)|}$, detto versore normale a S in p .

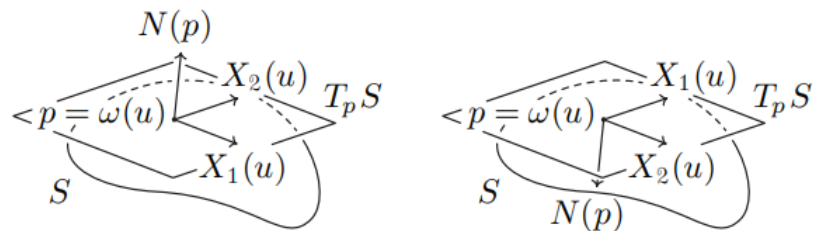


Figura 1.1

Osservazione 1.2. I vettori X_1 e X_2 dipendono dalla parametrizzazione ω : in generale essi non sono né ortogonali né di norma unitaria. Invece, T_pS e $N(p)$ sono univocamente determinati (non dipendono da ω).

Un'altra nozione di cui ci serviremo in seguito è quella di derivata direzionale; sia nuovamente $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e diamo la seguente

Definizione 1.3. Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice differenziabile in $p \in S$ se $f \circ \omega : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile $\forall \omega : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione locale regolare di S intorno a p .

Definizione 1.4. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta differenziabile se f è differenziabile in $p \forall p \in S$.

Con un piccolo abuso di notazione indicheremo spesso con $X_i(p)$ il vettore $X_i(u)$, ove $p = \omega(u) \in S$ ($i = 1, 2, u = (u_1, u_2)$). Ora, consideriamo un qualsiasi vettore $V \in T_pS$; se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ sono le componenti di V rispetto alla base $(X_1(p), X_2(p))$ che genera il piano tangente, possiamo scrivere $V = v_1X_1(p) + v_2X_2(p)$.

Definizione 1.5. Data $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione differenziabile e $V \in T_pS$, definiamo la derivata direzionale di f rispetto a V come

$$\frac{\partial f}{\partial V} = v_1 \frac{\partial(f \circ \omega)}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial(f \circ \omega)}{\partial u_2}.$$

Riportiamo, senza dimostrazione, alcune proprietà notevoli di cui gode la derivata direzionale.

Proposizione 1.6. *Sia S una superficie regolare nello spazio, $p \in S$. Allora, comunque presi $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione differenziabile e $V \in T_pS$ si ha:*

1. $\frac{\partial f}{\partial V}$ è ben definita: essa non dipende dalla particolare parametrizzazione ω della superficie S ;
2. $\frac{\partial f}{\partial(aV + bW)} = a \frac{\partial f}{\partial V} + b \frac{\partial f}{\partial W} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall V, W \in T_pS$;
3. $\frac{\partial(af + bg)}{\partial V} = a \frac{\partial f}{\partial V} + b \frac{\partial g}{\partial V} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall f, g : S \rightarrow \mathbb{R}^n$;

$$4. \quad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial V} = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot g(p) + \frac{\partial g}{\partial V} \cdot f(p) \quad \forall f, g : S \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

1.1 Operatore forma e curvature

In questa sezione studieremo ulteriori strutture geometriche su superfici regolari nello spazio, sfruttando i concetti appena introdotti. Iniziamo osservando che, data una superficie regolare $S \in \mathbb{R}^3$ e un punto $p \in S$, possiamo considerare il versore normale $N(p)$ come una funzione che ad ogni punto della superficie associa un vettore libero nello spazio:

$$\begin{aligned} N : S &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto N(p) = (N_x(p), N_y(p), N_z(p)). \end{aligned}$$

Definizione 1.7. L'operatore

$$\begin{aligned} L_p : T_p S &\rightarrow T_p S \\ V &\mapsto L_p(V) = -\frac{\partial N}{\partial V} \quad \forall V \in T_p S \end{aligned}$$

è detto operatore forma di S in p

Si noti che un'orientazione opposta scelta sulla superficie S induce un versore normale opposto a cui corrisponde a sua volta un operatore forma L_p opposto.

L_p è ben definito, ovvero $L_p(V) \in T_p S \quad \forall V \in T_p S$. Infatti, poiché $N(p)$ ha norma unitaria per definizione, si ha:

$$\|N(p)\|^2 = \langle N(p), N(p) \rangle = 1 \quad \forall p \in S,$$

derivando il prodotto scalare (costante e pari a 1) rispetto ad un vettore $V \in T_p S$ otteniamo (omettendo per comodità la dipendenza di N da p)

$$0 = \frac{\partial \langle N, N \rangle}{\partial V} = 2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial V}, N \right\rangle \Rightarrow \langle -L_p(V), N \rangle = 0 \Rightarrow L_p(V) \perp N \Rightarrow L_p(V) \in T_p S,$$

ove si è sfruttato il fatto che $\frac{\partial N}{\partial V} = -L_p(V)$.

Inoltre, dalle proprietà della derivata direzionale possiamo scrivere:

$$L_p(aV + bW) = -\frac{\partial N}{\partial(aV + bW)} = -a\frac{\partial N}{\partial V} - b\frac{\partial N}{\partial W} = aL_p(V) + bL_p(W).$$

Tali osservazioni ci permettono di concludere che L_p è un endomorfismo definito nel piano tangente: $L_p \in \text{End } T_p S$

Esempio 1.8. Per un piano α dato da $ax + by + cz + d = 0$, il versore normale

$$N = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

è costante, pertanto $L_p(V) = -\frac{\partial N}{\partial V} \equiv 0$.

Viceversa, sia $N(p)$ costante (e quindi $L(p)$ identicamente nullo per ogni punto p) e consideriamo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ vettore posizione di $p \in S$, $V \in T_p S$. Osserviamo che

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial V} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{x} + tV) - \mathbf{x}}{t} = V$$

e quindi

$$\frac{\partial \langle N, \mathbf{x} \rangle}{\partial V} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial V}, \mathbf{x} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial V} \right\rangle = 0,$$

in quanto $\frac{\partial N}{\partial V} \equiv 0$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial V} = V \in T_p S$, dunque $N \perp V$. Essendo $\frac{\partial \langle N, \mathbf{x} \rangle}{\partial V} = 0$ per ogni vettore V del piano tangente, possiamo concludere che $\langle N, \mathbf{x} \rangle = \text{cost.}$ $\forall \mathbf{x} = p \in S$, condizione che fornisce l'equazione di un piano:

$$\langle N, \mathbf{x} \rangle = \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by + cz = \text{cost.}$$

Definizione 1.9. Dato $p \in S$ definiamo

$$\begin{cases} K(p) := \det L_p \in \mathbb{R} \text{ curvatura di Gauss di } S \text{ in } p, \\ H(p) := \frac{1}{2} \text{tr } L_p \in \mathbb{R} \text{ curvatura media di } S \text{ in } p. \end{cases}$$

Per come sono definite, $K, H: S \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni differenziabili di p . Possiamo anche osservare che $K(p)$ non dipende dall'orientazione in quanto $L_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e dunque il determinante non cambia segno cambiando l'orientazione. $H(p)$, in-

vece, dipende dall'orientazione scelta poiché ad orientazione opposta corrisponde curvatura media opposta in segno.

Esempio 1.10. Riprendendo l'esempio 1.8, si ha immediatamente che una superficie piana S ha curvatura di Gauss e curvatura media nulle, essendo $L_p \equiv 0 \quad \forall p \in S$

Esempio 1.11. Se consideriamo una superficie cilindrica, ottenuta come unione di rette parallele (generatrici) tutte passanti per una curva direttrice C , si ha che lungo la direzione principale T_1 il versore normale non varia. Lungo T_1 , dunque, la curvatura principale è nulla, mentre lungo T_2 la curvatura principale è data dalla curvatura della curva C_2 . Ovvero

$$\begin{cases} k_1(p) = 0 \\ k_2(p) = \pm k_{C_2}(p) \end{cases}$$

e quindi $K(p) = 0$, $H(p) = \pm \frac{k_{C_2}(p)}{2}$, dove il segno dipende dall'orientazione scelta.

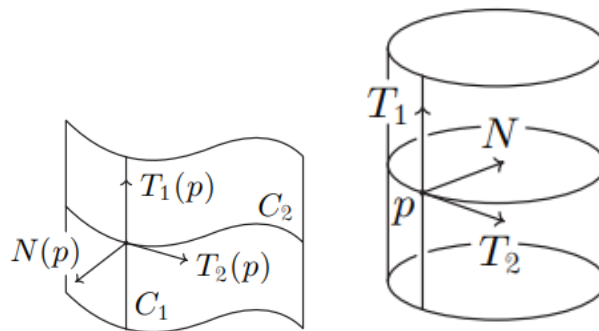


Figura 1.2

Nel caso di un cilindro: $K(p) = 0$, $H(p) = \pm \frac{1}{2r}$ in quanto la curvatura della circonferenza è costante e pari a $1/r$.

Continuiamo ad approfondire questi elementi per vedere poi come essi possano aiutare a descrivere e caratterizzare le superfici nello spazio. A tale scopo, ci serviremo della seguente

Proposizione 1.12. *Siano $S \in \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata, $p \in S \implies L_p$ operatore simmetrico su $T_p S$, ovvero $\langle L_p(V), W \rangle = \langle V, L_p(W) \rangle$*

Dimostrazione. Sia $\omega: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di S intorno a p . Dalla linearità dell'operatore forma e la bilinearità del prodotto scalare, è sufficiente provare che $\langle L_p(X_1), X_2 \rangle = \langle X_1, L_p(X_2) \rangle$. Osserviamo che $\langle N, X_j \rangle = 0$, $j = 1, 2$ per definizione; derivando tale identità rispetto al vettore X_i per $i = 1, 2$, $i \neq j$ si ottiene

$$0 = \frac{\partial \langle N, X_j \rangle}{\partial X_i} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial X_i}, X_j \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial X_j}{\partial X_i} \right\rangle = \langle -L_p(X_i), X_j \rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle,$$

da cui

$$\langle L_p(X_1), X_2 \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle. \quad (1.1)$$

Analogamente

$$\langle L_p(X_2), X_1 \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_1} \right\rangle. \quad (1.2)$$

Poiché ω è differenziabile per definizione, il teorema di Schwarz assicura che le due derivate miste coincidono, e dunque $\langle L_p(X_1), X_2 \rangle = \langle X_1, L_p(X_2) \rangle$. \square

Essendo L_p simmetrico, dal teorema spettrale esiste una base ortonormale dello spazio $T_p S$ formata da due autovettori $T_1(p), T_2(p)$ rispetto alla quale la matrice associata diventa $M_{(T_1, T_2)} L_p = \begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix}$ con $k_1(p), k_2(p)$ autovalori di L_p .

Definizione 1.13. Dato $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, definiamo

$$\begin{cases} k_1(p), k_2(p) & \text{curvature principali di } S \text{ in } p \\ T_1(p), T_2(p) & \text{direzioni principali di } S \text{ in } p \end{cases}$$

Curvatura di Gauss e curvatura media di una superficie regolare possono quindi

essere riscritte in termini di curvatures principali come

$$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p), \quad H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Dalle espressioni di K e H possiamo ricavare

$$k_i(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

Dunque le due curvatures principali $k_i(p): S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ sono funzioni continue e differenziabili $\forall p$ t.c. $k_1(p) \neq k_2(p)$. Se $k_1(p) \neq k_2(p)$ allora $T_1(p), T_2(p)$ sono univocamente determinati a meno del segno e dell'ordine.

1.2 Prima e seconda forma fondamentale

A questo punto, possiamo passare ad un'ulteriore descrizione delle proprietà metriche di una superficie. Innanzitutto introduciamo le seguenti forme bilineari, definite sul piano tangente:

Definizione 1.14. Dato $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, la restrizione al piano tangente del prodotto scalare

$$g_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto g_p(v, w) = \langle v, w \rangle$$

è detta prima forma fondamentale di S in p

Definizione 1.15. Dato $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, definiamo la seconda forma fondamentale di S in p come

$$l_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto l_p(v, w) = \langle L_p(v), w \rangle.$$

Osservazione 1.16. la prima f.f. è una forma bilineare simmetrica definita positiva (tali proprietà sono ereditate dal prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^3) ed intrinseca

alla superficie S . La seconda f.f. è una forma bilineare, simmetrica (dalla simmetria dell'operatore forma), ma non intrinseca, poiché essa dipende anche dalla forma della superficie nello spazio. Insieme, esse caratterizzano la forma di S in p a meno di infinitesimi di ordine > 2 , come vedremo nel capitolo successivo.

Siano ora $p \in S$ e $\omega: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione locale regolare di S intorno a p . Sappiamo che i due vettori $X_i = \frac{\partial \omega}{\partial u_i}$, $i = 1, 2$ generano il piano tangente $T_p S$. Indichiamo con $X_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_i \partial u_j}$ ($= X_{ji}$), $i, j = 1, 2$.

Omettendo per semplicità la dipendenza da p , utilizzeremo la seguente notazione:

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) = \langle X_i, X_j \rangle; \quad g = \det g_{ij}; \quad (g^{ij})_{ij} = (g_{ij})_{ij}^{-1} \rightarrow g^{ij} = \frac{(-1)^{i+j} g_{i\hat{j}}}{g}$$

($i, j = 1, 2$). Si osservi che $g = \|X_1 \times X_2\|^2$, dunque $N = \frac{X_1 \times X_2}{\sqrt{g}}$. Scriviamo inoltre $L_i = L(X_i)$ come combinazione lineare di X_1 e X_2 : $L_i = l_i^1 X_1 + l_i^2 X_2$: la matrice dell'operatore forma L rispetto alla base X_1, X_2 è quindi

$$(L)_{ij} = \begin{bmatrix} l_1^1 & l_1^2 \\ l_2^1 & l_2^2 \end{bmatrix}$$

Definiamo infine la matrice della II f.f. $l_{ij} = l(X_i, X_j) \rightarrow (l)_{ij} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$.

Notiamo che la matrice dell'operatore forma è simmetrica solo se X_1, X_2 è ortogonale, mentre $(l)_{ij}$ lo è sempre. Utilizzando la (1.1) e (1.2) si ha:

$$l_{ij} = l(X_i, X_j) = \langle L_i, X_j \rangle \Rightarrow l_{ij} = l_i^1 g_{1j} + l_i^2 g_{2j} = \sum_{k=1}^2 l_i^k g_{kj} \Rightarrow (l_{ij}) = (l_i^j)(g_{ij}) \quad (1.3)$$

Pertanto:

$$K = \det(l_i^j) = \frac{\det(l_{ij})}{g} = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g} \quad (1.4)$$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(l_i^j) = \frac{l_1^1 + l_2^2}{2} = \frac{l_{11}g_{22} + l_{22}g_{11} - 2l_{12}g_{12}}{2g} \quad (1.5)$$

Esempio 1.17. Calcoliamo la curvatura di Gauss dei punti del toro descritto dalla

parametrizzazione

$$\omega(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

In questo caso dunque, si ha

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ X_v &= -(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), \\ X_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ X_{uv} &= X_{vu} = (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ X_{vv} &= -(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

Da queste otteniamo

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2, & g_{uv} &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ g_{vv} &= \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Per il calcolo dei coefficienti della seconda forma fondamentale occorre conoscere N , che in questo caso è

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{r(a + r \cos u) (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)}{r(a + r \cos u)} = \\ &= -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \end{aligned}$$

quindi (cf. equazioni (1.1) e (1.2))

$$\begin{aligned} l_{uu} &= \langle N, X_{uu} \rangle = r, \\ l_{uv} &= l_{vu} = \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \\ l_{vv} &= \langle N, X_{vv} \rangle = \cos u(a + r \cos u). \end{aligned}$$

Infine

$$K = \frac{l_{uu}l_{vv} - l_{uv}^2}{g} = \frac{r \cos u (a + r \cos u)}{r^2 (a + r \cos u)^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Da questa espressione si vede subito che K non dipende da v ; $K = 0$ lungo i paralleli $u = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{3\pi}{2}$. Nella regione di toro data da $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ K è negativa, mentre è positiva per $0 < u < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$

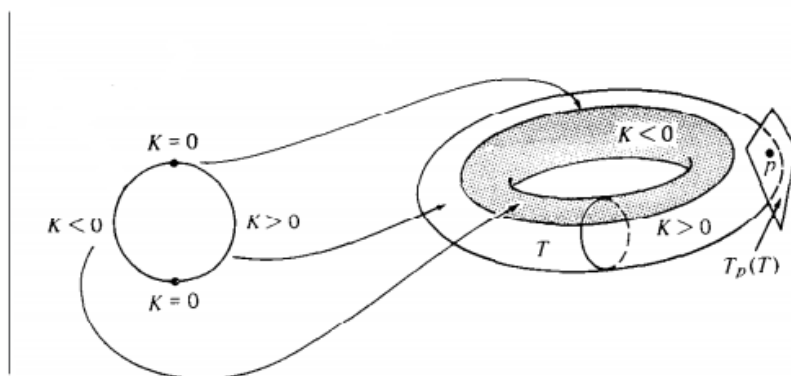


Figura 1.3

Dalla (1.4) e (1.5) possiamo osservare che curvatura di Gauss e curvatura media (quest'ultima a meno del segno¹) sono invarianti per isometrie dello spazio, conservando quest'ultime prima e seconda forma fondamentale, come vedremo meglio in seguito.

1.3 Isometrie

Continuiamo ad introdurre alcuni concetti che ci consentiranno di dimostrare un rilevante risultato riguardante le superfici nello spazio. Consideriamo quindi due superfici regolari $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ e una funzione $f: S_1 \rightarrow S_2$. Sia inoltre $\iota: S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'immersione nello spazio della superficie S_2 .

Definizione 1.18. Diremo che

¹a seconda che l'isometria conservi o meno l'orientazione di \mathbb{R}^3

- f è differenziabile se $\iota \circ f \circ \omega: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è differenziabile $\forall \omega: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ parametrizzazione regolare (locale) di S_1
- f è regolare se $\iota \circ f \circ \omega$ è regolare

Ad ogni $p \in S_1$ possiamo associare alla funzione $f: S_1 \rightarrow S_2$ (sia essa differenziabile e regolare) l'applicazione

$$f_*: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2 \quad \text{t.c.} \quad f_*(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t) \quad \forall \gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1 \text{ differenziabile,}$$

detta applicazione tangente alla f in p . Essa è ben definita $\forall V \in T_p S_1$: infatti, preso V , si può subito trovare una curva passante per p con tale velocità (ad esempio la geodetica γ_V , vedi sezione 2.2). In più, f_* non dipende dalla curva scelta ma solo dal vettore V . Infatti, se $V = v_1 X_1 + v_2 X_2$, presi Y_1, Y_2 i vettori immagine di X_1, X_2 (anch'essi costituiscono una base di $T_{f(p)} S_2$ poiché f è regolare) si ha $f_*(V) = v_1 Y_1 + v_2 Y_2$

$$\Rightarrow f_* \text{ è l'unica appl. lineare da } T_p S_1 \text{ a } T_{f(p)} S_2 \text{ t.c. } f_*(X_1) = Y_1 \text{ e } f_*(X_2) = Y_2$$

Sulla base di quanto appena detto, diamo la definizione di isometria (intrinseca) tra due superfici.

Definizione 1.19. $i: S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria (intrinseca) tra S_1 e S_2 superfici regolari se i è un omeomorfismo differenziabile regolare² t.c. $i_*: T_p S_1 \rightarrow T_{i(p)} S_2$ è un'isometria euclidea $\forall p \in S_1$, cioè $\langle V, W \rangle = \langle i_*(V), i_*(W) \rangle \quad \forall V, W \in T_p S$

Definizione 1.20. Una funzione $\phi: D \rightarrow \bar{S}$, con D intorno di $p \in S$, è un'isometria locale in p se esiste un intorno \bar{D} di $\phi(p) \in \bar{S}$ t.c. $\phi|_D: D \rightarrow \bar{D}$ è un'isometria. Se esiste un'isometria locale di S in \bar{S} per ogni $p \in S$, la superficie S è detta localmente isometrica a \bar{S} . S e \bar{S} sono localmente isometriche se S è localmente isometrica a \bar{S} e viceversa.

Possiamo caratterizzare le isometrie tra due superfici anche nel modo seguente: diremo che $i: S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria se essa conserva la prima forma fondamentale. Infatti, date $\omega_1: U \rightarrow S_1$ parametrizzazione locale regolare di S_1 e $\omega_2 = i \circ \omega_1: U \rightarrow S_2$ parametrizzazione locale regolare di S_2 , restano definite le due basi dei piani tan-

²cioè $i: S_1 \rightarrow S_2$ diffeomorfismo

genti $T_p S_1, T_{i(p)} S_2$ (con $p = \omega_1(u_1, u_2), i(p) = \omega_2(u_1, u_2)$), indicate rispettivamente con $\{X_1^{\omega_1}, X_2^{\omega_1}\}$ e $\{X_1^{\omega_2}, X_2^{\omega_2}\}$. Per controllare che $i_*: T_p S_1 \rightarrow T_{i(p)} S_2$ conservi il prodotto scalare è sufficiente controllare che ciò sia vero per gli elementi della base (dalla bilinearità), cioè

$$g_{ij}^{\omega_2} = \langle X_i^{\omega_2}, X_j^{\omega_2} \rangle = \langle X_i^{\omega_1}, X_j^{\omega_1} \rangle = g_{ij}^{\omega_1}.$$

Esempio 1.21. Siano S una superficie di rotazione e

$$\omega(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

$$a \leq v \leq b, \quad 0 < u < 2\pi, f(v) > 0,$$

una parametrizzazione di S . I coefficienti della prima forma fondamentale di S nella parametrizzazione ω sono dati da

$$g_{uu} = (f'(v))^2, \quad g_{uv} = 0, \quad g_{vv} = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$

In particolare, la superficie di rotazione della catenaria

$$x = a \cosh v, \quad z = av, \quad -\infty < v < \infty,$$

è descritta da

$$\omega(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av) \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

per la quale i coefficienti della I f.f. sono

$$g_{uu} = a^2 \cosh^2 v, \quad g_{uv} = 0, \quad g_{vv} = a^2(1 + \sinh^2 v) = a^2 \cosh^2 v.$$

Tale superficie è detta catenoide. Mostriamo che la catenoide è localmente isometrica all'elicoide \bar{S} ; una parametrizzazione dell'elicoide è

$$\bar{\omega}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Con il cambio di variabile

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

che è lecito, essendo la trasformazione biettiva e il suo Jacobiano

$$J = a \cosh v$$

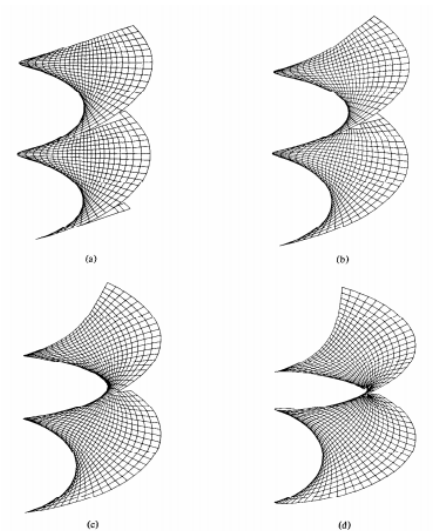
ovunque non nullo, la nuova parametrizzazione dell'elicoide ottenuta è

$$\bar{\omega}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au),$$

e i relativi coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$g_{uu} = a^2 \cosh^2 v, \quad g_{uv} = 0, \quad g_{vv} = a^2 \cosh^2 v.$$

Possiamo dunque concludere, in base a quanto detto in precedenza, che catenoide e elicoide sono localmente isometriche. La figura seguente ci dà un'idea di come opera l'isometria $\bar{\omega} \circ \omega^{-1}: \omega(U) \rightarrow \bar{S}$:



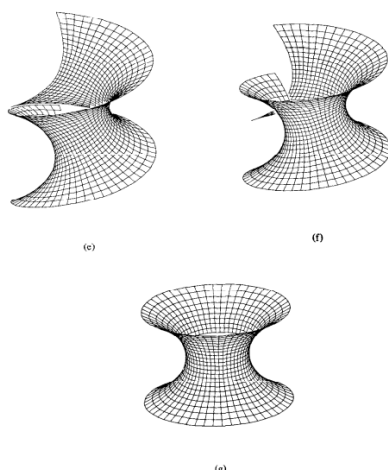


Figura 1.4: deformazione isometrica dell'elicoide in catenoide

Riportiamo infine (senza dimostrazione[1]) un importante risultato che ci permetterà di introdurre la classificazione globale di superfici a curvatura costante nulla.

Teorema 1.22 (Minding). *Siano S_1, S_2 due superfici regolari con la stessa curvatura K costante; scegliamo due punti qualsiasi $p_1 \in S_1, p_2 \in S_2$ e basi ortonormali $\{X_1, X_2\}$ e $\{Y_1, Y_2\}$ rispettivamente di $T_{p_1}S_1$ e $T_{p_2}S_2$.*

Allora esistono due intorni aperti A_1 di p_1 e A_2 di p_2 e un'isometria $f: A_1 \rightarrow A_2$ t.c. $f(p_1) = p_2$ e $f_(X_i) = Y_i \quad i = 1, 2$.*

Il teorema di Minding assicura dunque che due qualsiasi superfici regolari con la stessa, costante curvatura di Gauss sono localmente isometriche.

1.4 Geodetiche e applicazione esponenziale

Proseguiamo sinteticamente lo studio di nuovi argomenti che ci saranno utili per la discussione e dimostrazione di alcuni importanti teoremi. In particolare, iniziamo considerando curve all'interno di superfici: sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata, e $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva regolare orientata; allora i due vettori $(T_C(p)^3, N_S(p) \times T_C(p))$ costituiscono una base ortonormale positiva per

³vettore tangente alla curva C in p

$T_p S$. Dalla teoria sulle curve nello spazio, sappiamo che il vettore curvatura è $K_C(p) = T'(s) = \alpha''(s)$, ove il pedice specifica che si tratta del vettore curvatura della curva C e $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione naturale di C (ossia $\|\alpha'(s)\| = 1 \quad \forall s \in I$). Il vettore $K_C(p)$ appartiene al piano generato da $N_S(p)$ e $N_S(p) \times T_C(p)$, rispettivamente il versore normale ad S e il versore normale alla curva nella superficie.

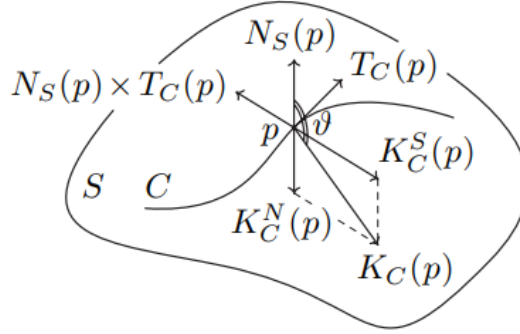


Figura 1.5

Definizione 1.23. Con la notazione appena introdotta, sono definiti:

- $K_C^N(p) = \pi_{N_S(p)}(K_C(p))$ vettore curvatura normale (a S);
- $K_C^S(p) = \pi_{T_p S}(K_C(p))$ vettore curvatura geodetica (in S)

Si noti che, per definizione, $K_C^N(p)$ sarà un opportuno multiplo di $N_S(p)$. Lo stesso vale per $K_C^S(p)$ e $N_S(p) \times T_C(p)$.

Definizione 1.24. Definiamo

- $k_c^N(p) = \langle K_C(p), N_S(p) \rangle = \pm \|K_C^N(p)\|$ curvatura normale di C in p
- $k_c^S(p) = \langle K_C(p), N_S(p) \times T_C(p) \rangle$ curvatura geodetica di C in p

La curvatura normale di C in p dipende (in segno) solo dall'orientazione della superficie. La curvatura geodetica dipende invece dall'orientazione sia della superficie che di C (invertendo il verso di percorrenza di C si ottiene $T_C(p)$ opposto e quindi il prodotto vettore cambia segno).

Teorema 1.25 (Meusnier). *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e C una curva contenuta in S . Allora, dato $p \in C$, si ha $k_c^N(p) = l(T_C(p), T_C(p))$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di curvatura normale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} k_c^N(p) &= \langle K_C(p), N_S(p) \rangle = \left\langle \frac{\partial T_C}{\partial T_C(p)}, N_S(p) \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial N_S}{\partial T_C(p)}, T_C(p) \right\rangle = \\ &= L_p(T_C(p), T_C(p)) = l(T_C(p), T_C(p)). \end{aligned}$$

ove si è sfruttato il fatto che $\frac{\partial}{\partial T_C(p)} \langle T_C, N_S \rangle = 0$, essendo T_C e N_S sempre ortogonali. \square

Dunque per $p \in S$ e $T \in T_p S$ possiamo dire che $k(T) = l_p(T, T)$ è la curvatura normale di tutte le curve contenute in S , passanti per p e aventi direzione T in p .

Definizione 1.26. $T \in T_p S$ è una direzione asintotica se $k(T) = l_p(T, T) = 0$. Chiamiamo invece linea asintotica una curva contenuta in S il cui vettore tangente è in ogni punto una direzione asintotica.

Torniamo a considerare una superficie $S \subset R^3$. A questo punto, possiamo dare la seguente

Definizione 1.27. Una curva $C \subset S$ si dice linea geodetica s.se ha curvatura geodetica $k_c^S(p)$ nulla $\forall p \in C$.

Esempio 1.28. Le circonferenze massime di un sfera S^2 sono geodetiche. Infatti, tali circonferenze massime C sono ottenute intersecando la sfera con un piano passante per il centro O della sfera. Il versore normale alla curva in un punto $p \in C$ giace sul prolungamento del raggio che connette p con O in quanto C è una circonferenza con centro in O . Essendo S^2 una sfera, il versore normale alla superficie si trova sulla stessa direzione; dunque $k_c^S(p) = \langle K_C(p), N_S(p) \times T_C(p) \rangle = 0 \quad \forall p \in C$

Definizione 1.29. Diciamo che $\gamma: I \rightarrow S$ è una parametrizzazione geodetica di C s.se $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ costante.

Essendo la curvatura geodetica la proiezione sul piano tangente del vettore curvatura di C , si ha che $C \subset S$ è una geodetica se e solo se $\langle K_C(p), X_{1,2}(p) \rangle = 0 \forall p \in C$. Dato un punto $p \in S$ e un vettore non nullo $V \in T_p S$, esiste un'unica geodetica (vedi sezione 2.2) parametrizzata da $\gamma: I_V \rightarrow S$ con

$$\begin{cases} \gamma(0) = p \\ \gamma'(0) = V \end{cases}$$

cioè passante per p con velocità iniziale V ; I_V è l'intervallo massimale di definizione di tale geodetica. Per evidenziare la dipendenza di γ dal vettore iniziale V , scriveremo $\gamma_V(t)$. Se $V \in T_p S$ è tale che $\gamma_{\frac{V}{\|V\|}}(\|V\|) = \gamma_V(1)$ è definita⁴, poniamo

$$\begin{aligned} \exp_p: D_p &\rightarrow S \\ V &\mapsto \exp_p(V) = \gamma_V(1) \end{aligned}$$

con $0 \in D_p \subset T_p S$ aperto: tale funzione è detta applicazione esponenziale. Geometricamente, la costruzione corrisponde a percorrere sulla superficie un tratto di curva di lunghezza pari a $\|V\|$ lungo la geodetica che passa per p nella direzione data da V .

Proposizione 1.30. *Sia $p \in S$ superficie regolare in \mathbb{R}^3 . Allora esiste $\epsilon > 0$ t.c. \exp_p è ben definita e differenziabile in $B_\epsilon = B(0, \epsilon) \subset T_p S$.*

Dimostrazione. È chiaro che per ogni direzione di $T_p S$, sfruttando l'omogeneità delle geodetiche, è possibile prendere V sufficientemente piccolo in modo che $1 \in I_V$ e dunque $\gamma_V(1) = \exp_p(V)$ è ben definita. Ora, mostriamo che tale operazione si può fare in ogni direzione di $T_p S$.

Dal teorema di dipendenza di una geodetica dalle condizioni iniziali, sappiamo che dato $p \in S$ esistono $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ e una mappa differenziabile

$$\gamma: (-\epsilon_2, \epsilon_2) \times B_{\epsilon_1} \rightarrow S$$

⁴Dalla proprietà di omogeneità delle geodetiche. Intuitivamente, poiché la velocità di una geodetica è costante per definizione, possiamo percorrere la sua traccia entro un tempo stabilito "adattando" in modo appropriato la velocità iniziale

tale che, per $V \in B_{\epsilon_1}$, $V \neq 0$ e $t \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$ la curva $\gamma_V(t)$ è la geodetica (unica) di S con $\gamma_V(0) = p$, $\gamma'_V(0) = V$, e per $V = 0$ abbiamo che $\gamma(t, 0) = p$. Da tale affermazione e dalla proprietà di omogeneità segue il nostro asserto. Infatti, poiché $\gamma_V(t)$ è definita per $|t| < \epsilon_2$, $|Vw| < \epsilon_1$, ponendo $\lambda = \frac{\epsilon_2}{2}$ otteniamo che $\gamma_{\frac{\epsilon_2}{2}V}(t)$ è definita per $|t| < 2$, $|V| < \epsilon_1$. Pertanto, scegliendo una boccia $B_\epsilon \subset T_p S$ con centro nell'origine e raggio $\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2}$ abbiamo che $\gamma_W(1) = \exp_p(W)$, $W \in B_\epsilon$ è definita. La differenziabilità di \exp_p in B_ϵ segue dalla differenziabilità di γ . \square

Esempio 1.31. $\exp_p(V)$ è definita nella sfera unitaria per ogni $V \in T_p S^2$. L'immagine tramite applicazione esponenziale dei punti appartenenti alla circonferenza (contenuta nel piano tangente) di centro p e raggio $\pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$ coincide con q , il punto antipodale di p . I punti della circonferenza di centro p e raggio $2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$ vengono invece mandati in p (la circonferenza massima di una sfera unitaria ha infatti lunghezza pari a $2\pi r = 2\pi$).

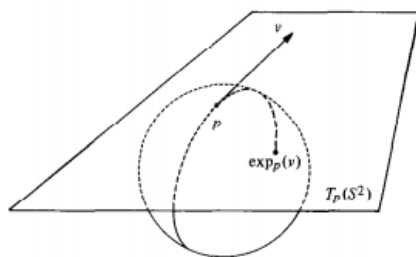


Figura 1.6

D'altra parte, se consideriamo la superficie regolare S formata da un cono privo del suo vertice, $\exp_p(V)$ non è definita per un vettore $V \in T_p S$ nella direzione del meridiano che connette p al vertice, quando $|V| \geq d$, ove d è la distanza di p dal vertice.

Comunque, l'applicazione esponenziale è sempre definita e differenziabile in qualche intorno sufficientemente piccolo di p .

L'applicazione esponenziale ci consente di introdurre un sistema di coordinate sulla superficie S che mappa le geodetiche uscenti da 0 nel piano tangente (rette) in geodetiche uscenti da p nella superficie, conservando le lunghezze radiali.

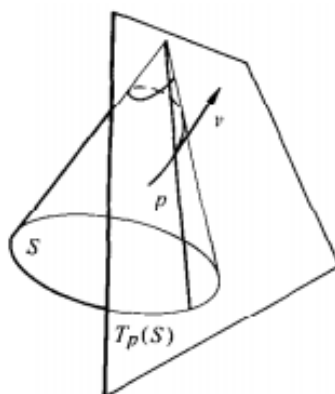


Figura 1.7

Definizione 1.32. Una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice completa se $I_V = \mathbb{R} \forall V \in T_p S, \forall p \in S$.

Analogamente, S è completa se $D_p = T_p S \forall p \in S$.

Intuitivamente, una superficie sarà quindi completa se le sue geodetiche possono essere prolungate indefinitamente in ogni direzione o, analogamente, se le geodetiche di tale superficie sono definite per tutti i tempi.

Esempio 1.33. Il piano è una superficie (geodeticamente) completa: per ogni punto p e per ogni vettore V nel piano tangente (che corrisponde alla superficie stessa), la geodetica passante per p con velocità V è la retta $\gamma_V(t) = p + tV, t \in \mathbb{R}$. Essa soddisfa l'equazione delle geodetiche e $I_V = \mathbb{R} \forall p \in S \forall V \in T_p S$.

Esempio 1.34. Nella sfera S^2 , abbiamo visto che le geodetiche sono date dalle circonferenze massime: anche se tali curve sono chiuse, possiamo percorrerle indefinitamente, pertanto $I_V = \mathbb{R} \forall p \in S \forall V \in T_p S$, dato che per ogni punto p e per ogni vettore V possiamo sempre trovare una circonferenza massima passante per p percorsa a velocità V .

Capitolo 2

Derivata covariante e simboli di Christoffel

2.1 Derivata covariante in spiccioli

Introduciamo una nuova nozione di derivata, "interna" alla superficie, che ci consentirà di scrivere l'equazione delle geodetiche.

A tale scopo, siano $p \in S \subset \mathbb{R}^3$, $V \in T_p S$, e $W: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo di vettori differenziabile che ad ogni punto $q \in S$ associa un vettore del piano tangente $T_q S$.

Definizione 2.1. Definiamo la derivata covariante di W rispetto al vettore V nella superficie S come

$$\nabla_V^S W = \pi_{T_p S} \left(\frac{\partial W}{\partial V} \right) \in T_p S.$$

Per non appesantire troppo la notazione, ometteremo l'apice S .

Proposizione 2.2. *Nelle ipotesi di cui sopra, la derivata covariante gode delle seguenti proprietà:*

1. $\nabla_V W$ è lineare rispetto a V : $\nabla_{aV_1+bV_2} W = a\nabla_{V_1} W + b\nabla_{V_2} W \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$;

2. $\nabla_V W$ è lineare rispetto a W : $\nabla_V(aW_1+bW_2) = a\nabla_V W_1+b\nabla_V W_2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$;
3. data $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, si ha $\nabla_V(fW) = \frac{\partial f}{\partial V}W + f\nabla_V W$ (segue dalla linearità della proiezione π);
4. Se W_1, W_2 sono campi vettoriali differenziabili su S , allora, considerando

$$W_1 \cdot W_2: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q \mapsto (W_1 \cdot W_2)(q) = \langle W_1(q), W_2(q) \rangle$$

si ha

$$\frac{\partial(W_1 \cdot W_2)}{\partial V} = \nabla_V W_1 \cdot W_2 + W_1 \cdot \nabla_V W_2.$$

Vediamo ora come scrivere la derivata covariante in S in termini di una parametrizzazione locale regolare $\omega: U \rightarrow S$ intorno ad un punto $p = \omega(u_1, u_2) \in S$. Sappiamo che $T_p S$ è generato dai vettori $\{X_1, X_2\}$, con $X_i = \frac{\partial \omega}{\partial u_i}$, $i = 1, 2$; dunque possiamo scrivere qualsiasi vettore $V \in T_p S$ come combinazione lineare di X_1, X_2 . Analogamente per il campo di vettori W :

$$V = \sum_{i=1,2} v_i X_i = v_1 X_1 + v_2 X_2 \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R},$$

$$W = \sum_{j=1,2} w_j(u_1, u_2) X_j = w_1(u_1, u_2) X_1 + w_2(u_1, u_2) X_2,$$

ove $w_j(u_1, u_2)$, $j = 1, 2$ sono funzioni differenziabili. Trascurando per semplicità la dipendenza dai parametri u_1, u_2 ed utilizzando le proprietà della derivata covariante possiamo scrivere:

$$\nabla_V W = \nabla_{\sum_i v_i X_i} \sum_j w_j X_j = \sum_{i,j} v_i \nabla_{X_i} (w_j X_j) = \sum_{i,j} v_i \left(\frac{\partial w_j}{\partial X_i} X_j + w_j \nabla_{X_i} X_j \right). \quad (2.1)$$

Possiamo vedere X_j come un campo di vettori che ad ogni punto di S associa il vettore $X_j(u_1, u_2)$ nel piano tangente: definiamo dunque

$$\Gamma_{ij}(u_1, u_2) = \nabla_{X_i(u_1, u_2)} X_j = \pi_{T_p S}(X_{ij}(u_1, u_2)), \quad \text{con } p = \omega(u_1, u_2).$$

A questo punto, come prima, scriviamo le Γ_{ij} nelle componenti X_1, X_2 della base di T_pS :

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^1 X_1 + \Gamma_{ij}^2 X_2 = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k. \quad (2.2)$$

Le componenti Γ_{ij}^k sono dette simboli di Christoffel di I specie, mentre definiamo i simboli di Christoffel di II specie come

$$\Gamma_{ijk} = \langle \Gamma_{ij}, X_k \rangle. \quad (2.3)$$

corrispondenti quindi alla proiezione di Γ_{ij} su X_k , per $i, j, k = 1, 2$.

I simboli di Christoffel di prima e seconda specie sono legati tra loro: sostituendo l'espressione (2.2) di Γ_{ij} nella (2.3) e sfruttando la bilinearità del prodotto scalare otteniamo infatti

$$\Gamma_{ijk} = \left\langle \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l, X_k \right\rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l \langle X_l, X_k \rangle.$$

Ricordando che (vedi sezione 1.2) $\langle X_l, X_k \rangle = g_{lk}$ ed indicando come al solito con g^{lk} l'inversa della prima forma fondamentale abbiamo

$$\begin{cases} \Gamma_{ijk} = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ \Gamma_{ij}^k = \sum_l \Gamma_{ijl} g^{lk}. \end{cases}$$

Utilizzando i simboli di Christoffel l'espressione della derivata covariante di W (campo di vettori tangenti a S) rispetto a $V \in T_pS$ diventa

$$\nabla_V W = \sum_k \left(\sum_i v_i \frac{\partial w_k}{\partial X_i} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_i w_j \right) X_k. \quad (2.4)$$

2.2 Equazioni delle geodetiche e linee asintotiche

Nella sezione precedente abbiamo introdotto la derivata covariante; qui vedremo come utilizzare tali strumenti per ottenere un'equazione che caratterizza le geode-

tiche di una superficie.

Sia dunque $p \in C \subset S$, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ parametrizzazione naturale di una curva C contenuta in S , con $p = \alpha(s) = (u_1(s), u_2(s))$ e $\alpha'(s) = (u'_1(s), u'_2(s))$; possiamo considerare α' come un campo di vettori tangenti a S e scrivere la curvatura geodetica $K_C^S(p) \in T_p S$ in termini dei simboli di Christoffel nella base $\{X_1, X_2\}$; utilizzando la (2.4) si ha:

$$\begin{aligned} K_C^S(p) &= \pi_{T_p S}(K_C(p)) = \pi_{T_p S}(\alpha''(s)) = \\ &= \pi_{T_p S}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha'(s)}\right) = \nabla_{\alpha'(s)}^S \alpha' = \\ &= \sum_k \left(u''_k(s) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k u'_i(s) u'_j(s) \right) X_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Per definizione (vedi sezione 1.4), le linee geodetiche hanno curvatura geodetica nulla; pertanto, se $\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ è una parametrizzazione geodetica, sfruttando l'espressione di $K_C^S(p)$ ottenuta nella (2.5) l'equazione delle geodetiche di una superficie S diventa

$$u''_k(t) = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k u'_i(t) u'_j(t), \quad k = 1, 2. \quad (2.6)$$

Si noti che i coefficienti Γ_{ij}^k sono differenziabili. Dotando le equazioni differenziali del II ordine (2.6) di opportune condizioni al contorno

$$\begin{cases} u_1(0) = \bar{u}_1, & u_2(0) = \bar{u}_2 \\ u'_1(0) = v_1, & u'_2(0) = v_2 \end{cases}$$

otteniamo un problema di Cauchy nelle incognite $u_1(t), u_2(t)$, per il quale sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''_k(t) = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k u'_i(t) u'_j(t) & k = 1, 2 \\ \gamma(0) = p = \omega(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \\ \gamma'(0) = V = (v_1, v_2) \end{cases}$$

Possiamo concludere dicendo che

Proposizione 2.3. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Allora $\forall p \in S, \forall V \in T_p S$*
 $\exists! \gamma_V: I_V \rightarrow S$ parametrizzazione geodetica massimale¹ tale che $\begin{cases} \gamma_V(0) = p \\ \gamma'_V(0) = V \end{cases}$

Se $V \neq 0$, la curva $C_V = \gamma_V(I_V)$ è una linea geodetica (unica) passante per p con velocità iniziale V . Se invece $V = 0$, tale curva si riduce al solo punto p .

Sia ora $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; consideriamo $\gamma_V: I_V \rightarrow S$ e $\gamma: I \rightarrow S$ tale che $\gamma(t) = \gamma_V(at)$. Osserviamo che per tale operazione occorre che $at \in I_V$, dunque se $I_V =]t_1, t_2[$ allora $t \in]\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a}[$. Abbiamo anche che $\gamma'(t) = a\gamma'_V(at)$ e quindi, essendo $\gamma_V(I_V)$ una geodetica:

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma' = \nabla_{a\gamma'_V(at)} a\gamma'_V = a^2 \nabla_{\gamma'_V(at)} \gamma'_V = 0,$$

ovvero anche γ è una parametrizzazione geodetica. Osserviamo inoltre che

$$\gamma(0) = \gamma_V(a \cdot 0) = \gamma_V(0) = p; \quad \gamma'(0) = a\gamma'_V(0) = aV,$$

cioè essa rappresenta l'unica geodetica uscente da p con velocità iniziale aV , perciò:

$$\gamma_{aV}(t) = \gamma_V(at) \quad \forall t \in I_V.$$

Tale proprietà va sotto il nome di omogeneità delle geodetiche. Il dominio di γ_{aV} è $I_{aV} = \frac{I_V}{a}$ e $\gamma_V(I_V) = C_V = C_{aV} = \gamma_{aV}(I_{aV})$: le due curve contenute nella superficie sono uguali, ma parametrizzate a velocità diverse.

Per quanto riguarda le linee asintotiche, consideriamo una parametrizzazione $\omega: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ di una superficie regolare S e una curva $C \subset S$ parametrizzata da $\alpha(s) = \omega(u_1(s), u_2(s))$. Allora, sfruttando il Teorema 1.25 e la bilinearità della

¹ I_V massimale, eventualmente illimitato

seconda forma fondamentale, si ha²

$$\begin{aligned} k(T_C) &= l(T_C, T_C) = l\left(\frac{du_1}{ds}X_1 + \frac{du_2}{ds}X_2, \frac{du_1}{ds}X_1 + \frac{du_2}{ds}X_2\right) = \\ &= \left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 l(X_1, X_1) + 2\frac{du_1}{ds}\frac{du_2}{ds}l(X_1, X_2) + \left(\frac{du_2}{ds}\right)^2 l(X_2, X_2) = \\ &= l_{11}\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + 2l_{12}\frac{du_1}{ds}\frac{du_2}{ds} + l_{22}\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2. \end{aligned}$$

Dunque C sarà una linea asintotica di S se soddisfa l'equazione differenziale

$$l_{11}\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + 2l_{12}\frac{du_1}{ds}\frac{du_2}{ds} + l_{22}\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2 = 0. \quad (2.7)$$

2.3 Curvatura di Gauss in coordinate normali

In questa sezione mostreremo come ottenere l'espressione (3.6) della curvatura di Gauss di una superficie S , che diviene particolarmente semplice quando su S si considera un sistema di coordinate normali.

Vediamo in cosa consistono e le proprietà di cui godono. Diamo prima la seguente

Definizione 2.4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $C \subset S$ una curva regolare orientata. Un campo W di vettori tangenti a S si dice parallelo lungo C se $\nabla_{T_C(p)}W = 0 \quad \forall p \in C$.

Un campo di vettori tangenti ad una superficie S è dunque parallelo lungo una curva C contenuta in S se la proiezione di W' su T_pS è nulla: esso, lungo la curva, varia quanto basta per rimanere tangente a S . In particolare, se la curva C corrisponde ad una parametrizzazione $\gamma(t) = \omega(u_1(t), u_2(t))$ e scriviamo W come $W(t) = \sum_{i=1,2} w_i(t)X_i(\gamma(t))$ si ha che

$$\begin{aligned} W \text{ è parallelo lungo } C &\Leftrightarrow \nabla_{\gamma'(t)}W = 0 \quad \forall t \\ &\Leftrightarrow w'_k(t) = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k u'_i(t)w_j(t). \end{aligned}$$

² $T_C = \alpha'(s)$

Da questa equazione, con un argomento simile a quello utilizzato per le geodetiche, possiamo affermare che per ogni curva $C \subset S$ superficie regolare, per ogni punto $p \in S$ e per ogni $W \in T_p S$ esiste un unico campo di vettori W_C tangenti a S lungo C tale che W_C è parallelo lungo C e $W_C(p) = W$.

Definizione 2.5. Dati $p, q \in C \subset S$, definiamo il trasporto parallelo da p a q lungo la curva C come

$$\begin{aligned} \tau_{p,q}^C: T_p S &\rightarrow T_q S \\ W &\mapsto W_C(q). \end{aligned}$$

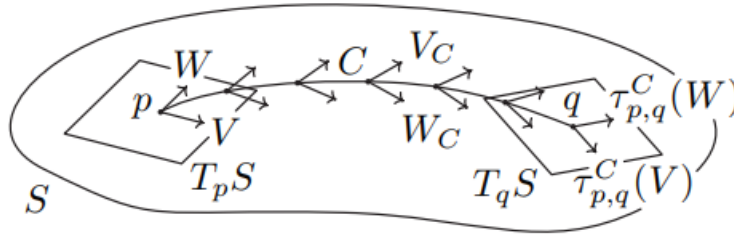


Figura 2.1

Il trasporto parallelo associa, ad ogni vettore V tangente a S in p , il valore che assume in q l'unico campo di vettori parallelo a S lungo la curva C che in p vale V ; $\tau_{p,q}^C$ è una forma lineare ben definita tra spazi vettoriali ed un'isometria euclidea, ovvero

$$\langle \tau_{p,q}^C(V), \tau_{p,q}^C(W) \rangle = \langle V, W \rangle \quad \forall V, W \in T_p S.$$

Esempio 2.6. Se S è una superficie piana, il trasporto parallelo $\tau_{p,q}^C$ coincide con una generica traslazione da p a q ed è pertanto indipendente dalla curva scelta. In generale, però, ciò non è vero: $\tau_{p,q}^{C_1} \neq \tau_{p,q}^{C_2}$ o, equivalentemente, $\tau_{p,p}^C \neq id_{T_p S}$. Come si vede dalla figura 2.2, se in una sfera si trasporta parallelamente da p a q il vettore V lungo curve diverse C_1 e C_2 (in questo caso, due meridiani) si ottengono immagini diverse.

Ora, sia S una superficie regolare ed orientata nello spazio, $p \in S$ e $\{V_1, V_2\}$ una base ortonormale positiva di $T_p S$. Consideriamo l'unica geodetica di S , $\gamma_{V_1}: I \rightarrow S$, tale che $\gamma_{V_1}(0) = p$ e $\gamma'_{V_1}(0) = V_1$. Il vettore velocità $\gamma'_{V_1}(t)$ dà luogo ad un cam-

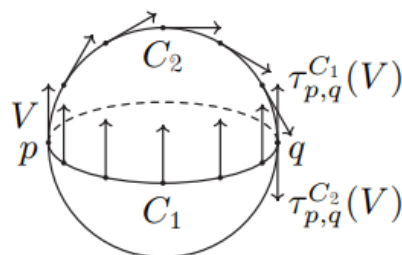


Figura 2.2

po di vettori parallelo, in quanto per definizione di geodetica si ha $\nabla_{\gamma'_{V_1}(t)} \gamma'_{V_1} = 0$. Poniamo $V_1(t) = \gamma'_{V_1}(t)$ e immaginiamo di trasportare parallelamente lungo la geodetica γ_{V_1} il vettore V_2 . Essendo il trasporto parallelo un'isometria euclidea, esso mantiene l'ortogonalità: $V_2(t) = \tau_{p, \gamma_{V_1}(t)}^{\gamma_{V_1}}(V_2)$ è l'unico versore (la norma si mantiene unitaria) tale che $\{V_1(t), V_2(t)\}$ rappresenta una base ortonormale positiva del piano tangente a S in $\gamma_{V_1}(t)$, $\forall t \in I$.

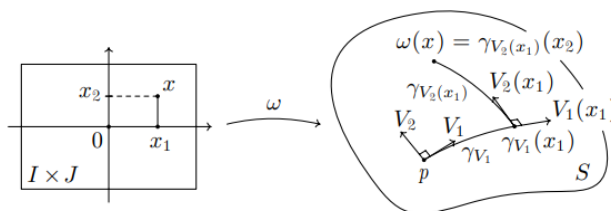


Figura 2.3

A questo punto, per ogni $t \in I$ consideriamo la geodetica $\gamma_{V_2(t)}: J_t^3 \rightarrow S$ tale che

$$\gamma_{V_2(t)}(0) = \gamma_{V_1}(t) \quad \text{e} \quad \gamma'_{V_2(t)}(0) = V_2(t).$$

Si può dimostrare che esiste un intervallo J sufficientemente piccolo da avere $J \subset J_t$ $\forall t \in I$ ed una parametrizzazione ω della superficie S definita come

$$\begin{aligned} \omega: I \times J &\rightarrow S \\ (x_1, x_2) &\mapsto \omega(x_1, x_2) = \gamma_{V_2(x_1)}(x_2) \end{aligned}$$

³il dominio di $\gamma_{V_2(t)}$ dipende da t

differenziabile (otteniamo le geodetiche risolvendo problemi di Cauchy i cui parametri dipendono in maniera differenziabile da u_1, u_2 e regolare per costruzione). Nella seguente proposizione sono presentate, senza dimostrazione[2], due notevoli proprietà che ci saranno utili per calcolare la curvatura di Gauss K di una superficie quando si utilizzano le coordinate normali.

Proposizione 2.7. *Sia $\omega: I \times J \rightarrow S$ definita come sopra a partire da (V_1, V_2) base positiva ortonormale di $T_p S$ e $(u_1, u_2) \in I \times J$. Allora:*

1. $g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1;$
2. $\Gamma_{11} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} X_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} X_2 (= \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2)$
 $\Gamma_{12} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} X_1 \quad (\Gamma_{12}^2 = 0)$
 $\Gamma_{22} = 0 \quad (\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0).$

Sappiamo che la curvatura di Gauss K di una superficie S è data da

$$K = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g}.$$

Vediamo come ottenere un'espressione di K in cui compare solamente la derivata covariante. A tal fine consideriamo una parametrizzazione locale regolare $\omega: U \rightarrow S$. Innanzitutto, scriviamo X_{ij} nelle due componenti tangente e normale alla superficie S :

$$X_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial X_i} = \nabla_{X_i}^S X_j + l_{ij} N \tag{2.8}$$

Il secondo addendo che compare nella (2.8) coincide con la proiezione sul versore normale di $\frac{\partial X_j}{\partial X_i}$ (cioè $\left\langle \frac{\partial X_j}{\partial X_i}, N \right\rangle$): essendo infatti N e X_j ortogonali ($\langle X_j, N \rangle = 0$) si ha anche

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \langle X_j, N \rangle = 0,$$

ovvero

$$0 = \langle \nabla_{X_i} X_j, N \rangle + \left\langle X_j, \frac{\partial N}{\partial X_i} \right\rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, N \rangle - \langle X_j, L(X_i) \rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, N \rangle - l_{ij}$$

pertanto $l_{ij} = \langle \nabla_{X_i} X_j, N \rangle$. Ricordando che $\frac{\partial N}{\partial X_i} = -L(X_i) = -\sum_j l_i^j X_j$ otteniamo

le cosiddette equazioni di Gauss-Weingarten:

$$\begin{cases} X_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial X_i} = \nabla_{X_i}^S X_j + l_{ij} N \\ \frac{\partial N}{\partial X_i} = - \sum_j l_i^j X_j. \end{cases} \quad (2.9)$$

Derivando ulteriormente X_{ij} e tenendo conto delle (2.9) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \omega}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} &= \frac{\partial^2 X_k}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_i} (\nabla_{X_j}^S X_k) + \frac{\partial}{\partial X_i} (l_{jk} N) = \\ &= \frac{\partial}{\partial X_i} (\nabla_{X_j}^S X_k) + \frac{\partial l_{jk}}{\partial X_i} N - l_{jk} L_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Essendo ω differenziabile, le derivate miste coincidono. Proiettando tali derivate sul piano tangente (quindi il termine che moltiplica N si annulla) abbiamo

$$\pi_{T_p S} \left(\frac{\partial^2 X_k}{\partial X_i \partial X_j} \right) - \pi_{T_p S} \left(\frac{\partial^2 X_k}{\partial X_j \partial X_i} \right) = 0;$$

utilizzando la (2.10) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \nabla_{X_i}^S \nabla_{X_j}^S X_k - \nabla_{X_j}^S \nabla_{X_i}^S X_k &= l_{jk} L_i - l_{ik} L_j = \\ &= l_{jk} \sum_{h=1,2} l_i^h X_h - l_{ik} \sum_{h=1,2} l_j^h X_h = \\ &= \sum_m (l_{jk} l_i^m - l_{ik} l_j^m) X_m. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della precedente equazione per X_h :

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{X_i}^S \nabla_{X_j}^S X_k - \nabla_{X_j}^S \nabla_{X_i}^S X_k, X_h \right\rangle &= \sum_m (l_{jk} l_i^m - l_{ik} l_j^m) \langle X_m, X_h \rangle = \\ &= \sum_m (l_{jk} l_i^m g_{mh} - l_{ik} l_j^m g_{mh}) = l_{jk} \sum_m l_i^m g_{mh} - l_{ik} \sum_m l_j^m g_{mh} = \\ &= l_{jk} l_{ih} - l_{ik} l_{jh}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ora, ponendo $R_{ijkh} = l_{jk}l_{ih} - l_{ik}l_{jh} = \langle \nabla_{X_i}^S \nabla_{X_j}^S X_k - \nabla_{X_j}^S \nabla_{X_i}^S X_k, X_h \rangle$, si ha

$$R_{1212} = l_{21}l_{12} - l_{11}l_{22} = l_{12}^2 - l_{11}l_{22},$$

pertanto

$$K = -\frac{R_{1212}}{g} = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g}.$$

Si può dimostrare che la derivata covariante dipende solamente dalla prima forma fondamentale; poiché R_{ijkh} coinvolge derivate covarianti e prodotti scalari, possiamo concludere che la curvatura di Gauss di una superficie dipende solamente dalla sua I f.f. ed è quindi invariante per isometrie, asserto dimostrato da Gauss nel suo Teorema Egregium.

Ora siamo in grado di mostrare come giungere all'espressione della curvatura K in coordinate normali o, come nel Lemma 3.6, in coordinate ortogonali (il che implica $g_{12} = 0$) con $g_{22} = 1$. Per quanto appena visto,

$$K = -\frac{R_{1212}}{g} = -\frac{\langle \nabla_{X_1}^S \nabla_{X_2}^S X_1 - \nabla_{X_2}^S \nabla_{X_1}^S X_1, X_2 \rangle}{g}.$$

Studiamo separatamente numeratore e denominatore di tale espressione, applicando le proprietà introdotte nella Proposizione 2.7. Per quanto riguarda il denominatore, osserviamo subito che $g = \det g_{ij} = g_{11} \cdot 1 = g_{11}$. Per il numeratore, invece:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_1}^S \nabla_{X_2}^S X_1 - \nabla_{X_2}^S \nabla_{X_1}^S X_1, X_2 \rangle &= \langle \nabla_{X_1} \Gamma_{21} - \nabla_{X_2} \Gamma_{11}, X_2 \rangle = \\ &= \left\langle \nabla_{X_1} \left(\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} X_1 \right) - \nabla_{X_2} \left(\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} X_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} X_2 \right), X_2 \right\rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

poiché $g_{12} = \langle X_1, X_2 \rangle = 0$, grazie alla bilinearità del prodotto scalare possiamo trascurare i coefficienti che moltiplicano il vettore X_1 ; sfruttando le proprietà della derivata covariante ed il fatto che $g_{22} = 1$, la (2.13) diventa:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\partial}{\partial u_1} (\dots) X_1 + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \Gamma_{11} - \frac{\partial}{\partial u_2} (\dots) X_1 - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \Gamma_{21} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right) X_2 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \Gamma_{22}, X_2 \right\rangle = \\
 & = \left\langle \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \left((\dots) X_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} X_2 \right) - (\dots) X_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right) X_2, X_2 \right\rangle = \\
 & = -\frac{1}{4g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2} \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

e dunque

$$K = \frac{1}{4(g_{11})^2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right)^2 - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2}.$$

Riscriviamo ora la (3.6). A meno di scambiare u_1 e u_2 , abbiamo

$$\begin{aligned}
 K & = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right) = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(-\frac{1}{4g_{11}\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2g_{11}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{4(g_{11})^2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right)^2 - \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2}, \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

la quale coincide con l'espressione trovata prima mediante la (2.14).

Capitolo 3

Superfici con curvatura di Gauss nulla

3.1 Forma canonica

Iniziamo ad approfondire il caso di superfici nello spazio a curvatura di Gauss identicamente nulla. Prima di farlo, però, presentiamo brevemente la cosiddetta *forma canonica* di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, con la quale possiamo descrivere, in un intorno di $p \in S$, la superficie stessa a meno di infinitesimi di ordine maggiore al secondo in termini delle due curvature principali.

Sia dunque $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ e fissiamo un sistema di coordinate ortogonali (x, y, z) tale che $p = (0, 0, 0)$, $T_p S = \{e_x, e_y\}$ e $N(p) = e_z$. Essendo S regolare, localmente è grafico di una funzione differenziabile[2]; sia essa $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (con $f(0, 0) = 0$) e sia $A = \{z = f(x, y) \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$. Essendo $T_p S$ orizzontale, avremo anche $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. A partire da tale f , possiamo considerare la parametrizzazione (locale) regolare

$$\begin{aligned}\omega: D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) &\mapsto (u_1, u_2, f(u_1, u_2)),\end{aligned}$$

ω sarà quindi t.c.:

$$\begin{cases} X_1(u_1, u_2) = (1, 0, f_x(u_1, u_2)) \\ X_2(u_1, u_2) = (0, 1, f_y(u_1, u_2)) \end{cases} \quad \begin{cases} X_{11}(u_1, u_2) = (0, 0, f_{xx}(u_1, u_2)) \\ X_{12}(u_1, u_2) = X_{21}(u_1, u_2) = (0, 0, f_{xy}(u_1, u_2)) \\ X_{22}(u_1, u_2) = (0, 0, f_{yy}(u_1, u_2)) \end{cases}$$

Sfruttando il fatto che (vedi sezione 1.1, equazioni (1.1) e (1.2))

$$l_{ij} = \langle X_{ij}, N \rangle = \langle X_{ij}, e_z \rangle,$$

possiamo scrivere

$$l_{11} = f_{xx}(u_1, u_2), \quad l_{12} = l_{21} = f_{xy}(u_1, u_2), \quad l_{22} = f_{yy}(u_1, u_2).$$

Dalla (1.3) si vede che la matrice dell'operatore forma e quella della II f.f. coincidono se la base di $T_p S$ è ortonormale¹: questo è il nostro caso, almeno nell'origine ove $X_1(0, 0) = (1, 0, 0)$, $X_2(0, 0) = (0, 1, 0)$. In p si ha dunque

$$M_{(X_1, X_2)} L_p = \begin{bmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{bmatrix} = H_f(0, 0) \Rightarrow \begin{cases} K(p) = \det H_f(0, 0) \\ H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} H_f(0, 0) \end{cases}$$

ovvero sotto tali ipotesi la matrice dell'operatore forma L_p coincide con l'Hessiana di f in $(0, 0)$.

A questo punto, se necessario ruotando S attorno l'asse z , possiamo fare in modo che i due versori degli assi x e y coincidano con le direzioni principali della superficie, le quali costituiscono una base ortonormale di $T_p S$: $\{e_x, e_y\} = \{T_1(p), T_2(p)\}$. In questa nuova situazione, la matrice associata ad L_p (e quindi l'Hessiana di f calcolata in $(0, 0)$) è diagonale:

$$f_{xx}(0, 0) = k_1(p), \quad f_{yy}(0, 0) = k_2(p), \quad f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 0.$$

¹in tal caso, infatti, $g_{11} = g_{22} = 1$ e $g_{12} = g_{21} = 0$

Ora, sviluppando la superficie S in serie di Taylor intorno al punto $p = \omega(0, 0) = (0, 0, 0)$ otteniamo:

$$\omega(u_1, u_2) = \omega(0, 0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial u_1} \right|_{(0,0)} u_1 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial u_2} \right|_{(0,0)} u_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{(0,0)} u_i u_j + \epsilon(u_1, u_2). \quad (3.1)$$

Applicando le relazioni di cui sopra e trascurando ϵ , la (3.1) diventa:

$$\omega(u_1, u_2) = u_1 e_x + u_2 e_y + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0) u_1^2 + f_{yy}(0, 0) u_2^2) e_z.$$

Considerando la componente lungo l'asse z :

$$\Rightarrow z = \frac{k_1(p)}{2} x^2 + \frac{k_2(p)}{2} y^2. \quad (3.2)$$

La (3.2) corrisponde all'equazione di un paraboloido che dipende dalle due curvatures principali k_1, k_2 in p ; pertanto essa suggerisce la seguente classificazione dei punti appartenenti ad una superficie.

Definizione 3.1. Sia $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, allora:

- p si dice punto ellittico se $K(p) > 0$, ovvero $k_1(p), k_2(p) \neq 0$ e concordi (p viene detto ombelicale se $k_1(p) = k_2(p)$);
- p si dice punto iperbolico se $K(p) < 0$, ovvero $k_1(p), k_2(p) \neq 0$ e discordi;
- p è un punto parabolico se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$, ovvero una sola tra le due curvatures principali è nulla;
- infine, il punto p si dice planare se $K(p) = H(p) = 0$, dunque se $k_1(p) = k_2(p) = 0$

Osserviamo che nel caso di un punto ellittico, la curvatura media dipende dal segno delle due curvatures. Per quanto riguarda i punti iperbolici, invece, $H(p)$ sarà nulla solo se le due curvatures principali sono opposte, e avremo curvatura media positiva o negativa a seconda di quale delle due prevale.

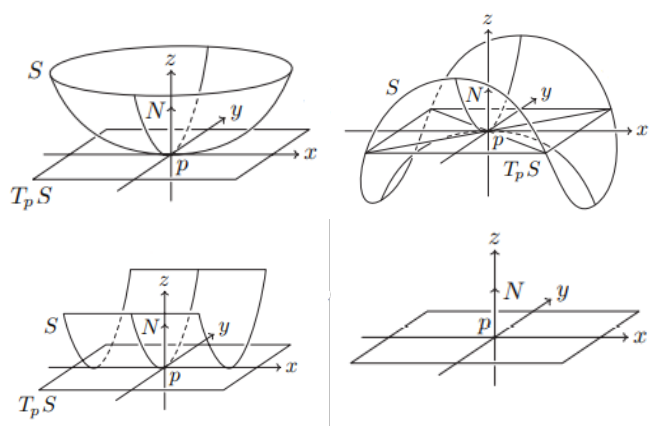


Figura 3.1: esempi di punti ellittico, iperbolico, parabolico e planare

3.2 Il teorema di Massey

Lo scopo di questa sezione è classificare le superfici chiuse di \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana identicamente nulla. In particolare, dimostreremo il seguente:

Teorema 3.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura di Gauss $K \equiv 0$. Allora S è un cilindro o un piano.*

Per definizione, un cilindro è una superficie regolare S tale che per ogni punto $p \in S$ passa un'unica retta $R(p) \subset S$ (la generatrice passante per p), che soddisfa la condizione per cui se $q \neq p$, allora $R(p)$ e $R(q)$ sono parallele o coincidenti. La dimostrazione che riporteremo è fedele, seppur con alcune modifiche, a quella di Hartman-Nirenberg [4]. Iniziamo dallo studio di alcune proprietà locali delle superfici a curvatura nulla.

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura di Gauss $K \equiv 0$. Poiché $K = k_1 \cdot k_2$, ove k_1 e k_2 sono le due curvatures principali, i punti di S sono o parabolici, o planari. Indichiamo con P l'insieme dei punti planari e con $U = S \setminus P$ l'insieme dei punti parabolici di S .

P è chiuso in S . Infatti, in ogni punto di $P \subset S$ la curvatura media $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ è zero. Un punto di accumulazione² di P ha, per continuità di H , curvatura media zero, dunque appartiene a P . Ne segue che $U = S \setminus P$ è aperto in S .

Il nostro primo obiettivo è mostrare che per ogni punto parabolico di S passa

² x_0 è un punto di accumulazione per P se per ogni intorno I di x_0 si ha $I \cap P \setminus x_0 \neq \emptyset$

effettivamente una retta. Ricordiamo che una direzione asintotica in $p \in S$ è un versore $T \in T_p S$ tale che $k(T) = l_p(T, T) = 0$.

Teorema 3.3 (formula di Eulero). *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata nello spazio e $p \in S$. Supponiamo che le due direzioni principali siano date da T_1, T_2 . Allora, dato un versore $T \in T_p S$ e detto θ l'angolo da T_1 a T ($T = \cos \theta T_1 + \sin \theta T_2$) si ha*

$$k(T) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Sfruttando la bilinearità della seconda forma fondamentale ed essendo $T_1 \perp T_2$ si ha:

$$\begin{aligned} k(T) &= l(T, T) = l(\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2, \cos \theta T_1 + \sin \theta T_2) = \\ &= \cos^2 \theta l(T_1, T_1) + \sin^2 \theta l(T_2, T_2) + 2 \sin \theta \cos \theta l(T_1, T_2) = \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

□

Ora, se $p \in S$ è un punto parabolico, il teorema 3.3 assicura che, a meno del segno, esiste un'unica direzione asintotica in p , che è anche una direzione principale. Dunque possiamo definire un campo vettoriale X^U tangente a S nei suoi punti parabolici tale che $X^U(p)$ sia una direzione asintotica di S in p . Dalla teoria dei campi vettoriali (vedi Appendice A.3), sappiamo che per ogni punto $P \in U$ esiste un'unica curva integrale massimale di X^U uscente da p ; indicheremo con $R(p) \subset U$ il sostegno di tale curva, che è chiaramente il sostegno dell'unica linea asintotica passante per p . Abbiamo trovato la retta cercata:

Proposizione 3.4. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana $K \equiv 0$, e $p \in U$. Allora $R(p) \subset U$ è l'unico segmento (aperto) di retta passante per p contenuto in S .*

Dimostrazione. Siccome p non è un punto ombelicale, esiste una parametrizzazione locale (vedi Appendice A.3) $\phi: I \rightarrow S$ centrata in p le cui curve coordinate sono linee di curvatura; possiamo assumere $V = \phi(I) \subseteq U$. Inoltre, una delle due curve

coordinate passanti per un punto di V dev'essere tangente alla direzione asintotica per quel punto, per cui il suo sostegno è l'intersezione del sostegno della corrispondente linea asintotica massimale con V . Senza perdita di generalità, possiamo supporre che le curve coordinate asintotiche siano le curve date da $\{u_2 = \text{cost.}\}$. Per costruzione, abbiamo $\frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial u_1} = \frac{\partial N}{\partial X_1} = -L_p(X_1) \equiv 0$ in V ; in particolare, N è costante lungo le curve $\{u_2 = \text{cost.}\}$. Abbiamo anche $\frac{\partial^2(N \circ \phi)}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 N}{\partial X_1 \partial X_2} \equiv 0$ in V : quindi anche $\frac{\partial N}{\partial X_2} = -L_p(X_2)$ è costante (e mai nullo, dato che siamo nell'insieme dei punti parabolici) lungo le curve $\{u_2 = \text{cost.}\}$. In più

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \langle \phi, N \circ \phi \rangle = \langle X_1, N \circ \phi \rangle + \left\langle \phi, \frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial u_1} \right\rangle \equiv 0.$$

Di conseguenza, la funzione $\langle \phi, N \circ \phi \rangle$ è costante lungo le curve $\{u_2 = \text{cost.}\}$, ovvero ciascuna curva data da $\{u_2 = \text{cost.}\}$ è contenuta in un piano ortogonale al valore costante di N lungo quella curva. Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left\langle \phi, \frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial u_2} \right\rangle = \left\langle X_1, \frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle \phi, \frac{\partial^2(N \circ \phi)}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle \equiv 0,$$

in quanto $\partial(N \circ \phi) / \partial u_2 = \partial N / \partial X_2 = -L_p(X_2)$ è multiplo di X_2 e dunque, per come è stata scelta la parametrizzazione, ortogonale a X_1 . Quindi anche la funzione $\langle \phi, \partial(N \circ \phi) / \partial u_2 \rangle$ è costante lungo le curve $\{u_2 = \text{cost.}\}$; ciò implica che ciascuna curva data da $\{u_2 = \text{cost.}\}$ è contenuta in un piano ortogonale al valore costante di $\partial(N \circ \phi) / \partial u_2$ lungo quella curva. Dunque ciascuna curva $\{u_2 = \text{cost.}\}$ è contenuta nell'intersezione di due piani (distinti, poiché $N \perp \partial(N \circ \phi) / \partial u_2$) ed è pertanto un segmento di retta.

Rimane da vedere l'unicità. Ogni segmento di retta R passante per p è necessariamente una linea asintotica (esso ha sempre curvatura normale nulla); inoltre $R(p)$, per quanto detto in precedenza, è l'unica linea asintotica passante per p e ciò conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 3.5. Nella proposizione sopra è essenziale che $K \equiv 0$. Per esempio, il parallelo "superiore" di un toro di rivoluzione è una linea asintotica formata da punti parabolici, e non è un segmento rettilineo.

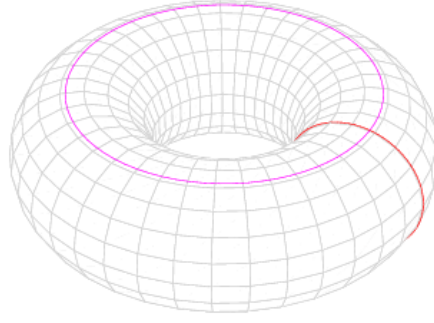


Figura 3.2

Vedremo tra poco che se S è una superficie completa in \mathbb{R}^3 allora ciascuna $R(p)$ è una retta intera. Per dimostrarlo, ci servirà sapere che la chiusura di $R(p)$ non interseca l'insieme P dei punti planari di S . Per verificare tale affermazione, utilizziamo la seguente conseguenza delle equazioni di Codazzi-Mainardi (vedi Appendice A.2):

Lemma 3.6. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura di Gauss identicamente nulla, $p \in U$ e s la lunghezza d'arco di $R(p)$. Allora, in U ,*

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, per definizione di punto parabolico, H non si annulla mai in U .

Sia $\phi: I \rightarrow S$ la parametrizzazione locale centrata in p già usata nella dimostrazione precedente. Siano l_{11}, l_{12}, l_{22} i coefficienti della II forma fondamentale ottenuti da questa parametrizzazione. Poiché $l_{12} = 0$ (per come è stato scelto il sistema di coordinate) e le curve date da $u_2 = \text{cost.}$, $u_1 = u_1(s)$ devono soddisfare l'equazione differenziale delle linee asintotiche 2.7:

$$l_{11} \left(\frac{du_1}{ds} \right)^2 + 2l_{12} \frac{du_1}{ds} \frac{du_2}{ds} + l_{22} \left(\frac{du_2}{ds} \right)^2 = 0,$$

ne concludiamo che $l_{11} = 0$. Sotto queste condizioni, la curvatura media H è data da

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l_{11}}{g_{11}} + \frac{l_{22}}{g_{22}} \right) = \frac{1}{2} \frac{l_{22}}{g_{22}} \quad (3.4)$$

Imponendo $g_{12} = l_{12} = l_{11} = 0$ nelle equazioni di Codazzi-Mainardi e tenendo conto dell'espressione dei simboli di Christoffel in parametrizzazioni ortogonali otteniamo

$$0 = \frac{1}{2} \frac{l_{22}(g_{11})_{u_2}}{g_{22}}, \quad l_{22} = \frac{1}{2} \frac{l_{22}(g_{22})_{u_1}}{g_{22}} \quad (3.5)$$

Dalla prima equazione delle (3.5) segue che $(g_{11})_{u_2} = 0$. Dunque $g_{11} = g_{11}(u_1)$ è una funzione del solo parametro u_1 . Effettuiamo ora il cambio di coordinate

$$\bar{u}_2 = u_2, \quad \bar{u}_1 = \int \sqrt{g_{11}(u_1)} du_1$$

Per comodità, continuiamo ad indicare i nuovi parametri con u_1 e u_2 ; u_1 misura ora la lunghezza dell'arco di curva lungo $u_2 = \text{costante}$. In più, ora si ha $g_{11} = 1$. Nella nuova parametrizzazione ($g_{12} = 0, g_{11} = 1$) l'espressione della curvatura di Gauss diventa

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (\sqrt{g_{22}})_{u_1 u_1} = 0, \quad (3.6)$$

dunque

$$\sqrt{g_{22}} = c_1(u_2)u_1 + c_2(u_2), \quad (3.7)$$

dove $c_1(u_2)$ e $c_2(u_2)$ sono funzioni del solo u_2 .

D'altra parte, la seconda equazione delle (3.5) può essere scritta come ($l_{22} \neq 0$)

$$\frac{(l_{22})_{u_1}}{l_{22}} = \frac{1}{2} \frac{(g_{22})_{u_1}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{(\sqrt{g_{22}})_{u_1}}{\sqrt{g_{22}}},$$

pertanto

$$l_{22} = c_3(u_2)\sqrt{g_{22}}, \quad (3.8)$$

con $c_3(u_2)$ funzione di u_2 . Introducendo le (3.7) e (3.8) nella (3.4) si ha

$$H = \frac{1}{2} \frac{c_3(u_2) \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22}}} = \frac{1}{2} \frac{c_3(u_2)}{c_1(u_2)u_1 + c_2(u_2)}. \quad (3.9)$$

Infine, ricordando che $u_1 = s$ e derivando due volte l'espressione ricavata sopra, otteniamo

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$$

come voluto. □

Corollario 3.7. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con $K \equiv 0$, $p \in U$. Allora $R(\bar{p}) \cap P = \emptyset$. In particolare, se S è chiusa in \mathbb{R}^3 allora $R(p)$ è una retta. Inoltre le rette $R(p)$, per p che varia in una componente connessa di U , sono tutte parallele.*

Dimostrazione. Sia $\sigma: (a, b) \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $R(p)$. Se $R(\bar{p}) \cap P$ fosse non vuoto avremmo $\lim_{s \rightarrow b} \sigma(s) = q_0 \in P$. Dal lemma precedente, sappiamo che esistono due costanti $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$H(\sigma(s)) = \frac{1}{a_1 s + a_2}; \quad (3.10)$$

quindi, essendo la curvatura media nulla in tutti i punti planari, dovremmo avere

$$0 = H(q_0) = \lim_{s \rightarrow b} H(\sigma(s)) = \lim_{s \rightarrow b} \frac{1}{a_1 s + a_2} = \frac{1}{a_1 b + a_2} \neq 0,$$

che rappresenta una contraddizione; pertanto $R(\bar{p}) \cap P = \emptyset$. Siccome $R(p)$ è chiuso in U in quanto sostegno di una curva integrale, dev'essere chiuso in S . Se S è chiusa in \mathbb{R}^3 , ne segue che $R(p)$ è chiuso in \mathbb{R}^3 , e quindi dev'essere una retta intera. Resta da mostrare che le rette $R(p)$ sono tutte parallele, per p che varia in una componente connessa di U . Dato $p \in U$, sia nuovamente $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $R(p)$. Chiaramente $H(\sigma(s))$ è definita (e mai nulla) per tutti i valori di s , ma dalla (3.10) si ha che questo è possibile solo se $H \circ \sigma$ è costante.

Sia allora $\phi: I \rightarrow S$ la parametrizzazione locale centrata in p costruita nella dimostrazione del lemma precedente. Il fatto che $H \circ \sigma$ sia costante si traduce nel richiedere che H (o meglio, $H \circ \phi$) non dipenda da u_1 e quindi, ricordando le (3.7) e (3.9), nel richiedere che g_{22} non dipenda da u_1 . In particolare, $\partial g_{22} / \partial u_1 \equiv 0$. Avevamo già notato che $g_{11} \equiv 1$ e $g_{12} \equiv l_{12} \equiv l_{11} \equiv 0$; dunque otteniamo (cf. equazione (A.1))

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1^2} = \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + l_{11} N \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_2 u_1} = \Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2 + l_{12} N \equiv 0;$$

ma questo implica che $X_1 = \partial\phi/\partial u_1$, cioè la direzione tangente alle rette $R(q)$ per $q \in \phi(I)$, è costante, per cui tutte le $R(q)$ sono parallele.

Abbiamo quindi dimostrato che tutte le rette $R(q)$ per q che varia in un intorno di $p \in U$ sono parallele. Quindi l'insieme dei punti $q \in U$ tali che $R(q)$ è parallelo ad una retta data è aperto, e questo implica subito l'asserto.³ \square

Dunque se S è chiusa in \mathbb{R}^3 l'insieme dei punti parabolici è unione disgiunta di rette; vediamo ora cosa succede in $Bd(U)$ il bordo di U in S ; ovvero l'insieme dei punti $p \in U \subset S$ tali che ogni intorno di p in S interseca sia U che il suo complementare $S \setminus U = P$. Ci servirà il seguente

Lemma 3.8. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura di Gauss identicamente nulla, e $p \in Bd(U)$. Supponiamo di avere una successione $\{q_n\} \subset U$ convergente a p tale che i segmenti $R(q_n)$ convergano a un segmento $C \subset S$ passante per p e di lunghezza positiva. Allora C è l'unico segmento passante per p e contenuto in S .*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un altro segmento $C' \subset S$ passante per p . Allora per n abbastanza grande il segmento $R(q_n)$ deve intersecare (ed essere distinto da) C' . Ma un segmento ha sempre curvatura normale zero, per cui è sempre una linea asintotica; quindi il punto $q \in C' \cap R(q_n)$ dovrebbe contemporaneamente essere parabolico e avere due direzioni asintotiche distinte, il che è impossibile. \square

Allora:

Proposizione 3.9. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura Gaussiana identicamente nulla. Allora per ogni $p \in Bd(U)$ passa un unico segmento aperto di retta $C(p) \subset S$. Inoltre, $C(p) \subset Bd(U)$ e, se S è chiusa in \mathbb{R}^3 , allora $C(p)$ è una retta.*

In altre parole, $Bd(U) = Bd(P)$ è formato da tutti e soli segmenti di linea retta.

³i motivo non è specificato nel testo, io direi che è vero perché tale insieme è anche chiuso in quanto unione di chiusi in S (le rette $R(p)$) e dunque è un chiusoaperto in una componente connessa: pertanto coincide con l'insieme stesso.

Dimostrazione. Dato $p \in Bd(U)$, vogliamo far vedere che se $q \in U$ tende a p il segmento $R(q)$ converge a un segmento $C(p) \subset S$ passante per p . Prima di tutto osserviamo che

$$\liminf_{q \rightarrow p, q \in U} |R(q)| > 0, \quad (3.11)$$

dove $|R(q)|$ è la lunghezza del segmento $R(q)$, in quanto altrimenti p sarebbe un punto d'accumulazione di estremi di segmenti $R(q)$ che non appartengono a S (per il Corollario 3.7), contro il fatto che p è interno a S . Mostriamo ora che la direzione asintotica in $q \in U$ ammette limite per q tendente a p . Se così non fosse, potremmo trovare due successioni $\{q_n\}$ e $\{q'_n\}$ tendenti a p tali che i corrispondenti segmenti $R(q_n)$ e $R(q'_n)$ convergono a segmenti C e C' distinti passanti per p , entrambi di lunghezza positiva grazie a 3.11, e questo contraddice il Lemma 3.8.

Dunque i segmenti $R(q)$ convergono ad un segmento $C(p)$ contenuto in S di lunghezza positiva, che è unico per il Lemma 3.8, ed è un segmento aperto in quanto, se così non fosse, i suoi estremi (in S) sarebbero limite di punti non in S . Vogliamo dimostrare adesso che $C(p) \subset Bd(U)$. Chiaramente $C(p) \subset \bar{U} = U \cup Bd(U)$. Se esistesse $q \in C(p) \cap U$, allora $C(p) \cap U$ dovrebbe essere contenuto (in quanto limite di linee asintotiche) in $R(q)$; ma allora avremmo $R(\bar{q}) \cap P \neq \emptyset$, contro il Corollario 3.7.

Infine, se S è chiusa in \mathbb{R}^3 , essendo $C(p)$ chiuso in $Bd(U)$, ne segue che $C(p)$ è chiuso in \mathbb{R}^3 , e quindi è una retta. \square

Quindi $U \cup Bd(U)$ è unione disgiunta di segmenti (di rette, se S è chiusa). A questo punto siamo in grado di dimostrare il teorema di Hartman-Nirenberg:

Teorema 3.10 (Hartman-Nirenberg). *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie chiusa con curvatura di Gauss $K \equiv 0$. Allora S è un piano o un cilindro.*

Dimostrazione. Supponiamo che S non sia un piano. Allora forzatamente S contiene punti parabolici. Quanto dimostrato fin'ora implica che $U \cup Bd(U)$ è unione disgiunta di rette. Ora, le componenti connesse di $P \setminus Bd(U)$ sono aperti composti da punti planari, per cui sono porzioni di piano, con il bordo composto da rette, in quanto contenuto in $Bd(U)$ (cf. Proposizione 3.9). Queste rette devono essere parallele, perché altrimenti si interseccherebbero, contraddicendo il fatto che per

ciascun punto di $Bd(U)$ può passare un'unica retta contenuta in S . Dunque anche per ogni punto di $P \setminus Bd(U)$ passa una e una sola retta, e quelle appartenenti alla stessa componente connessa sono tutte parallele tra loro.

Ricordiamo (cf. Corollario 3.7) che tutte le rette appartenenti ad una componente connessa $K \subset U$ sono parallele fra di loro, il che implica (ricordando la dimostrazione della Proposizione 3.9) che pure le rette che costituiscono il bordo di K sono parallele.

Siano ora p_0 e p_1 due punti qualsiasi di S , e $\sigma: [0, 1] \rightarrow S$ un arco che li congiunge (che esiste perché S è connessa). Per la compattezza, possiamo trovare un insieme di punti $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ di $[0, 1]$ tale che ciascun $\sigma([t_{j-1}, t_j])$ sia contenuto nella chiusura di una componente connessa di $S \setminus Bd(U)$. Allora, per ogni $j = 1, \dots, k$ le rette passanti per ciascun $\sigma(t)$ con $t \in [t_{j-1}, t_j]$ sono tutte parallele fra loro. Ma t_j appartiene sia a $[t_{j-1}, t_j]$ che a $[t_j, t_{j+1}]$; quindi tutte le rette passanti per il sostegno di σ sono parallele. In particolare, sono parallele le rette passanti per p_0 e p_1 . Ma p_0 e p_1 sono punti generici: S è un cilindro. \square

Osservazione 3.11. Possiamo sostituire l'ipotesi di chiusura in \mathbb{R}^3 con l'ipotesi di completezza. Infatti, ogni segmento contenuto in una superficie dev'essere una geodetica, e ogni geodetica in una superficie completa dev'essere definita per tutti i tempi; si possono dunque ripercorrere tutte le argomentazioni che ci hanno permesso di affermare che i vari segmenti contenuti in S sono delle rette.

Esempio 3.12. L'ipotesi di chiusura (o di completezza) è essenziale: esistono superfici non chiuse con curvatura Gaussiana identicamente nulla non contenute né in un piano né in un cilindro. Consideriamo ad esempio il cono circolare descritto da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z > 0\},$$

che coincide con la superficie di rotazione della curva $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\sigma(t) = (t, t)$. Dunque una parametrizzazione di S è data da

$$\omega(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, u_1), \quad u_1 > 0.$$

In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} X_1 &= (\cos u_2, \sin u_2, 1), & X_2 &= (-u_1 \sin u_2, u_1 \cos u_2, 0), \\ N &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u_2, -\sin u_2, 1), & X_{11} &= (0, 0, 0), \\ X_{12} &= (-\sin u_2, \cos u_2, 0), & X_{22} &= (-u_1 \cos u_2, -u_1 \sin u_2, 0) \end{aligned}$$

Si osservi che $X_1 \perp X_2$, ovvero $g_{12} = l_{12} = 0$. Inoltre:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_1, X_1 \rangle = 2, & g_{22} &= \langle X_2, X_2 \rangle = u_1^2 \\ l_{11} &= \langle N, X_{11} \rangle = 0, & l_{22} &= \langle N, X_{22} \rangle = \frac{u_1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$K = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g} \equiv 0, \quad H = \frac{l_{11}g_{22} + l_{22}g_{11} - l_{12}g_{12}}{2g} = \frac{1}{2u_1\sqrt{2}}.$$

La superficie S è dunque costituita da soli punti parabolici, per cui non è contenuta in un piano. Non è neppure contenuta in un cilindro: infatti, per ciascun punto parabolico di S passa uno e un solo segmento (cf. Proposizione 3.4) contenuto in S . Quindi se S fosse contenuta in un cilindro le generatrici dovrebbero essere parallele, ma non lo sono.

3.3 Toro piatto equilatero

In questa sezione verrà discusso brevemente l'obiettivo dell'attività di stage effettuata. Il celebre teorema di Nash-Kuiper assicura che ogni toro piatto ammette un'immersione isometrica di classe C^1 nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Il progetto formativo svolto mirava a verificare la possibilità di realizzare, in \mathbb{R}^3 , un toro piatto costituito da tutti e soli triangoli equilateri. Tale costruzione geometrica, se possibile, può essere interpretata come una contraddizione del teorema di Massey e/o di Hartman-Nirenberg, in quanto un tale toro avrebbe curvatura costante nulla (esso è formato da porzioni di piano).

Con l'aiuto di *Wolfram Mathematica* si è implementata la struttura, considerando inizialmente il caso in cui le sezioni meridiane del toro sono costituite da un poligono di sei lati. Le coordinate dei vertici di tale poligono nel piano xy sono

parametrizzate dall'angolo α come in figura.

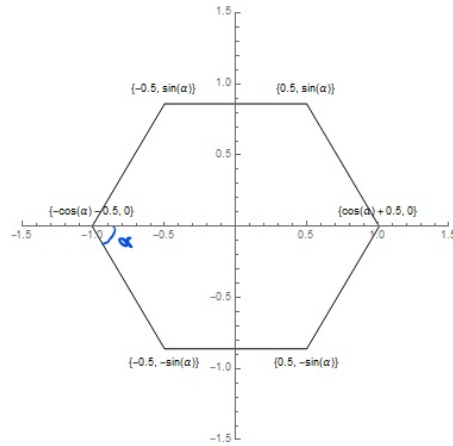


Figura 3.3

Su ciascuno dei sei lati si costruiscono altrettanti triangoli equilateri, liberi di ruotare attorno alla loro base. Le coordinate dei vertici a quota non nulla sono ottenute tramite composizione di rotazioni e traslazioni nello spazio; sfruttando la simmetria rispetto al piano yz e la complanarit  dei triangoli H_1B_1G e H_2B_2G imposta al sistema, si ottiene una figura tridimensionale che dipende da α e altri 4 parametri.

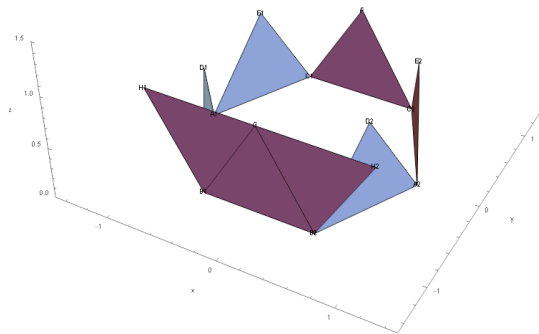


Figura 3.4

Dovendo essere formato da tutti triangoli equilateri, si impone:

1. l'uguaglianza, in termini di coordinate, dei vertici H_2 e D_2 (per la simmetria del sistema, si ottiene anche l'uguaglianza tra H_1 e D_1);
2. che la distanza tra D_2 e E_2 sia unitaria (per la simmetria, segue che anche il segmento $\overline{D_1E_1}$ ha lunghezza unitaria);
3. che la distanza tra E_2 ed F , e di conseguenza tra E_1 ed F sia unitaria.

Tramite il comando *Solve* si mettono a sistema tali condizioni, ottenendo 3 equazioni in 4 incognite. Le soluzioni trovate (espresse in funzione di α) sono molteplici, ciascuna rappresentante configurazioni spaziali diverse dei triangoli che compongono la figura, e ben definite per diversi intervalli entro i quali può variare il parametro α . La soluzione che ci interessa dà luogo al blocco di triangoli equilateri rappresentato in figura, e che andrà a comporre l'ipotetico toro.

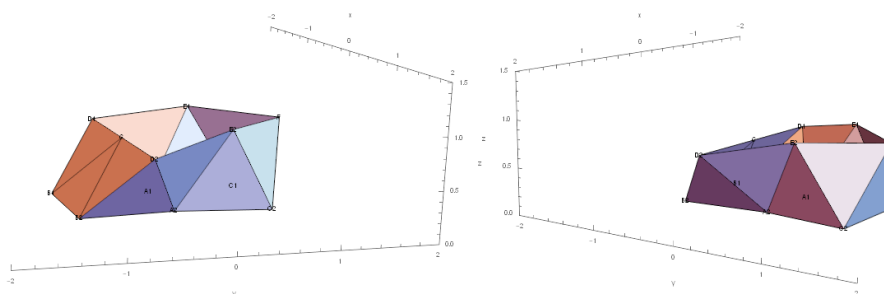


Figura 3.5

Una volta costruito il blocco elementare come appena illustrato, si può passare alla discussione dell'effettiva possibilità di sfruttare tale solido per ottenere un toro immerso nello spazio euclideo formato da soli triangoli equilateri. Si tratta quindi di stabilire innanzitutto se esiste un particolare valore di α tale che i vertici a quota non nulla sono tutti complanari. Sfruttando nuovamente la simmetria del sistema, possiamo tradurre la condizione di complanarità dei punti D_1, D_2, E_1, E_2, F nella condizione che i punti D_2, E_2, F siano allineati nel piano yz .

Si osservi che, essendo tutti e tre i punti in questione dipendenti solamente da α , lo saranno anche i coefficienti angolari delle due rette passanti rispettivamente

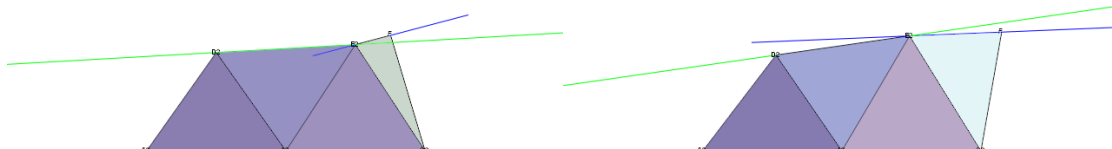


Figura 3.6

per le coppie di punti (D_2, E_2) e (E_2, F) . Come si può vedere in figura, si passa da una situazione in cui l'angolo compreso tra le due rette evidenziate in verde e blu risulta essere convesso ad una in cui l'angolo risulta concavo. In effetti, se si considera la differenza tra i due coefficienti angolari al variare di α , si osserva che nell'intervallo $[1.571, 1.7]$, dette $M_1(\alpha), M_2(\alpha)$ le pendenze delle rette passanti rispettivamente per E_2, F e D_2, E_2 , si ha il seguente comportamento:

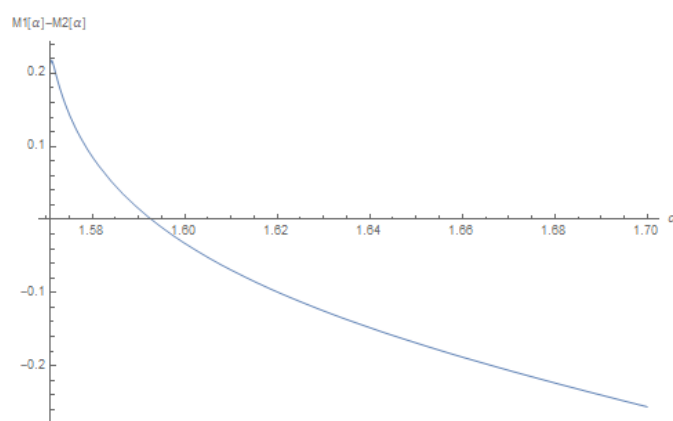


Figura 3.7

$M_1(\alpha) - M_2(\alpha)$ varia con continuità e dal grafico si evince che tale funzione di α è strettamente monotona crescente nell'intervallo considerato. Dunque è garantita l'esistenza di uno e un solo α^* tale che $M_1(\alpha^*) = M_2(\alpha^*)$. Infine, le due rette hanno in comune il punto E_2 , dunque per tale α^* esse risultano coincidenti: ciò implica che esiste un unico valore di α^* per cui i punti D_1, D_2, E_1, E_2, F sono tutti complanari.

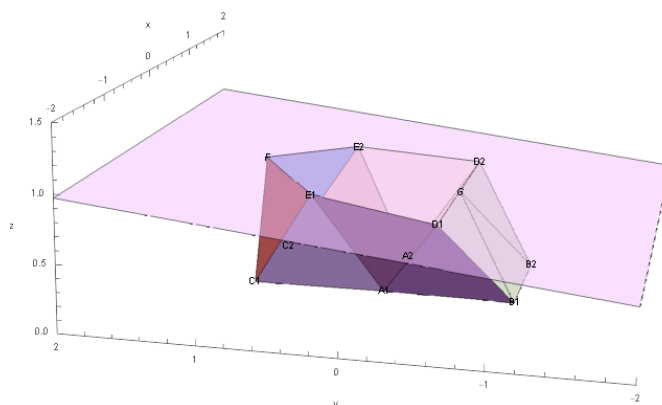


Figura 3.8

Data la complessità delle equazioni messe a sistema e delle rispettive soluzioni, *Mathematica* non riesce a fornire un'espressione "esatta" di α^* , perlomeno con tempi di attesa ragionevoli. Una soluzione numerica trovata è $\alpha^* = 1.5927987542851842'$ e $M_1(\alpha^*)$ è il coefficiente angolare delle due rette (ora coincidenti) passanti per i tre punti D_2, E_2, F del piano yz . Occorre ora misurare l'angolo, sia esso ω , compreso tra il piano orizzontale cui appartiene la base del blocco e il piano a cui appartengono i vertici a quota non nulla D_1, D_2, E_1, E_2, F , evidenziati in figura.

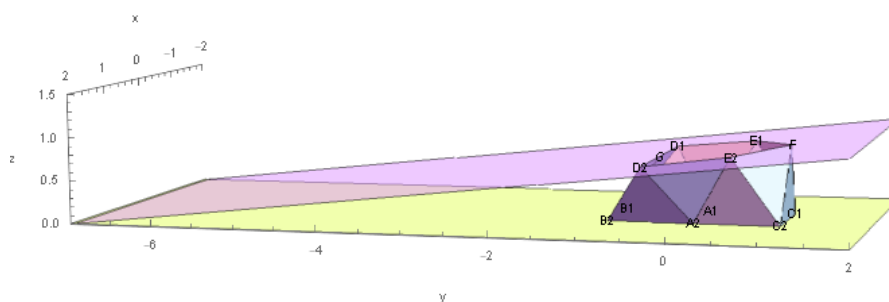


Figura 3.9

Per quanto riguarda il calcolo di ω , osserviamo che è sufficiente utilizzare l'arcotangente del coefficiente angolare $M_1(\alpha^*)$:

$$\omega = \arctan M_1(\alpha^*).$$

Ora, occorrerebbe dimostrare se ω è o meno un sottomultiplo di 2π . In caso affermativo, si otterrebbe il risultato sperato (il toro piatto equilatero) semplicemente componendo riflessioni e rotazioni del blocchetto originale, fino a compiere un giro completo e richiudere la figura. Altrimenti, non sarebbe possibile riuscire ad "incollare" le copie del blocco di triangoli equilateri fino a tornare esattamente al punto di partenza. Il valore numerico di ω fornito da *Mathematica* è $\omega = 0.10779660526237284'$: dimostrare la commensurabilità di un numero in questa forma con 2π risulta tutt'altro che semplice. Un possibile approccio a tale compito può essere rappresentato dalla ricerca delle frazioni che più si avvicinano a $\frac{\omega}{2\pi}$ tramite il comando *Rationalize*. Tuttavia, la funzione non restituisce alcun valore in output. Si è cercato quindi di ottenere almeno un riscontro grafico di tale risultato. Innanzitutto, riflettendo il blocco di triangoli rispetto al piano xy otteniamo la situazione seguente: Tale figura composta da due blocchi "elementari"

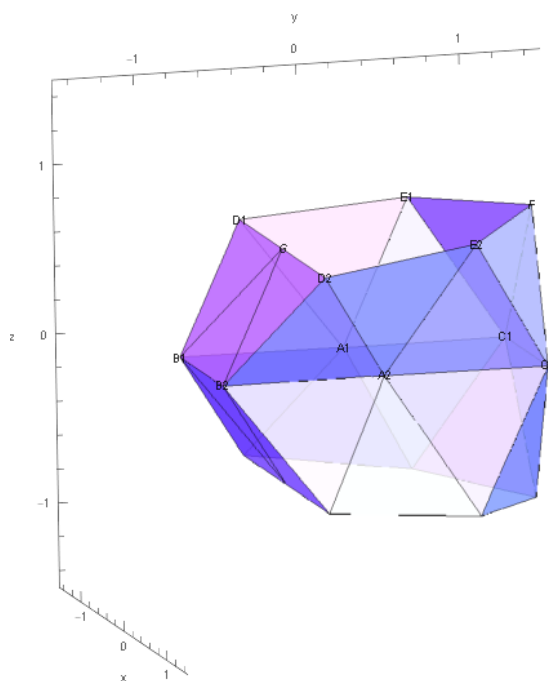


Figura 3.10

di triangoli equilateri rappresenta l'elemento da ruotare a scatti di un angolo pari

a due volte ω^4 per ottenere il toro.

Il punto P rispetto al quale occorre ruotare tale figura è ottenuto calcolando l'intersezione con l'asse y della retta (nel piano yz) passante per F e con coefficiente angolare $M_1(\alpha^*)$. Applicando la rotazione con centro P attorno al vettore $(1, 0, 0)$, si giunge alla situazione di figura 3.11.

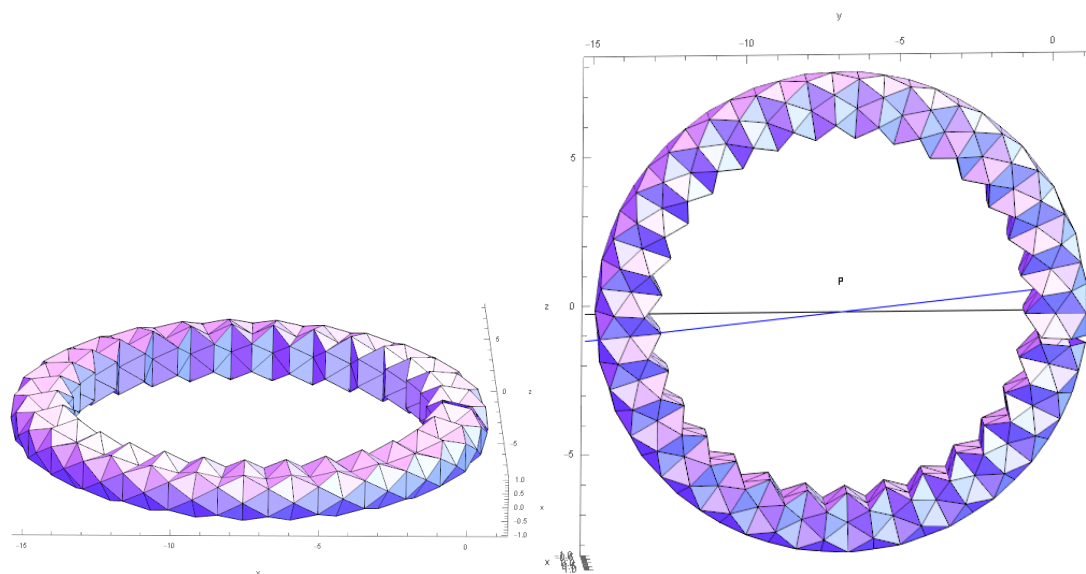


Figura 3.11

Concordemente all'esito della funzione *Rationalize* applicata a $\frac{\omega}{2\pi}$, si intravede una discrepanza tra il primo e l'ultimo blocco, meglio visibile in figura 3.12. Tale distanza fa sì che il toro non si richiuda. Essa sembra essere troppo grande da essere attribuita alla propagazione dell'errore di macchina, fattore sempre presente quando si opera con qualsiasi calcolatore.

Si può quindi pensare che non sia possibile costruire un toro piatto costituito da tutti e soli triangoli equilateri e le cui sezioni meridiane siano poligoni regolari con sei lati. Tuttavia, occorrerebbe effettuare una trattazione più approfondita dell'errore commesso per esserne certi: operazione che risulta notevolmente dispendiosa, dato il numero di operazioni compiute dal programma e la complessità delle soluzioni fornite passo dopo passo.

⁴si ricordi che ω è l'angolo formato dal piano "superiore" di uno solo dei due blocchi col piano orizzontale

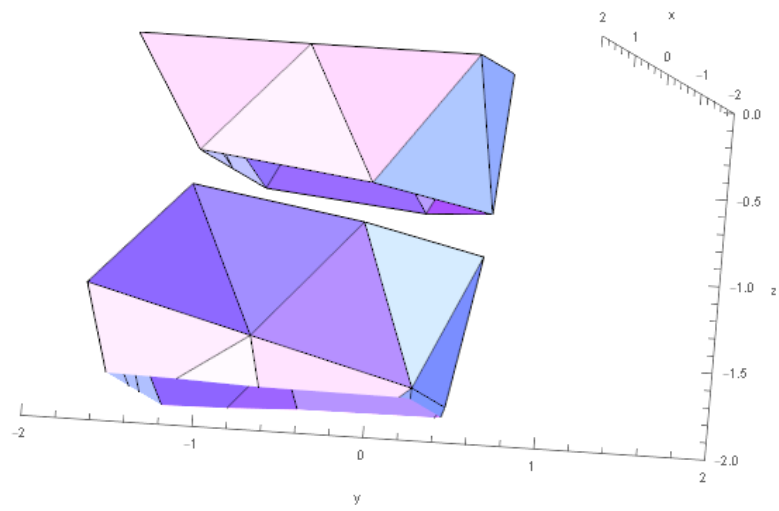


Figura 3.12

Appendice A

A.1 Elementi di topologia

Riportiamo brevemente le nozioni prese in prestito dalla topologia di cui ci siamo serviti in alcuni passaggi dei capitoli precedenti. Innanzitutto diamo la seguente

Definizione A.1. Si definisce spazio topologico una coppia (X, τ) ove X è un insieme e $\tau \subset P(X)$ è tale che

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ (chiuso per unioni arbitrarie);
3. $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \tau \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$ (chiuso per intersezioni finite);

Un sottoinsieme $A \subset X$ è detto aperto in (X, τ) se esso appartiene a τ . $C \subset X$ si dirà invece chiuso se il suo complementare in X è aperto.

Possiamo caratterizzare gli insiemi aperti/chiusi anche in un altro modo.

Definizione A.2. Sia (X, τ) uno spazio topologico e $E \subset X$ e definiamo:

- $Int_X E = \{x \in X \mid \exists I \text{ intorno di } x \text{ con } I \subset E\}$ (interno di E);
- $Cl_X E = \{x \in X \mid \forall I \text{ intorno di } x \text{ si ha } I \cap E \neq \emptyset\}$ (chiusura di E);
- $Fr_X E = \{x \in X \mid \forall I \text{ intorno di } x \text{ si ha } I \cap E \neq \emptyset \neq I \setminus E\}$ (frontiera di E).

Sfruttando interno e chiusura di un insieme, possiamo dire che $E \subset X$ è aperto se e solo se esso coincide col suo interno. Analogamente E è chiuso se e solo se $E = ClE$.

Osserviamo che qualsiasi spazio metrico è uno spazio topologico. Più precisamente, essendo uno spazio metrico una coppia (X, d) con X un insieme e $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ una metrica su X , possiamo costruire lo spazio topologico $X = (X, \tau)$ in maniera tale che

$$X = (X, \tau) = \langle d \rangle = \langle \{B_d(x, \epsilon) \mid x \in X, \epsilon > 0\} \rangle$$

ove la boccia aperta $B_d(x, \epsilon)$ è formata da tutti i punti che distano al più ϵ da x . In una topologia generata da una metrica, quindi, ciascun aperto può essere scritto come unione di bocce.

Passiamo all'introduzione di alcune notevoli proprietà topologiche.

Definizione A.3. Diciamo che uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ è compatto se $\forall \mathcal{U}$ ricoprimento aperto¹ di $X \exists \{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ sottoricoprimento finito.

In \mathbb{R}^n , facendo riferimento alla topologia generata dalla metrica euclidea, gli insiemi compatti corrispondono a tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati.

Definizione A.4. Diciamo che uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ è connesso se, per definizione, $\nexists^n A, B \subset X$ aperti (o chiusi) tali che $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$. Una tale partizione aperta (o chiusa) non banale è detta sconnesione di X .

Indichiamo direttamente con X lo spazio topologico formato dalla coppia (X, τ) .

Definizione A.5. Uno spazio topologico X si dice connesso per archi se $\forall x, y \in X \exists$ un arco (o cammino) $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ continuo tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$

Esempio A.6. Un semplice esempio di spazio topologico connesso è rappresentato dai sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n . Infatti, comunque presi due punti $x, y \in X \subset \mathbb{R}^n$, la funzione $\alpha(t) = (1-t)x + ty$ rappresenta un arco continuo da x a y (essa parametrizza il segmento \overline{xy}), che è tutto contenuto in X se X è convesso.

¹un ricoprimento aperto di X è una famiglia \mathcal{F} di insiemi aperti la cui unione contiene X

Si può dimostrare che la connessione per archi implica la connessione di uno spazio topologico.

A.2 Equazioni di Codazzi-Mainardi

Vediamo come giungere alle cosiddette equazioni di Codazzi-Mainardi, sfruttate nella sezione 3.2. Consideriamo innanzitutto una parametrizzazione locale regolare $\phi: U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ di una superficie S e sia come al solito $N: \phi(U) \rightarrow S^2$ il versore normale alla superficie. Essendo la terna $\{X_1, X_2, N\}$ una base (non necessariamente ortogonale e/o ortonormale) di \mathbb{R}^3 , possiamo esprimere qualsiasi vettore di \mathbb{R}^3 come una sua combinazione lineare. In particolare devono esistere delle funzioni $\Gamma_{ij}^h, h_{ij}, a_{ij} \in C^\infty(U)$ tali che

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_i \partial u_j} = X_{ij} = \Gamma_{ij}^1 X_1 + \Gamma_{ij}^2 X_2 + h_{ij} N, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial(N \circ \phi)}{\partial u_j} = \frac{\partial N}{\partial X_j} = a_{1j} X_1 + a_{2j} X_2 \quad (\text{A.2})$$

per $i, j = 1, 2$. Osserviamo che, dalle (2.9), le a_{ij} coincidono con gli opposti dei coefficienti l_i^j dell'operatore forma scritti nella base $\{X_1, X_2\}$ del piano tangente. Inoltre, come si vede dalle (1.1) e (1.2) si ha $h_{ij} = l_{ij}$.

Notiamo che Γ_{ij}^r e h_{ij} sono simmetriche rispetto agli indici in basso, cioè

$$\Gamma_{ij}^r = \Gamma_{ji}^r \quad e \quad h_{ij} = h_{ji}$$

per ogni $i, j, r = 1, 2$.

Calcoliamo i simboli di Christoffel che compaiono nella (A.1); moltiplicando scalarmente tale equazione per X_1 e X_2 con $i = j = 1$ otteniamo

$$\begin{cases} g_{11}\Gamma_{11}^1 + g_{12}\Gamma_{11}^2 = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1^2}, X_1 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} \langle X_1, X_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \\ g_{12}\Gamma_{11}^1 + g_{22}\Gamma_{11}^2 = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1^2}, X_2 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u_1} \langle X_1, X_2 \rangle - \left\langle X_1, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1 \partial u_2} \right\rangle = \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Analogamente si trova

$$\begin{cases} g_{11}\Gamma_{12}^1 + g_{12}\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \\ g_{12}\Gamma_{12}^1 + g_{22}\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

e

$$\begin{cases} g_{11}\Gamma_{22}^1 + g_{12}\Gamma_{22}^2 = \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \\ g_{12}\Gamma_{22}^1 + g_{22}\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

La matrice dei coefficienti di questi tre sistemi lineari ha determinante $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, che è sempre positivo: pertanto essi ammettono un'unica soluzione, esprimibile in termini dei coefficienti della prima forma fondamentale e delle loro derivate.

Osservazione A.7. Come nel caso delle equazioni (3.5), se la parametrizzazione locale è ortogonale ($g_{12} = 0$) i simboli di Christoffel hanno un'espressione particolarmente semplice:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}, & \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}, & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Esempio A.8. Consideriamo la parametrizzazione $\omega(u, v)$ del toro utilizzata nell'esempio 1.17. In tal caso, avevamo

$$g_{uu} = \langle X_u, X_u \rangle = r^2, \quad g_{uv} = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad g_{vv} = \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2,$$

perciò la parametrizzazione risulta ortogonale; dalle (A.6) si ha:

$$\begin{cases} \Gamma_{uu}^u = 0, & \Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u = 0, & \Gamma_{vv}^u = \frac{\sin u(a+r \cos u)}{r}, \\ \Gamma_{uu}^v = 0, & \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = -r \sin u, & \Gamma_{vv}^v = 0 \end{cases}$$

Vediamo ora quali condizioni (dette di compatibilità) devono soddisfare i simboli di Christoffel. Per trovarle, deriviamo ulteriormente la (A.1). Anche stavolta,

esisteranno delle funzioni $A_{ijk}^r, B_{ijk} \in C^\infty(U)$ tali che

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} = A_{ijk}^1 X_1 + A_{ijk}^2 X_2 + B_{ijk} N.$$

Di nuovo, il teorema di Schwarz ci assicura che le funzioni A_{ijk}^r, B_{ijk} sono simmetriche rispetto agli indici in basso. In particolare

$$A_{kij}^r = A_{ijk}^r = A_{ikj} \quad e \quad B_{kij} = B_{ijk} = B_{ikj}$$

per ogni $i, j, k, r = 1, 2$. Per calcolare l'espressione di A_{ijk}^r e B_{ijk} deriviamo la (A.1) ed utilizziamo le (A.1) e (A.2); si ottiene:

$$A_{ijk}^r = \frac{\partial \Gamma_{jk}^r}{\partial u_i} + \Gamma_{jk}^1 \Gamma_{i1}^r + \Gamma_{jk}^2 \Gamma_{i2}^r + h_{jk} a_{ri},$$

$$B_{ijk} = \Gamma_{jk}^1 h_{i1} + \Gamma_{jk}^2 h_{i2} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u_i}$$

La condizione $B_{ijk} - B_{jik} = 0$ ci fornisce, per ogni $i, j, k = 1, 2$ le equazioni di Codazzi-Mainardi:

$$\sum_{s=1}^2 (\Gamma_{jk}^s h_{is} - \Gamma_{ik}^s h_{js}) = \frac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial u_i}. \quad (\text{A.7})$$

A.3 Campi vettoriali: cenni

Riportiamo infine, senza dimostrazione[2], importanti risultati legati alla teoria dei campi vettoriali, utilizzati nel Capitolo 3 per la dimostrazione del teorema di Hartman-Nirenberg. Innanzitutto, diamo la seguente

Definizione A.9. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Un campo vettoriale (tangente) su S è un'applicazione $X: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $X(p) \in T_p S$ per ogni $p \in S$. Indichiamo con $\tau(S)$ lo spazio vettoriale dei campi vettoriali tangenti a S .

Esempio A.10. Se $\omega: U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale di una superficie S , allora $X_1, X_2: \omega(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono campi vettoriali definiti su $\phi(U)$; diremo che sono

i campi coordinati indotti da ω .

Definizione A.11. Una curva integrale di un campo vettoriale $X \in \tau(S)$ su una superficie S è una curva $\sigma: J \rightarrow S$ tale che $\sigma'(t) = X(\sigma(t))$ per ogni $t \in J$.

In altre parole, una curva integrale di un campo vettoriale tangente ad una superficie S è una curva contenuta in S tangente punto per punto alla direzione del campo vettoriale. Si può dimostrare che per trovare le curve integrali di un campo vettoriale occorre risolvere sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Teorema A.12. *Sia $X \in \tau(S)$ un campo vettoriale su una superficie S . Allora per ogni $p_0 \in S$ esiste una curva integrale $\sigma: J \rightarrow S$ di X con $\sigma(0) = p_0$, e due tali curve integrali coincidono nell'intersezione degli intervalli di definizione.*

Il fatto che due curve integrali uscenti dallo stesso punto $p \in S$ coincidano nell'intersezione degli intervalli di definizione ci assicura che esiste sempre la curva integrale massimale uscente da p .

Mostriamo ora brevemente come sia possibile utilizzare i campi vettoriali per costruire parametrizzazioni locali con sostegno delle curve coordinate assegnato.

Teorema A.13. *Siano $Y_1, Y_2 \in \tau(S)$ campi vettoriali su una superficie S tali che $Y_1(p) \times Y_2(p) \neq 0$ per qualche $p \in S$. Allora esiste una parametrizzazione locale $\phi: U \rightarrow S$ centrata in p tale che X_j è proporzionale a Y_j , per $j = 1, 2$. In particolare, i sostegni delle curve coordinate di ϕ in $\phi(U)$ coincidono con i sostegni delle curve integrali di Y_1 e Y_2 .*

Corollario A.14. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora esiste una parametrizzazione locale ortogonale centrata in p .*

Dimostrazione. Sia $\phi: U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale qualunque centrata in p . Poniamo $Y_1 = X_1$ e

$$Y_2 = X_2 - \frac{\langle X_1, X_2 \rangle}{\langle X_1, X_1 \rangle} X_1.$$

Allora Y_1 è sempre perpendicolare a Y_2 , per cui applicando il Teorema A.13 otteniamo la parametrizzazione locale ortogonale cercata. \square

Concludiamo con il seguente

Corollario A.15. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Allora:*

1. *se p non è un punto ombelicale, allora esiste una parametrizzazione locale centrata in p le cui curve coordinate sono linee di curvatura*
2. *se p è un punto iperbolico, allora esiste una parametrizzazione locale centrata in p le cui curve coordinate sono linee asintotiche.*

Dimostrazione. Limitiamoci al punto (1). Il fatto che p non è ombelicale implica che esiste un intorno $V \in S$ di p tale che ogni punto $q \in V$ ha due direzioni principali distinte, che sono gli autovettori di L_p . Siccome gli autovettori si possono esprimere in termini della matrice che rappresenta L_p rispetto alla base indotta da una qualsiasi parametrizzazione locale centrata in p , e quindi in termini dei coefficienti metrici e dei coefficienti di forma, ne segue che, a meno di restringere V , possiamo definire due campi vettoriali $Y_1, Y_2 \in \tau(V)$ tali che $Y_1(q)$ e $Y_2(q)$ siano direzioni principali distinte per ogni $q \in V$. Allora la tesi segue subito dal Teorema A.13. \square

Bibliografia

- [1] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., 1976.
- [2] F. Tovena M. Abate. *Curve e superfici*. Springer, 2006.
- [3] William Schumacher Massey. Surfaces of gaussian curvature zero in euclidean space. *Tohoku Math. J.*, 1962.
- [4] Louis Niremberg Philip Hartman. On spherical image maps whose jacobians do not change sign. *American Journal of Mathematics*, 1959.

Ringraziamenti

Premetto che non esistono parole, per quanto possano essere scelte con cura, che renderebbero giustizia al senso di gratitudine che provo nei confronti di chi mi ha accompagnato lungo questo percorso.

Ai miei genitori devo tutto; non riuscirò mai a sdebitarmi per avermi concesso l'opportunità di scegliere e coltivare la mia passione, in tempi dove studiare è tutto meno che scontato. Siete la ragione prima di questo piccolo traguardo.

Ai miei colleghi, con cui ho condiviso sforzi, lacrime, sorrisi, soddisfazioni, superato ostacoli e momenti difficili: senza di voi non ce l'avrei fatta. Tutto ciò che ci unisce va ben oltre i libri di Matematica e continuerà a farlo, così come continueremo a gioire l'uno dei traguardi dell'altro.

Ai miei amici, che ci sono sempre stati, e a chi non c'è più, ora che questo itinerario sta per volgere al termine per far spazio a nuove entusiasmanti sfide. Tutti voi avrete sempre un posto speciale nel mio cuore.

Non posso fare a meno di ringraziare il mio relatore, in segno della stima che provo nei Suoi confronti, per avermi dedicato il Suo tempo e per aver condiviso con me le Sue conoscenze.

BIBLIOGRAFIA

A me stesso, per non aver mai perso di vista l'obiettivo.

A voi tutti, grazie infinite.