

Università degli Studi di Camerino

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica e Applicazioni (Classe LM-40)



Il Teorema di Sharkovsky

Tesi di laurea in Sistemi Dinamici

Laureando

Marco Romagnoli

Relatori

Prof. Stefano Isola

Prof. Riccardo Piergallini

A.A. 2018/2019

A tutti coloro che mi hanno sostenuto in questi anni

*Chi non conosce la matematica difficilmente riesce a cogliere la bellezza,
la più intima bellezza, della natura.*

R.P. Feynman

Indice

1	Nozioni preliminari	7
1.1	Grafi e alberi	7
1.2	Sistemi dinamici	14
2	Periodo 3 implica tutti i periodi	17
2.1	Relazioni di copertura e punti fissi	17
2.2	Il lemma dell'itinerario	20
2.3	Periodo 3 implica tutti gli altri periodi	22
3	Il Teorema di Sharkovskiy	25
3.1	Un particolare tipo di cicli	25
3.2	L'ordinamento di Sharkovskiy	32
3.3	Il teorema di Sharkovskiy	34
4	Il teorema inverso	39
5	Estensione agli alberi	53
5.1	Alberi, grafi e matrici	53
5.2	L'ordinamento parziale per gli alberi	59
5.3	Sharkovskiy e alberi	61
6	Equazioni alle differenze periodiche	66
6.1	Definizioni preliminari	66

6.2	Cicli geometrici	69
6.3	Il teorema per equazioni alle differenze	72
6.4	Il teorema inverso per equazioni alle differenze	74

Sommario

In questo lavoro verrà studiato il Teorema di Sharkovsky, il suo inverso e verranno presentate alcune generalizzazioni. La maggior parte delle dimostrazioni matematiche utilizzate nell'elaborato non richiedono conoscenze avanzate da parte del lettore. Per le estensioni, dove sono utilizzate nozioni più complicate, gli strumenti saranno comunque spiegati durante lo svolgimento dell'elaborato.

Introduzione

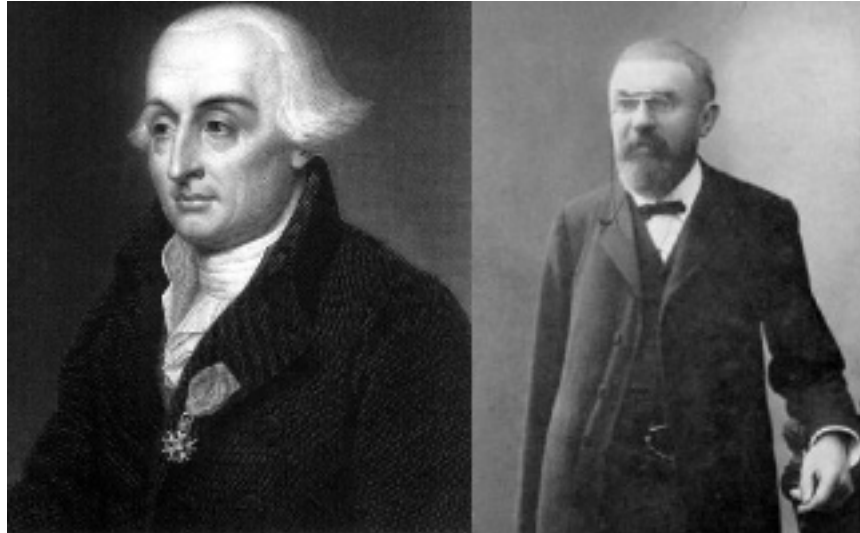
Le discipline scientifiche hanno avuto un notevole impatto sull'evoluzione sociale e culturale dell'umanità per millenni, spesso in modi difficilmente immaginabili.

In questo lavoro tratteremo un importante teorema appartenente alla teoria dei sistemi dinamici, che trova applicazione in diverse discipline scientifiche, dalla meteorologia e la matematica alle scienze economiche e la medicina.

La teoria dei sistemi dinamici nasce dall'osservazione delle meccaniche che governano i moti dei corpi celesti, i primi a occuparsi di questa disciplina furono scienziati del calibro di: Isaac Newton, Joseph-Louis Lagrange e William Rowan Hamilton. Nonostante ciò, la teoria era ancora agli inizi e verrà sviluppata soltanto dopo lo studio del problema dei tre corpi svolto da Poincarè e Laplace e le ricerche sull'atmosfera terrestre del matematico Edward Lorenz.

Nella seconda parte del novecento, in particolar modo durante la guerra fredda, sia gli USA che l'URSS lavorarono in maniera indipendente all'avanzamento della disciplina e nonostante la limitatezza nello scambio di informazioni tra gli scienziati delle due superpotenze, vennero comunque ottenuti notevoli risultati. A oggi la teoria dei sistemi dinamici rimane fondamentale per la ricerca scientifica ed è in continua evoluzione.

Per quanto riguarda il teorema di Sharkovsky, negli anni '50 un primo risultato fu ottenuto dallo scienziato americano W.A. Coppel: "ogni punto



Joseph-Louis Lagrange e Henri Poincaré.

converge a un punto fisso sotto l'iterazione di una mappa continua di un intervallo chiuso se e solo se la mappa non ha punti di periodo due". Sarà soltanto dieci anni dopo che il matematico ucraino O.M. Sharkovsky riotterrà in maniera del tutto indipendente i risultati del suo predecessore e li amplierà pubblicando il suo famoso teorema.

Il lavoro di Sharkovsky non verrà conosciuto al di fuori del mondo comunista per altri quindici anni, fino a quando Tien-Yien Li e James A. Yorke pubblicheranno il loro articolo *Period Three Implies Chaos*, sarà proprio Yorke a venir contattato da Sharkovsky durante una conferenza a Berlino Est che lo informerà di aver già provato i suoi risultati. A questo punto il lavoro di Sharkovsky fu divulgato anche dall'altra parte della cortina di ferro e reso noto a tutto il mondo. Negli anni seguenti nuove e più eleganti dimostrazioni del teorema vennero alla luce, alcune delle quali saranno riportate in questo lavoro.



Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky.

Vediamo ora una breve biografia del matematico. Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky nasce il 7 Dicembre 1936 a Kiev, in Ucraina, dimostrando da sempre una particolare affinità con le scienze matematiche, infatti già nel 1952 da studente di scuola media, vinse le olimpiadi matematiche di Kiev. Successivamente si iscrisse all'università locale, producendo già al primo anno di studi alcuni risultati sull'asintoticità di curve algebriche, ma questo sarà soltanto l'inizio della sua brillante carriera da ricercatore. Nel 1958, si laureò al dipartimento di meccanica e matematica all'università statale di Kiev, continuando i suoi studi procedendo a consegnare la tesi di dottorato all'istituto ucraino di matematica dell'Accademia delle scienze dell'URSS.

Già nell'anno del suo dottorato aveva pubblicato un gran numero di articoli, tra i quali citiamo: *Necessary and sufficient conditions for convergence of one-dimensional iterative processes (1960)*, *Rapidly converging iterative processes (1961)*, *Solutions of a class of functional equations (1961)*, and *The reducibility of a continuous function of a real variable and the structure of the stationary points of the corresponding iteration process (1961)*.

Nel 1961, fu assunto all'istituto di matematica dell'Accademia delle scienze

Ucraina e dal 1967 insegnò all'Università di Kiev, nel 1974 venne messo a capo del dipartimento di equazioni differenziali all'istituto di matematica dell'Accademia di scienze dell'URSS, lavorando per la creazione di un dipartimento di teoria dei sistemi dinamici nell'accademia, da lui fondato nel 1986 e nel 2006 entrò a far parte dell'Accademia delle scienze Ucraine. Sharkovsky è tutt'ora in vita e continua il suo lavoro come capo del dipartimento di teoria dei sistemi dinamici da lui stesso fondato.

Nella sua carriera si è occupato di teoria dei sistemi dinamici, teoria della stabilità e teoria delle oscillazioni, ha anche lavorato alla teoria dei funzionali, delle equazioni differenziali funzionali, delle equazioni alle differenze e alla loro applicazione. E' principalmente conosciuto per il teorema che porta il suo nome, pubblicato nel 1964 nell'articolo *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*.

Concludiamo l'introduzione dando qui di seguito una spiegazione degli argomenti trattati in questo lavoro: nel primo capitolo richiameremo le definizioni principali relative alla teoria dei grafi e ai sistemi dinamici. Nel secondo capitolo parleremo del caso in cui l'esistenza di un punto di periodo tre implica anche l'esistenza di punti di ogni altro periodo. La dimostrazione vera e propria del teorema di Sharkovsky sarà discussa nel terzo capitolo, mentre nel quarto dimostreremo il teorema inverso. Negli ultimi due capitoli studieremo delle estensioni del teorema di Sharkovsky, prima nel caso in cui la funzione venga applicata a un particolare tipo di grafi detti "alberi" e poi a strutture derivanti da equazioni alle differenze periodiche.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Grafi e alberi

Definizione 1.1.1. Un *grafo non orientato* G è una terna (V, L, ϕ) , in cui:

- (1) V è un insieme non vuoto i cui elementi saranno chiamati vertici,
- (2) L è un insieme disgiunto da V di elementi detti *lati*,
- (3) data $\sigma : V \times V \rightarrow V \times V$ tale che $(v, w) \mapsto (w, v)$, definiamo la funzione $\phi : L \rightarrow (V \times V) / \sigma \cong \{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$ chiamata *funzione di incidenza* che associa a un lato $l \in L$ l'insieme $\{v, w\}$ dei suoi estremi.

Definizione 1.1.2. Dato un grafo G , due vertici distinti $v, w \in V$ si dicono *adiacenti* se esiste almeno un lato $l \in L : \phi(l) = \{v, w\}$.

Due lati distinti $l_i, l_j \in L$ si dicono *incidenti* se esiste un $v \in \phi(l_i) \cap \phi(l_j)$.

Il *grado* di un vertice v è il numero di lati $l : v \in \phi(l)$.

Definizione 1.1.3. Un grafo si dice *completo* se $\forall v, w \in V$, esiste almeno un lato $l \in L : \phi(l) = \{v, w\}$

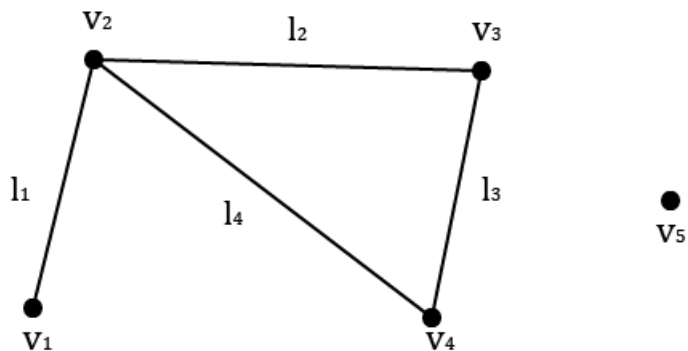


Figura 1.1.1: Esempio di grafo non orientato.

Definizione 1.1.4. Dato un grafo G , un *cammino* tra due vertici $v, w \in V$ è una sequenza finita $\alpha = (l_1, \dots, l_n)$ di lati distinti contenuti in L che parte dal vertice v e termina in w , in questo caso la n è detta *lunghezza* del cammino. Un cammino α dove $v = w$ è chiamato *circuito*.

Definizione 1.1.5. Un grafo G si dice *connesso* se $\forall v, w \in V$ coppia di vertici distinti esiste un cammino tra v e w .

Definizione 1.1.6. Un grafo G connesso e senza circuiti è chiamato *albero* e sarà indicato con T .

Teorema 1.1.7. Sia G un grafo finito. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) G è un albero.

(ii) $\forall v, w \in V : v \neq w$ esiste uno e un solo cammino tra v e w .

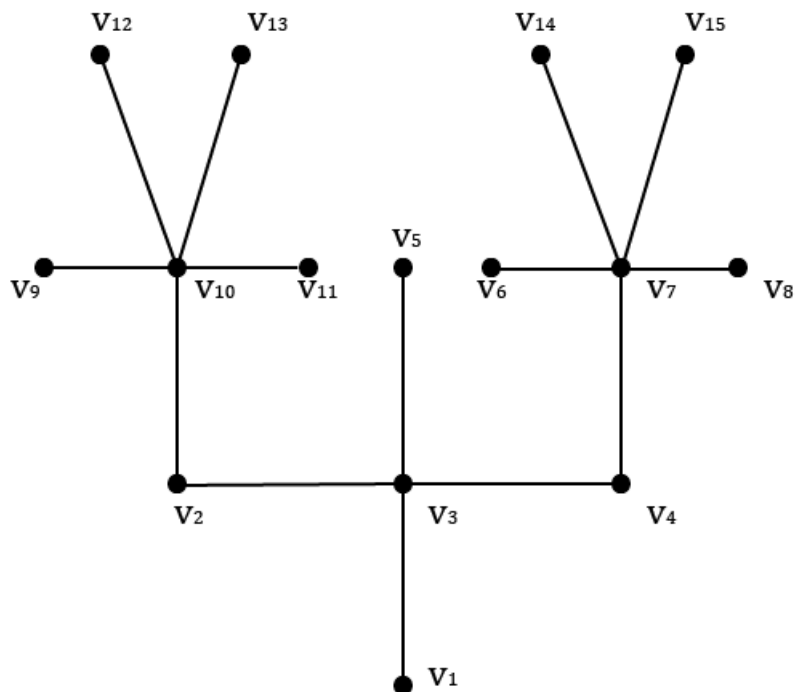


Figura 1.1.2: Esempio di albero non orientato.

(iii) G è connesso e $\forall l \in L$ il grafo $G' = (V, L - \{l\}, \phi|_l)$ non è connesso.

(iv) G non ha circuiti e per ogni coppia di vertici distinti $v, w \in V$ e non adiacenti il grafo $G'' = (V, L \cup \{u, v\}, \tilde{\phi})$ ha esattamente un circuito.

Dimostrazione. Dimostriamo le quattro implicazioni $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Data una coppia di vertici distinti $v, w \in V$, per la connessione di G , dovrà esistere almeno un cammino α tra v e w . Supponiamo che esista un altro cammino, α' , diverso da α , se α e α' non hanno lati in comune, allora il cammino che segue α partendo da v , arriva in w e poi torna indietro lungo α' è un circuito di G , assurdo. Se invece esistessero dei lati in comune, allora definiamo α'' come il più breve cammino di lati di α non in comune con α' , che termina in un vertice $u \in \phi(l)$ per l che compare in α' , allora il cammino ottenuto seguendo α'' e tornando indietro lungo α' formerà un circuito, assurdo.

(ii) \Rightarrow (iii) Presi due vertici $v, w \in V$ adiacenti, il lato $l = \{v, w\}$ che li collega è l'unico cammino di G tra v e w . Eliminando il lato $l \in L$ i vertici v e w non sarebbero più collegati da nessun cammino e quindi G perderebbe la sua connessione.

(iii) \Rightarrow (iv) Supponiamo che G possieda un circuito $\alpha = \{l_1, \dots, l_m\}$ (per $m \geq 3$) e che per $i = 1, \dots, m \in \mathbb{N}$ gli estremi di l_i siano v_{i-1} e v_i . Se togliessimo l_1 da α , allora i due estremi v_0 e v_1 resterebbero comunque collegati dal cammino l_2, \dots, l_m e $(V, L - \{l_1\}, \phi_1)$ sarebbe connesso, però ciò contraddice (iii) e quindi G non ha circuiti. Supponiamo che i due vertici $v, w \in V$ non siano adiacenti. Dalla connessione di G , esiste un cammino α da v in w composto da almeno due lati. Se aggiungessimo a α il lato $l = \{v, w\}$, allora il grafo risultante $G'' = (V, L \cup \{l\}, \phi_1)$ acquisterebbe un circuito, costituito da tutti i lati di α seguiti da l . Osserviamo che questo circuito è l'unico possibile in G'' , infatti ogni altro circuito β in G'' dovrebbe contenere un lato non in G perché G non ha circuiti. Se acquistasse più di un circuito, poniamo l lato di β , che sarà l'unico lato di β non in L , allora v e w compaiono in β . Quindi in G esiste un altro cammino tra v e w oltre α , ottenuto da β eliminando l , abbiamo ottenuto due cammini che connettono v e w e dal ragionamento fatto in precedenza, dovranno esserci dei circuiti

in G , assurdo.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Il punto (iv) vieta circuiti in G , quindi c'è solo da dimostrare la connessione di G . Siano $v, w \in V$, dobbiamo mostrare l'esistenza di un cammino in G tra v e w . Se v e w sono adiacenti, allora dovrà esistere un lato che li collega, se invece v e w non sono adiacenti, allora aggiungiamo a L il lato $l = \{v, w\}$, ottenendo un grafo $G'' = (V, L \cup \{l\}, \phi)$ che per ipotesi ha un unico circuito α , allora $l \in \alpha$ perché G non ha circuiti e il cammino che si ottiene da α eliminando l è composto da lati di G e collega v e w . Quindi G è connesso.

□

Definizione 1.1.8. Un *grafo orientato* G è una terna (V, L, ϕ) , in cui:

- (1) V è un insieme non vuoto di vertici,
- (2) L è un insieme disgiunto da V i cui elementi sono chiamati *lati orientati*,
- (3) $\phi : L \rightarrow V \times V \cong \{(v, w) : v, w \in V\}$. In questo caso la *funzione d'incidenza* ϕ associa a ogni lato $l \in L$ la coppia ordinata dei suoi estremi.

Adattiamo alcune delle definizioni precedenti:

Definizione 1.1.9. Definiamo un *cammino orientato* di lunghezza n in G da $v \in V$ a $w \in V$ come una sequenza ordinata di lati distinti $l_1 = (v_0, v_1), l_2 = (v_1, v_2), \dots, l_n = (v_{n-1}, v_n)$ con $v_0 = v$ e $v_n = w$.

Un *circuito orientato* è un cammino orientato che parte e termina nello stesso vertice.

Osservazione 1.1.10. In un cammino $\alpha = (l_1, \dots, l_n)$ scriveremo $-l_i$ se il lato l_i viene attraversato in direzione opposta alla sua orientazione.

Definizione 1.1.11. Dato un albero T con n vertici è possibile costruire un *albero orientato* fissando un vertice $v \in V$ (detto *radice*) e collegando a esso tutti gli altri vertici tramite il cammino orientato che parte da v .

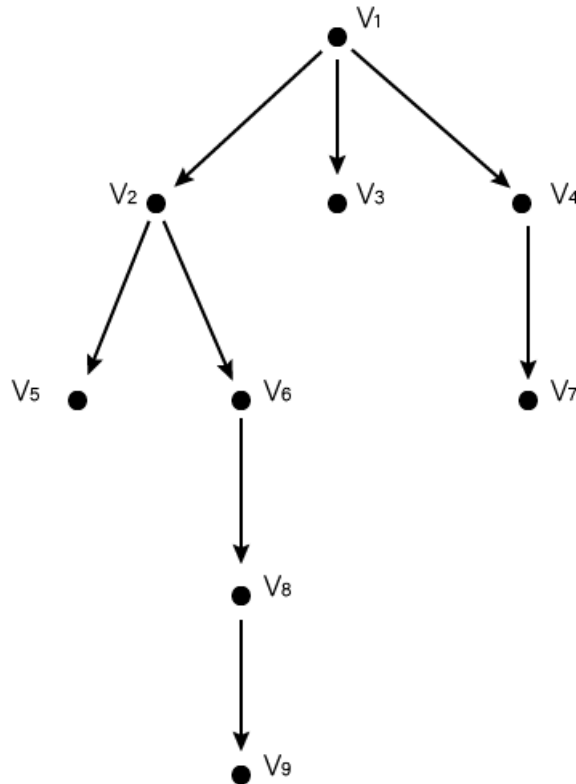


Figura 1.1.3: Esempio di albero orientato.

Definizione 1.1.12. Dati uno spazio topologico X , un insieme $P \subset X$ di n elementi e una permutazione ciclica θ di P , allora la coppia (P, θ) è chiamata *ciclo*.

La *lunghezza* del ciclo è data dal numero dei suoi elementi, che in questo caso è n .

Definizione 1.1.13. Data una funzione $f : X \rightarrow X$ continua e un ciclo (P, θ) con $P \subset X$, diremo che P è un *ciclo di f* (o che f ha un ciclo P), se $\theta = f|_P$.

Osservazione 1.1.14. Nel corso del lavoro identificheremo un ciclo (P, θ) con P quando la θ sarà la restrizione di una funzione $f : P \rightarrow X$.

Definizione 1.1.15. Dato $I \subset \mathbb{R}$, $P \subset I$ finito e una funzione continua $f : I \rightarrow I$. Definiamo degli intervalli $I_1, \dots, I_n \subset I$ tali che $\text{Int}(I_i) \cap P = \emptyset$, gli estremi di ogni I_i sono punti di P e $P \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$. Possiamo associare a P e f un grafo orientato i cui vertici sono gli intervalli I_1, \dots, I_n e a due vertici associamo il lato $\phi(l) = (I_i, I_j)$ se $I_j \subseteq f(I_i) \forall i, j = 1, \dots, n$.

1.2 Sistemi dinamici

Poiché il teorema di Sharkovsky si applica soltanto a sistemi dinamici a tempo discreto, in questo lavoro concentreremo la nostra attenzione a tale tipologia.

Definizione 1.2.1. (sistema dinamico discreto) Un *sistema dinamico* consiste in uno spazio $X \subset \mathbb{R}$ detto spazio degli stati e una famiglia di funzioni che esprime il valore di uno stato $x \in X$ in un certo istante $n \in \mathbb{N}$ tenendo conto degli stati precedenti del sistema:

$$f_n : X^n \times \mathbb{N} \rightarrow X$$

Osservazione 1.2.2. Fissato un $x_0 \in X$, detto *condizione iniziale*, lo stato del sistema al tempo $n + 1$ è dato dalla successione $(x_n)_{n \geq 1}$ definita come

$$x_{n+1} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, n).$$

Osservazione 1.2.3. Nel caso in cui lo stato del sistema dinamico non dipenda nè dagli stati precedenti del sistema nè dal tempo, allora la legge che regola il sistema dinamico sarà data da $f : X \rightarrow X$.

Definizione 1.2.4. Dato un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}$ e una funzione $f : X \rightarrow X$ continua, l'insieme $Orb_f(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$ di un punto x sotto l'azione della funzione f è chiamato *orbita* di x .

Definizione 1.2.5. Identifichiamo la *lunghezza* di un'orbita con il numero dei suoi elementi.

Definizione 1.2.6. Dato un sottoinsieme X , una funzione $f : X \rightarrow X$ continua e un punto $x \in X$ se $\exists n$ minimo intero positivo tale che:

$$f^n(x) = x.$$

allora x è detto *di periodo* n per f .

Definizione 1.2.7. Il punto periodico x è detto *punto fisso* se ha periodo 1.

Osservazione 1.2.8. L'orbita data nella definizione 1.2.4 può essere finita o infinita, nel primo caso il punto x è periodico e la cardinalità dell'orbita coincide con il periodo, nel secondo caso il punto non è periodico.

Definizione 1.2.9. Un'orbita è detta *periodica* se e solo se il punto x è periodico.

Osservazione 1.2.10. Dato un sottoinsieme X e una funzione $f : X \rightarrow X$, se P è un ciclo di f di lunghezza n , allora preso un punto $x \in P$ possiamo identificare P con $Orb_f(x)$.

Osservazione 1.2.11. Combinando la definizione 1.1.15 e l'osservazione 1.2.10 è possibile associare un grafo orientato a un punto $x \in P$.

Teorema 1.2.12. *Dato un intervallo X e una funzione $f : X \rightarrow X$ continua, se $x \in X$ è un punto di periodo n per f^2 , allora:*

- x ha periodo $2n$ per f se n è pari,
- x ha periodo n o $2n$ per f se n è dispari.

Dimostrazione. Consideriamo i due insiemi $Orb_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ e $Orb_{f^2}(x) = \{x, f^2(x), f^4(x), \dots\}$.

Poniamo n pari e notiamo che se esistesse un $m < n : f^m(x) = x$, allora $2m < 2n$ e n non è il periodo di x per f^2 , assurdo. Quindi $Orb_f(x)$ avrà periodo doppio di $Orb_{f^2}(x)$ e il periodo di x per f sarà $2n$.

Se invece n fosse dispari, allora o x è di periodo $2n$ per f come nel caso precedente, oppure $Orb_f(x) = Orb_{f^2}(x)$ e quindi ha periodo n sia per f che per f^2 .

□

Capitolo 2

Periodo 3 implica tutti i periodi

2.1 Relazioni di copertura e punti fissi

Definizione 2.1.1. Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, una funzione $f : I \rightarrow I$ continua e due sottointervalli $I_1, I_2 \subset I$, diremo che I_1 *copre* I_2 se $I_2 \subseteq f(I_1)$.

I seguenti teoremi ci permetteranno di collegare la relazione di copertura con la presenza di punti fissi.

Teorema 2.1.2. *Dato un intervallo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $I \subset f(I)$ allora esiste almeno un punto fisso $x \in I$ per f .*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua definita come $g(y) = f(y) - y, \forall y \in I$.

Poiché $I \subset f(I)$, dovranno esistere due punti $c, d \in I$ tali che $f(c) = a$ e $f(d) = b$.

Se $c = a$ oppure $d = b$, allora abbiamo trovato il punto fisso e il teorema è dimostrato.

Se invece $c > a$ e $d < b$, allora:

$$\begin{aligned}g(c) &= f(c) - c < 0, \\g(d) &= f(d) - d > 0.\end{aligned}$$

Per la continuità di g e dal teorema del valor intermedio, esisterà un punto $x \in I : g(x) = f(x) - x = 0$, quindi:

$$f(x) = x,$$

il che completa la dimostrazione. □

Lemma 2.1.3. *Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Presi due punti $a, b \in I$, allora $[f(a), f(b)] \subset f(I)$.*

Dimostrazione. Preso un generico $c \in [f(a), f(b)]$, allora $f(a) \leq c \leq f(b)$, dal teorema del valor intermedio dovrà esistere un punto $x \in I : f(x) = c$ allora $c \in f(I)$. □

Lemma 2.1.4. *Dati due intervalli $I, J \in \mathbb{R}$ chiusi e limitati e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, supponiamo che $J \subseteq f(I)$, allora dovrà esistere un intervallo chiuso e limitato $K \subseteq I : f(K) = J$.*

Dimostrazione. Poniamo $J = [s, t]$, poiché $\{s, t\} \subset J \subset f(I)$ dovranno esistere due punti $a, b \in I : f(a) = s$ e $f(b) = t$. Poniamo $a < b$ (l'altro caso è equivalente) e consideriamo l'insieme:

$$B = \{x \in [a, b] : f(x) = t\}.$$

Osserviamo che B è non vuoto, chiuso e limitato perché $b \in B$ e $B = [a, b] \cap f^{-1}(t)$, esisterà quindi un elemento minimo $b' \in B$.

Consideriamo ora l'insieme

$$A = \{x \in [a, b'] : f(x) = s\},$$

come prima anche A è non vuoto, chiuso e limitato ed esisterà un elemento massimo $a' \in A$.

Per come sono definite a' e b' , $f(a') = s$ e $f(b') = t$. Se $a' < x < b'$ si ha $f(x) \notin \{s, t\}$, dal lemma 2.1.3 segue che $[s, t] \subseteq f([a', b'])$.

Per avere l'uguaglianza, resta da provare che $f([a', b']) \subseteq [s, t]$.

Supponiamo per assurdo che esista $c \in [a', b']$ tale che $f(c) \notin [s, t]$, consideriamo due casi, o $f(c) < s$ oppure $f(c) > t$.

Nel primo caso dal teorema del valor intermedio segue che $f(x) = s$ per qualche $x \in [c, b']$ ma per come abbiamo definito a' questa è una contraddizione.

Se invece $f(c) > t$, allora $f(x) = t$ per qualche $x \in [a', c]$, il che per definizione di b' porta a un'altra contraddizione. Quindi $f([a', b']) \subseteq [s, t]$, poiché si ha anche $[s, t] \subseteq f([a', b'])$ e quindi $f([a', b']) = [s, t]$, possiamo porre $K = [a', b']$.

□

Lemma 2.1.5. *Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, se ci sono degli intervalli chiusi e limitati $I_0, \dots, I_n \subseteq I : I_i \subseteq f(I_{i-1}) \forall 1 \leq i \leq n$, allora esiste un intervallo $K \subseteq I_0 : f^n(K) = I_n$ e $f^i(K) \subseteq I_i \forall 1 \leq i < n$.*

Dimostrazione. Per $n = 1$, l'enunciato segue dal lemma 2.1.4. Assumiamo quindi $n > 1$ e che il lemma valga $\forall m < n$, possiamo prendere un insieme $K' \subseteq I_1$ tale che $f^{n-1}(K') = I_n$ e $f^i(K') \subseteq I_{i+1} \forall 1 \leq i < n - 1$, sempre dal lemma 2.1.4 dovrà esistere un intervallo $K \subseteq I_0$ tale che $f(K) = K'$ e quindi $f^n(K) = I_n$.

□

2.2 Il lemma dell'itinerario

Definizione 2.2.1. Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, se gli n intervalli $I_0, I_1, \dots, I_{n-1} \subseteq I$ soddisfano le seguenti proprietà:

- $I_{i+1} \subseteq f(I_i) \forall i = 0, \dots, n-2$,
- $I_0 \subseteq f(I_{n-1})$.

allora formano un *circuito di intervalli*.

Definizione 2.2.2. Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, una funzione $f : I \rightarrow I$ continua e un circuito di intervalli $I_0, I_1, \dots, I_{n-1} \subseteq I$, se un punto $x \in I_0$, soddisfa le seguenti proprietà:

1. $f^n(x) = x$,
2. $f^i(x) \in I_i \forall i = 0, \dots, n-1$.

allora diremo che *segue il circuito*.

Lemma 2.2.3. *(dell'itinerario) Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, se gli n intervalli $I_0, I_1, \dots, I_{n-1} \subseteq I$ formano un circuito di intervalli, allora dovrà esistere un punto $x \in I_0$ che segue il circuito.*

Dimostrazione. Usando il lemma 2.1.5 costruiamo iterativamente degli intervalli K :

(1) troviamo un intervallo $K_{n-1} \subseteq I_{n-1} : f(K_{n-1}) = I_0$,

(2) un $K_{n-2} \subseteq I_{n-2} : f(K_{n-2}) = K_{n-1}$,

(3) iteriamo fino a trovare un $K_0 \subseteq I_0 : f(K_0) = K_1$.

Da questa costruzione segue che, $f^i(K_0) = K_i \forall i = 0, 1, \dots, n-2$ da cui $f^n(K_0) = f^{n-1}(K_1) = \dots = f(K_{n-1}) = I_0$, osservando che $K_0 \subseteq I_0$, segue $K_0 \subseteq f^n(K_0)$.

Dal teorema 2.1.2, dovrà esistere un punto $x \in K_0$ tale che

$$f^n(x) = x.$$

Inoltre, per la costruzione precedente:

$$f^j(x) \in I_j \forall 0 \leq j \leq n-1.$$

Il che conclude la dimostrazione. □

Lemma 2.2.4. *Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $P \subset I$ finito e una funzione $f : I \rightarrow I$ continua che abbia punti di periodo $n > 1$. Se il grafo orientato associato a un punto $x \in P$ contiene un circuito d'intervalli $\alpha = I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$ di lunghezza n non ripetitivo, allora esiste un punto $x \in I$ di periodo n tale che $f^i(x) \in I_i \forall 1 \leq i \leq n$.*

Dimostrazione. Dal lemma 2.1.5, dovrà esistere un punto $x : f^n(x) = x$ e $f^i(x) \in I_i \forall 0 \leq i < n$. Supponiamo per assurdo che esista un $k \neq n$ tale che $n = k \cdot m$ e $f^k(x) = x$, osserviamo che due intervalli distinti I_i hanno al massimo un estremo in comune e distinguiamo due casi.

Se $x \notin P$, allora $Orb_f(x) \subset \bigcup_{i=1}^n Int(I_i)$, quindi $I_i = I_{i+k} = \dots = I_{i+k \cdot (m-1)}$, da cui si ottiene che il circuito α è ripetitivo, assurdo.

Se invece $x \in P$, allora l'intervallo $I_1 = [x, f(x)]$ sarà uguale agli intervalli $I_k = [f^k(x), f^{k+1}(x)]$, $I_{2k} = [f^{2k}(x), f^{2k+1}(x)]$, \dots , $I_n = [I_{mk}(x), I_{mk+1}(x)]$ e anche in questo caso α sarà ripetitivo, assurdo. □

2.3 Periodo 3 implica tutti gli altri periodi

Teorema 2.3.1. *Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow I$ continua, se f ha punti periodici di periodo 3, allora ammette punti periodici di ogni altro periodo.*

Dimostrazione. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ (gli altri casi sono equivalenti) tali che $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$.

Definiamo i due intervalli $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [b, c]$, dal lemma 2.1.3 segue:

- $I_1 = [b, c] \subseteq f(I_0) = f([a, b])$,
- $I_0 \cup I_1 = [a, c] \subseteq f(I_1) = f([b, c])$.

Dal teorema 2.1.2, esiste un punto fisso x compreso tra b e c .

Per quanto riguarda f^2 , procediamo come in precedenza, ottenendo:

- $[a, c] \subseteq f^2(I_0) = f^2([a, b])$,
- $[b, c] \subseteq f^2(I_1) = f^2([b, c])$.

Dal teorema 2.1.2, anche f^2 dovrà avere dei punti fissi e dal lemma 2.2.3 almeno uno di questi sarà di periodo 2 per f .

Abbiamo visto i casi in cui $n = 1, 2$, vogliamo costruire punti di periodo $n \forall n > 3$.

Poniamo $n > 3$ e costruiamo una sequenza di intervalli $K_0, K_1, \dots, K_{n-2} \subseteq I_1$ nel seguente modo:

- $K_0 = I_1$,

- poiché $I_1 \subseteq f(I_1)$, dal lemma 2.1.4 dovrà esistere un sottointervallo $K_1 \subseteq K_0 : f(K_1) = K_0$,
- iterando questo argomento, dovranno quindi esistere altri intervalli $K_i \subseteq K_{i-1}$ tali che $f(K_i) = K_{i-1}$ e $f^i(K_i) = K_0$ per $i = 2, \dots, n-1$.

Notiamo che $\forall y \in K_{n-2}, f(y), f^2(y), \dots, f^{n-2}(y) \subseteq I_1, I_1 \subseteq f(I_0)$ e $I_1 \subseteq f^n(K_{n-1})$. Quindi $f^n(K_{n-1})$ copre K_{n-1} e dal teorema 2.1.2 segue che f^n ha un punto fisso x in K_{n-1} .

Dal lemma 2.2.3 si ha che $f^{n-2}(x) \in I_1, f^{n-1}(x) \in I_0$ e $f^n(x) = x$, per dimostrare che x ha periodo n basta provare che la $f^{n-1}(x) \in \text{Int}(I_0)$.

Se $x \notin \text{Int}(I_0)$, allora dal lemma 2.2.3 segue che $f^{n-1}(x) = a$ oppure $f^{n-1}(x) = b$, in questo caso $x = b$ oppure $x = c$, ma tali punti fanno parte di un'orbita di periodo 3, quindi $n = 3$, assurdo.

□

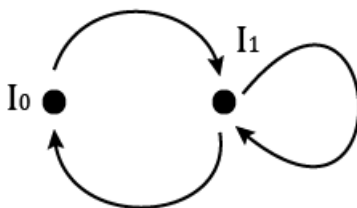


Figura 2.3.1: La costruzione fatta nel teorema.

Capitolo 3

Il Teorema di Sharkovskiy

3.1 Un particolare tipo di cicli

Al fine di dimostrare il teorema di Sharkovskiy, concentriamo la nostra attenzione a particolari tipi di cicli.

Definizione 3.1.1. La seguente definizione cambia nel caso in cui la lunghezza del ciclo sia dispari oppure pari:

Caso dispari

Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, una funzione $f : I \rightarrow I$ continua e un intervallo $P \subset I$ finito, un ciclo (P, f) di lunghezza $n \geq 3$ dispari è un *ciclo di Štefan* se e solo se esiste un elemento $x \in P$ con una delle seguenti proprietà:

$$(1) \quad f^{n-1}(x) < \dots < f^4(x) < f^2(x) < x < f(x) < f^3(x) < \dots < f^{n-2}(x),$$

$$(2) \quad f^{n-2}(x) < \dots < f^3(x) < f(x) < x < f^2(x) < f^4(x) < \dots < f^{n-1}(x).$$

Caso pari

Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, una funzione $f : I \rightarrow I$ continua e un intervallo $P \subset$

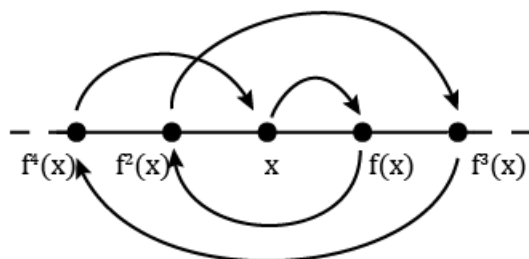


Figura 3.1.1: Esempio di ciclo di Štefan in forma (1).

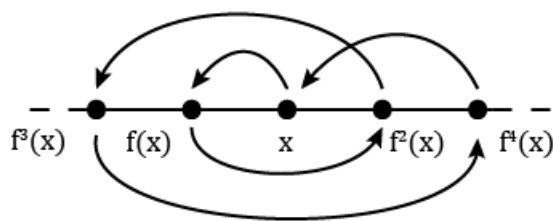


Figura 3.1.2: Esempio di ciclo di Štefan in forma (2).

I finito, consideriamo i punti x_1, \dots, x_{2m} di P ordinati in maniera crescente e definiamo i due insiemi $O_L = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $O_R = \{x_{m+1}, \dots, x_{2m}\}$ se:

- (1) la funzione f è una biezione tra O_L e O_R ,
- (2) considerata f^2 , i cicli (O_L, f^2) e (O_R, f^2) hanno lunghezza dispari e sono di Štefan,

allora P è un ciclo di Štefan. Osserviamo che se in (2) m non fosse dispari, allora possiamo iterare il procedimento sul numero di fattori del 2, finché non ci riconduciamo al caso dispari.

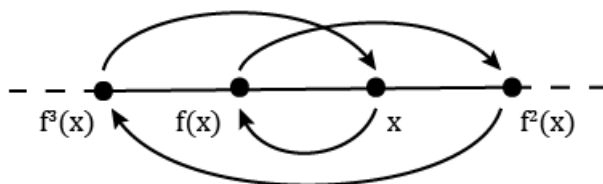


Figura 3.1.3: Un ciclo di Štefan di periodo pari.

Osservazione 3.1.2. Dalla definizione segue che ogni ciclo di periodo 3 è un ciclo di Štefan.

Lemma 3.1.3. *Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e una funzione $f : I \rightarrow I$ continua, se (P, f) è un ciclo di Štefan di periodo $n \geq 3$ dispari, allora è possibile associare un grafo a P in cui i vertici v_1, v_2, \dots, v_{n-1} corrispondono agli intervalli I_1, \dots, I_{n-1} contenuti in I e sono ordinati in modo da ottenere i seguenti cammini e circuiti orientati:*

- $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_1$,
- $v_1 \rightarrow v_1$,
- $v_{n-1} \rightarrow v_1, v_{n-1} \rightarrow v_3, v_{n-1} \rightarrow v_5, \dots, v_{n-1} \rightarrow v_{n-2}$.

Dimostrazione. Supponiamo che P sia un ciclo di Štefan in forma (1) dato nella definizione 3.1.1 (l'altro caso è equivalente), prendiamo un punto $x \in P$ e consideriamo $\text{Orb}_f(x)$. Definiamo gli $n - 1$ intervalli nel seguente modo:

$$I_1 = [x, f(x)],$$

$$I_i = [f^{i-2}(x), f^i(x)] \subseteq I \quad \forall 2 \leq i \leq n - 1,$$

identifichiamo i vertici del grafo con tali intervalli $V = \{v_1 = I_1, \dots, v_{n-1} = I_{n-1}\}$ e colleghiamo due vertici v_i, v_j per

$i, j = 1, \dots, n - 1$ con un lato orientato (v_i, v_j) se $I_i \subseteq f(I_j)$. Notiamo che applicando la f a questi intervalli, si ottengono le seguenti relazioni:

1. $f(I_1) = [f(x), f^2(x)]$ e poiché P è un ciclo di Štefan $I_1 \subseteq f(I_1)$ e $I_2 \subseteq f(I_1)$. Per la definizione di grafo di P , dovranno esistere dei lati orientati $(v_1, v_1), (v_1, v_2)$,
2. $f(I_i) = [f^{i-1}(x), f^{i+1}(x)]$ poiché P è un ciclo di Štefan, $I_{i+1} \subseteq f(I_i)$ e nel grafo di P comparirà il lato orientato $(v_i, v_{i+1}) \forall i : i = 2, \dots, n-1$,
3. osserviamo che dalla definizione 3.1.1, $f(I_{n-1}) = [f^{n-1}(x), x]$ deve coprire tutti gli intervalli I_i per i dispari e nel grafo ci saranno quindi $\frac{n-1}{2}$ lati orientati (v_{n-1}, v_i) .

□

Osservazione 3.1.4. La costruzione del grafo dipende sia dalla scelta di f che di x , si otterranno quindi grafi differenti a seconda dei punti periodici considerati.

Un'illustrazione del grafo appena costruito è riportata nella figura 3.1.4.

Definizione 3.1.5. Costruiamo alcuni intervalli a cui faremo riferimento nei teoremi successivi.

Supponiamo che P sia un ciclo di Štefan di periodo $n \geq 2$.

Prendiamo il maggior elemento $x \in P$ tale che $f(x) > x$ (la sua esistenza è garantita dal fatto che il ciclo è di Štefan) e definiamo $y \in P$ tale che $y > x$ e per cui $\nexists z \in P : x < z < y$, allora $f(x) \geq y$ e $f(y) \leq x$, e identifichiamo con I_1 l'intervallo $[x, y]$, quindi $f(y) \leq x$ e $I_1 = [x, y] \subset f([x, y])$.

Definiamo per induzione degli intervalli J_i :

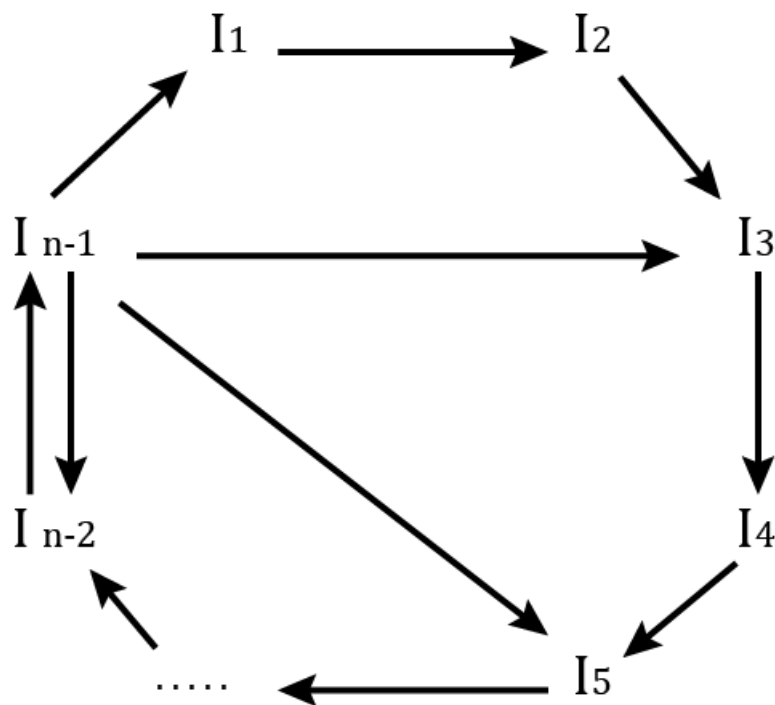


Figura 3.1.4: Il grafo di un generico ciclo di Štefan per n dischi.

- $J_1 = I_1$,
- J_{i+1} è dato dalla chiusura convessa di $f(P \cap J_i)$,
- il procedimento termina quando $P \subseteq J_i$, cosa che dovrà accadere, perché il numero di punti di P contenuti in J_i aumenta all'aumentare di i e poiché P è finito $\exists!$ i tale che $P \subseteq J_i$.

Osserviamo che, per come abbiamo definito questi intervalli, $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots$. Definiamo ora dei sottoinsiemi di P dati

da $P_i = P \cap J_i$, poiché $J_i \subset J_{i+1}$ allora anche $P_i \subset P_{i+1}$, inoltre $P_i \neq P_j \forall i, j = 1, 2, \dots : i \neq j$ perché $f(J_i)$ contiene punti di P che non sono contenuti in J_i e $J_{i+1} \neq J_i$.

Lemma 3.1.6. *(dello scambio) Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, una funzione $f : I \rightarrow I$ continua e un ciclo (P, f) , l'intervallo $[x, y]$ e gli insiemi P_i per $i \in \mathbb{N}$ della definizione 3.1.5, se in P non ci sono punti di periodo dispari minore di $i + 2$ eccetto punti fissi e $z \leq x$ per $z \in P_i$, allora $f(z) \geq f(x)$, altrimenti se $z \geq y$, allora $f(z) \leq x$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista z per cui la tesi del teorema non valga e che $z < x$ (il caso in cui $z > y$ è equivalente), definiamo l'intervallo $K \subset J_i$ come $K = [z, x]$.

Poiché $J_i \subset f(J_{i-1})$, segue che $K \subset f(J_{i-1})$. Per definizione di K , di x e y , dovrà accadere che $[x, y] = J_1 \subset f(K)$.

Costruiamo due cicli formati da i e $i + 1$ intervalli:

1. $J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_{i-1} \rightarrow K \rightarrow J_1$,
2. $J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_{i-1} \rightarrow K \rightarrow J_1 \rightarrow J_1$.

Uno di questi due cicli dovrà avere lunghezza dispari, quindi dal lemma 2.2.3, dovrà esistere un punto $x' \in J_1 : f^{i-1}(x') \in K$ con periodo dispari minore di $i + 2$.

Per ipotesi x' dovrà essere un punto fisso e poiché $x' \in K$ e $x' \in J_1$, si ha che $x' \in K \cap J_1$, ma $z < x$, allora $K \cap J_1 \subset \{x\}$, da questo segue che $x' = x$ ma x non è un punto fisso, assurdo.

□

Vediamo ora un risultato fondamentale per la dimostrazione del teorema di Sharkovsky.

Teorema 3.1.7. *Dato un intervallo $I \in \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow I$ continua, se (P, f) è un ciclo di lunghezza $n \geq 3$ dispari, allora è di Štefan.*

Dimostrazione. Consideriamo x, y, P_i per $i \in \mathbb{N}$ definiti in 3.1.5, non potrà accadere che $f(y) = x$ e $f(x) = y$ perché $n \neq 2$. Assumiamo $f(y) < x$ (se $f(x) > y$ la dimostrazione è analoga).

Se $n = 3$, la dimostrazione segue banalmente dall'osservazione 3.1.2, allora poniamo $n > 3$ e consideriamo P_{n-2} , dal lemma 3.1.6 segue che $\forall z \in P_{n-2}$, se $z \leq x$, allora $f(z) \geq y$, altrimenti $f(z) \leq x$.

Osserviamo che non possiamo applicare il lemma 3.1.6 all'intero ciclo P perchè in tal caso f non soddisferebbe la proprietà iniettiva, da questo segue che $P_{n-2} \neq P$, tenendo a mente che $P_i = P_{i+1}$ se e solo se $P_i = P$, otteniamo le seguenti inclusioni:

$$\{x, y\} = P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_{n-2} \subset P_{n-1}$$

e P_{n-1} potrà contenere al massimo n punti del ciclo P .

Dimostriamo che tutte le P_i contengono $i + 1$ punti per $1 \leq i \leq n - 1$ e che $P_{n-1} = P$.

P_1 contiene soltanto due elementi, quindi due dei punti $x, y, f(x), f(y) \in P_2$ dovranno coincidere, x e y non sono punti fissi, quindi $x \neq f(x)$, $y \neq f(y)$, $x < y$ e $f(y) < x$, dovrà per forza di cose essere $f(x) = y$.

Abbiamo definito gli insiemi $P_1 = \{x, y\} = \{x, f(x)\}$ e $P_2 = \{x, f(x), f^2(x)\}$, ma avendo dimostrato $f(x) = y$, si ha che $P_i = P_{i-1} \cup \{f^i(x)\}$ per $1 \leq i \leq n - 1$.

Vediamo ora il comportamento delle $f^i(x)$ rispetto al punto x .

Presi gli insiemi O_L, O_R , definiti in 3.1.1, segue dal lemma 3.1.6 che i punti di P_{n-2} sono mappati da f^i in O_L per i pari e in O_R per i dispari.

Poiché $f(x) > x$, allora $f(x) \in O_R$, $f^2(x) \in O_L$ e così via fino a ottenere $\{x, f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\} \subset O_L$ e $\{f(x), f^3(x), \dots, f^{n-2}(x)\} \subset O_R$ da cui segue:

$$f^{n-1}(x) < f^{n-3}(x) < \cdots < f^2(x) < x < f(x) < \cdots < f^{n-4}(x) < f^{n-2}(x),$$

che è un ciclo di Štefan.

□

3.2 L'ordinamento di Sharkovsky

Definizione 3.2.1. (ordinamento di Sharkovsky) Definiamo gli insiemi $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0 \cup \{2^\infty\}$. Data la coppia $(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tale che $x = 2^i \cdot x'$ e $y = 2^j \cdot y'$ per $i, j \in \mathbb{N}$ e $x', y' \in \mathbb{N}^*$ dispari, definiamo la relazione \triangleright dove $x \triangleright y$ se e solo se:

- (1) $x = y$,
- (2) $y' = 1$ e $x' > 1$,
- (3) $i = j$ e $y' > x' > 1$,
- (4) $i > j$, $x' = 1$ e $y' = 1$,
- (5) $i < j$, $y' > 1$ e $x' > 1$.

Tale relazione si può estendere a \mathbb{N}^* , ponendo:

1. $x \triangleright 2^\infty$, se $x' > 1$
2. $2^\infty \triangleright x$ se invece $x' = 1$.

Teorema 3.2.2. *La relazione \triangleright è una relazione d'ordine totale sugli elementi dell'insieme \mathbb{N}_0 .*

Dimostrazione. La proprietà riflessiva è ovvia.

Proviamo la transitiva, prendiamo $z = 2^k \cdot z'$ e osserviamo che qualsiasi caso implichi (1) o è banale, oppure ci riconduce alla definizione.

I casi $x \triangleright y$ per (2) e $y \triangleright z$ per (2), (3), (5) non possono mai accadere, mentre per quanto riguarda $x \triangleright y$ per (2) e $y \triangleright z$ per (4), osserviamo che $z = 2^k$ per $k < j$ e quindi da (2) si ha $x \triangleright z$.

Se sia $x \triangleright y$ che $y \triangleright z$ per (3) allora, sempre per (3) si ha $x \triangleright z$, il caso $x \triangleright y$ per (3) e $y \triangleright z$ non può accadere, mentre se $x \triangleright y$ per (3) e $y \triangleright z$ per (5), allora sempre per (5) segue che $x \triangleright z$. Mentre $x \triangleright y$ per (4), $y \triangleright z$ per (5) e viceversa non potranno mai verificarsi.

Questo prova la proprietà transitiva.

Per quanto riguarda la proprietà antisimmetrica, analizzando i casi si osserva immediatamente che o sono banali o non potranno mai verificarsi.

□

Osservazione 3.2.3. Osserviamo che con l'aggiunta del simbolo 2^∞ la relazione \triangleright è una relazione d'ordine totale su \mathbb{N}^* .

Rappresentiamo l'ordinamento ottenuto sugli elementi di \mathbb{N}^* come segue:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 4 \cdot 3 \triangleright 4 \cdot 5 \triangleright 4 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^\infty \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright \dots \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 1.$$

Definizione 3.2.4. $n \in \mathbb{N}^*$ è detto *massimale di Sharkovsky* per una funzione $f : I \rightarrow I$ continua se f ha punti di periodo n , ma non di periodo k per $k \triangleright n$ secondo l'ordinamento 3.2.1.

Lemma 3.2.5. *Dato un intervallo $I \in \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow I$ continua. Se $2n$ è il massimale di Sharkovsky per f , allora n lo è per f^2 .*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che n non sia il massimale di Sharkovsky per f^2 e che quindi esista un punto x di periodo k con $k \triangleright n$, allora si avrà che $k \neq 1$ e $2k \triangleright 2n$, distinguiamo due casi.

Se k è dispari, dal teorema 1.2.12 il periodo di x sarà k o $2k$, ma $k \triangleright 2k \triangleright 2n$, assurdo.

Se invece k è pari, sempre per il teorema 1.2.12 il punto x avrà periodo $2k \triangleright 2n$, assurdo.

□

Teorema 3.2.6. *Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, una funzione $f : I \rightarrow I$ continua e un ciclo di Štefan P . Se il ciclo ha periodo n dispari e $n \triangleright m$ nell'ordinamento 3.2.1, allora esiste un circuito orientato α di periodo m nel grafo di P .*

Dimostrazione. Analizziamo il grafo di un ciclo di Štefan generico.

Se $n = 1$, allora non abbiamo nulla da dimostrare, supponiamo quindi $n \geq 3$ e tenendo a mente il grafo in figura 3.1.4 osserviamo che:

- se $m = 1$, allora il circuito orientato cercato è dato dal cappio $\alpha = (v_1, v_1)$.
- se $m < n$ con m pari, il circuito orientato $\alpha = (v_{n-1}, v_{n-m}), (v_{n-m}, v_{n-m+1}), \dots, (v_{n-2}, v_{n-1})$ non consiste di ripetizioni di sequenze più brevi e ha periodo m .
- se invece $m > n$, allora il circuito orientato $\alpha = (v_{n-1}, v_1) \overbrace{(v_1, v_1) \dots (v_1, v_1)}^{m-n \text{ volte}} (v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots (v_{n-2}, v_{n-1})$ avrà periodo m .

□

3.3 Il teorema di Sharkovsky

A questo punto, possiamo enunciare il

Teorema 3.3.1. *(di Sharkovsky) Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e una funzione $f : I \rightarrow I$ continua, se f ha un punto di periodo n e $n \triangleright m$ nell'ordinamento 3.2.1, allora f deve avere un punto di periodo m .*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in 3 parti:

Parte 1

Generalizziamo il risultato ottenuto nel lemma 3.2.6 usando l'induzione sul numero dei fattori 2 contenuti in n .

Se n è dispari, il risultato è stato dimostrato nel lemma 3.2.6, supponiamo quindi $n = 2l$ e per ipotesi induttiva assumiamo che il risultato sia già dimostrato per l .

Se $2l = n \triangleright m$, allora prendiamo i due insiemi O_L e O_R dati nella definizione 3.1.1 e dall'ordinamento 3.2.1 si ha che o $m = 1$, nel qual caso il circuito orientato cercato è dato da $\alpha = (v_1, v_1)$, oppure $m = 2k$ con $l \triangleright k$. Definiti i due intervalli $L = [x_1, x_l]$ e $R = [x_{l+1}, x_{2l}]$ avremo che $O_L \subset L$ e $O_R \subset R$.

Per ipotesi induttiva, su l , (O_L, f^2) sarà un ciclo di Štefan e il suo grafo avrà un circuito orientato di periodo k :

$$(1) \quad \alpha' = (u_1, u_2) \dots (u_k, u_1).$$

Dove i vertici u corrispondono a dei vertici v del grafo, ma non sappiamo quali e i lati $(u_1, u_2), \dots, (u_k, u_1)$, corrispondono a lati (v_i, v_j) per $i, j = 1, 2, \dots, l$ del grafo di (O_L, f^2) , osserviamo che dalla definizione 3.1.1, possiamo trovare k intervalli J_s per $s = 1, \dots, k$ corrispondenti ai vertici u e definire con essi altri k intervalli chiamati $J'_s \subset R$ per $s = 1, 2, \dots, k$ dai punti ottenuti da $f(J_s \cap P)$ a cui corrisponderanno dei vertici u' nel grafo, ottenendo il circuito orientato di lunghezza $2k = m$ dato da:

$$(2) \quad \alpha'' = (u_1 u'_1), (u'_1, u_2) \dots (u_k, u'_k), (u'_k, u_1).$$

Poiché (1) e (2) sono circuiti orientati d'intervalli, dal lemma 2.2.3 dovrà esistere un punto $y \in I : f^s(y) \forall s = 1, 2, \dots, k$ che segue il circuito orientato (2), mentre $f^{2s}(x)$ segue il circuito orientato (1) ed è quindi periodico di periodo k rispetto a f^2 . Se k è pari, allora utilizziamo il teorema 1.2.12 e y dovrà avere periodo $m = 2k$, se invece k è dispari, osserviamo che $J_s \subset L$

e $J'_s \subset R \forall s = 1, 2, \dots, k$, quindi le iterate di $f^s(y) \in L$ per s pari, mentre $f^s(y) \in R$ per s dispari e anche in questo caso y ha periodo $m = 2k$.

Questo dimostra il teorema per tutti gli elementi dell'ordinamento che hanno fattori pari.

Parte 2

In questa seconda parte, dimostriamo che dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso, una funzione $f : I \rightarrow I$ continua, se $\exists x \in I : f^n(x) = x$ e $\nexists m : m \triangleright n$ nell'ordinamento 3.2.1 allora il ciclo (P, f) associato all'orbita di x è un ciclo di Štefan. Per farlo generalizziamo il teorema 3.1.7.

Procediamo per induzione sul numero di fattori del 2 presenti in m .

Se $m = 1$, il risultato è banale, mentre se m è dispari, è già stato dimostrato nel teorema 3.1.7.

Supponiamo quindi $n = 2m$ e assumiamo che per ipotesi induttiva la tesi sia vera per m , considerata un'orbita di periodo n per f , ne associamo il ciclo (P, f) e definiamo x, y , come nell'osservazione 3.1.5. Poiché n è pari, dall'ordinamento 3.2.1 non ci saranno punti periodici per f di periodo dispari a eccezione di punti fissi.

Presi O_L e O_R come in 3.1.1, dal lemma 3.1.6 segue che $\forall z \in O_L, f(z) \in O_R$ e viceversa. Ponendo $z = x, z = f(x)$ e così via otterremo che tutte le iterate pari della $x, f^2(x), f^4(x), \dots, f^{2m}(x) \in O_L$, mentre quelle dispari $f(x), f^3(x), \dots, f^{2m-1}(x) \in O_R$.

Considerata f^2, O_L e O_R saranno orbite periodiche di periodo m , la f sarà una biezione tra esse, quindi dal lemma 3.2.5 e per ipotesi induttiva, O_L e O_R devono essere cicli di Štefan per f^2 , quindi P soddisfa le condizioni poste nella definizione 3.1.1 nel caso pari.

A questo punto, l'ultimo caso che rimane da considerare è quello in cui l'insieme dei periodi sia infinito e consista interamente di potenze del 2.

Parte 3

Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e una funzione $f : I \rightarrow I$ continua, se $\forall x \in I : f(x)^n = x$ dove $n = 2^i$ per $i = 0, 1, \dots$, allora tutti i cicli (P, f) associati a $Orb_f(x)$, sono cicli di Štefan.

Utilizziamo l'induzione su n , se $n = 0$, non c'è nulla da dimostrare.

Per ipotesi induttiva, supponiamo che la tesi valga per i e consideriamo un'orbita periodica di periodo 2^{i+1} . Definiti O_L e O_R come nella definizione 3.1.1, dal lemma 3.1.6 segue che f dovrà essere una biezionne tra O_L e O_R . Poiché i periodi di f^2 sono potenze del 2, procedendo come nella definizione 3.1.1 ottenendo che sia (O_L, f^2) che (O_R, f^2) dovranno essere dei cicli di Štefan e di conseguenza, (P, f) sarà un ciclo di Štefan.

□

Capitolo 4

Il teorema inverso

Dopo aver dimostrato il teorema di Sharkovsky, ci occuperemo ora del teorema inverso.

Poiché la dimostrazione consiste soltanto nella costruzione di mappe, non necessitiamo di strumenti aggiuntivi.

Teorema 4.0.1. *Fissato $n \geq 1$, esiste una funzione $f_n : I \rightarrow I$ continua che ha punti di periodo n , ma non ha punti periodici di periodo m per ogni $m \geq 1$ tale che $m \succ n$ secondo l'ordinamento dato nella definizione 3.2.1.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema costruendo le funzioni richieste, consideriamo i seguenti casi:

- (1) periodi dispari,
- (2) periodi nella forma $n = 2^i \cdot (2m + 1) \forall i \geq 1, m \geq 0$,
- (3) periodi nella forma $n = 2^i \forall i \geq 1$,
- (4) funzioni che abbiano punti di periodo $2^n \cdot 3$ ma non $2^{n-1} \cdot m$ per $m \in \mathbb{N}$,
- (5) funzioni che abbiano soltanto punti di periodo 2^n per $n \in \mathbb{N}$.

Caso 1

Dividiamo il procedimento in due parti:

- (a) Costruiamo innanzitutto una funzione avente punti di periodo 5, ma senza punti di periodo 3.

Definiamo quindi la funzione $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ come segue:

$$f(1) = 3,$$

$$f(2) = 5,$$

$$f(3) = 4,$$

$$f(4) = 2,$$

$$f(5) = 1.$$

supponendo f lineare su ogni intervallo $[i, i + 1]$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Osserviamo che nessuno dei punti 1, 2, 3, 4, 5 ha periodo 3, perché appartengono a un ciclo di lunghezza 5 e che l'iterata f^3 non ammette punti fissi, infatti:

$$f^3([1, 2]) = [2, 5],$$

$$f^3([2, 3]) = [3, 5],$$

$$f^3([4, 5]) = [1, 4].$$

ovviamente, $[1, 2] \cap [2, 5] = 2$, $[2, 3] \cap [3, 5] = 3$ e $[4, 5] \cap [1, 4] = 4$ ma per come abbiamo definito la funzione f , nè 2 nè 3 nè 4 sono punti fissi. Non possiamo applicare lo stesso ragionamento all'intervallo $[3, 4]$ perché $f^3[3, 4] = [1, 5]$ e $[3, 4] \subset [1, 5]$.

Devono esistere due punti $a, b \in [3, 4] : f^3(a) = 3$ e $f^3(b) = 4$, definiamo la funzione $h : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = x - f^3(x)$, abbiamo che $h(a) \geq 0$ e $h(b) \leq 0$ e dal teorema del valor intermedio dovrà esistere un punto $x \in [3, 4] : h(x) = 0$ da cui $f^3(x) = x$.

Vogliamo mostrare che x è l'unico punto fisso di f e quindi non potrà essere un punto di periodo 3.

Se $f(x) \in [2, 3]$, allora $f^2(x) \in [4, 5]$ e $x = f^3(x) \in [1, 2]$ il che è assurdo.

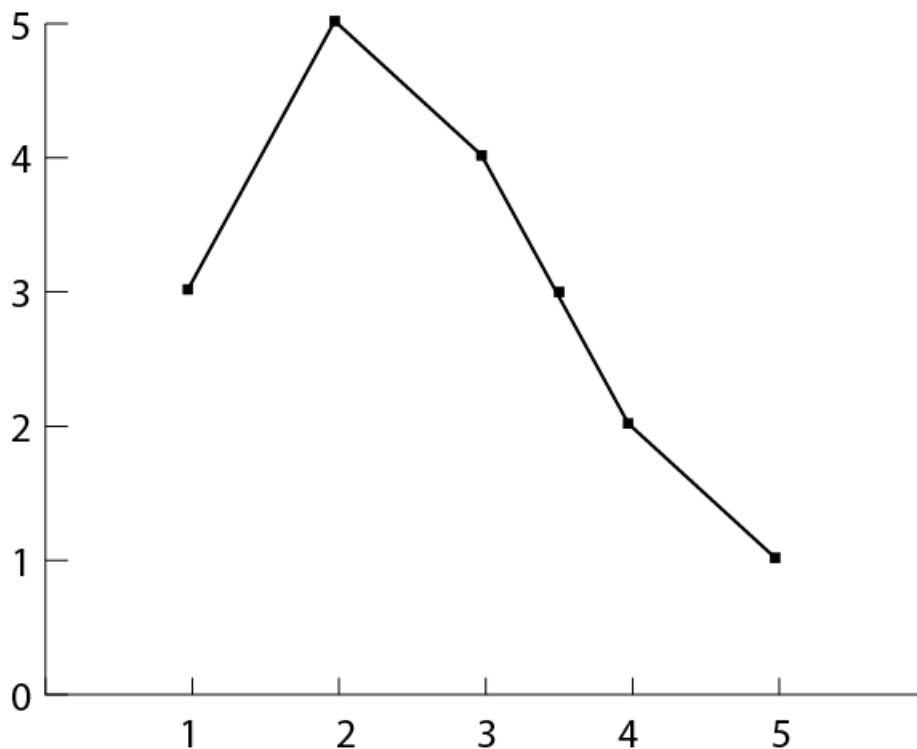


Figura 4.0.1: Il grafico della funzione f .

Quindi $f(x) \in [3, 4]$ e conseguentemente $f^2(x) \in [2, 4]$, ma allora anche $f^2(x) \in [3, 4]$ perché se fosse $f^2(x) \in [2, 3]$ si avrebbe $x = f^3(x) \in [4, 5]$, assurdo.

Abbiamo quindi dimostrato che x , $f(x)$ e $f^2(x)$ devono esser tutti contenuti in $[3, 4]$.

Ma in questo intervallo f è definita come $f(x) = -2x + 10$ e $x = 10/3$ è l'unico punto che soddisfa la definizione di punto fisso, consideriamo quindi $f^3(x) = 30 - 8x$ e osserviamo che anch'essa ha $x = 10/3$ come unico punto fisso, quindi f non ammette punti periodici di periodo 3.

- (b) Dal teorema 3.3.1, per questa dimostrazione basta costruire funzioni continue che abbiano punti di periodo $2n + 1$ ma non di periodo $2n - 1$. Definiamo $f : [1, 2n + 1] \rightarrow [1, 2n + 1]$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} f(1) &= n + 1, \\ f(2) &= 2n + 1, \\ f(3) &= 2n, \\ f(4) &= 2n - 1, \\ f(5) &= 2n - 2, \\ &\dots, \\ f(n) &= n + 3, \\ f(n + 1) &= n + 2, \\ f(n + 2) &= n, \\ f(n + 3) &= n - 1, \\ &\dots, \\ f(2n + 1) &= 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che dalla definizione di f , tutti gli interi nell'intervallo $[1, 2n + 1]$ hanno periodo $2n + 1$. Per fare un esempio, l'orbita del punto 1 sarà data da:

$$1 \mapsto n + 1 \mapsto n \mapsto n + 2 \mapsto n - 1 \mapsto n + 3 \mapsto n - 2 \mapsto \dots \mapsto 2 \mapsto 2n + 1.$$

Osserviamo anche che ci sono due sequenze di lunghezza n : una crescente, data da $\{n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 2n + 1\}$ e un'altra decrescente $\{n, n - 1, \dots, 2\}$.

Resta da dimostrare che non ci siano punti di periodo $2n - 1$ nell'intervallo $[1, 2n + 1]$. Per farlo consideriamo l'intervallo $[1, 2]$.

Le $(2n - 1)$ iterazioni della f mappano l'intervallo $[1, 2]$ nel seguente modo:

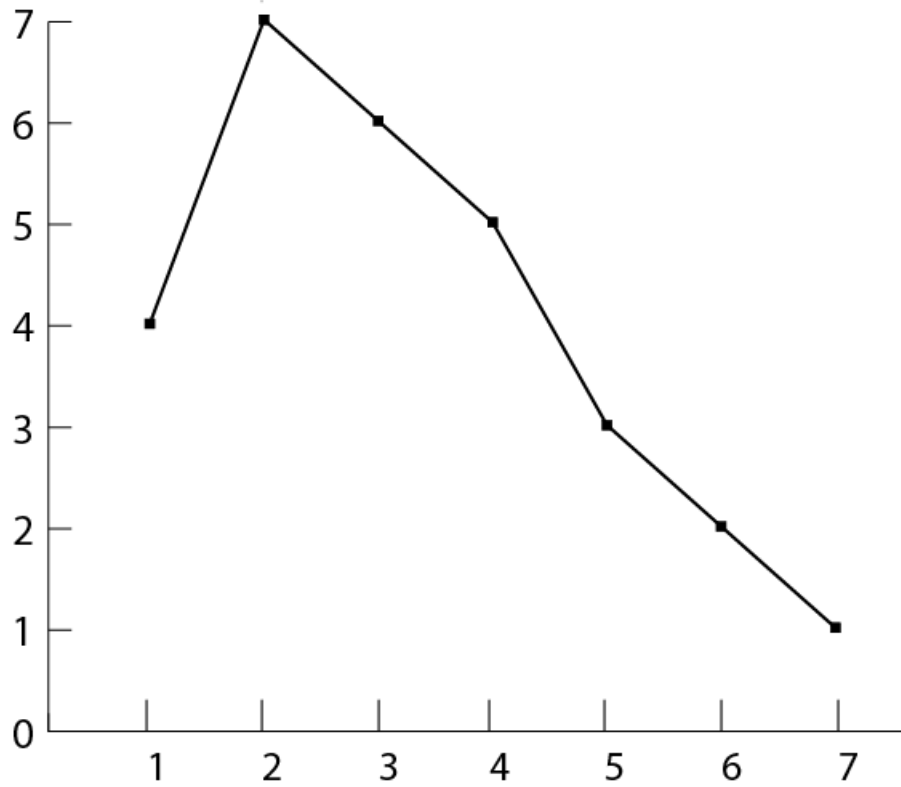


Figura 4.0.2: La funzione generalizzata per $n = 3$.

$$[1, 2] \mapsto [n + 1, 2n + 1] \mapsto [1, n + 2] \mapsto [n, 2n + 1] \mapsto [1, n + 3] \mapsto \\ [n - 1, 2n - 1] \mapsto \dots \mapsto [1, 2n] \mapsto [2, 2n + 1].$$

Ma questo implica $f^{2n-1}([1, 2]) \cap [1, 2] = \emptyset$ e l'intervallo $[1, 2]$ non potrà contenere punti periodici di periodo $2n - 1$.

Iterando il procedimento, si dimostra che tutti gli intervalli nella forma $[i, i + 1]$ per $i = 1, \dots, n$ a eccezione dell'intervallo $[n + 1, n + 2]$ hanno la stessa proprietà dell'intervallo $[1, 2]$, infatti dovrà esistere un'iterata della f che porta ogni intervallo nella forma $[i, i + 1]$ precisamente in $[1, 2]$ e poiché l'intervallo $[1, 2]$ non ammette punti periodici di periodo

$2n - 1$, neanche l'intervallo $[i, i + 1]$ ne avrà.

Vediamo cosa accade se l'intervallo considerato fosse $[n + 1, n + 2]$.

Notiamo che $f([n + 1, n + 2]) = [n, n + 2]$, preso un punto $x \in [n + 1, n + 2]$, ci sono da considerare due casi:

- (i) $f^k \notin [n + 1, n + 2]$ per qualche $k \geq 1$. Allora $f^k(x) \in [n, n + 1]$ e un'iterata della x dovrà appartenere all'intervallo $[1, 2]$, quindi per il discorso precedente x non potrà avere periodo $2n - 1$.
- (ii) $f^k \in [n + 1, n + 2] \forall k \geq 1$. Poiché $|f'| > 1$, la funzione è crescente nell'intervallo $[n + 1, n + 2]$, segue che x dev'essere un punto fisso per f .

In entrambi i casi la x non potrà avere punti periodici di periodo $2n - 1$ e poiché n è stato scelto genericamente, il primo caso è concluso.

Caso 2

Vogliamo costruire delle funzioni che abbiano punti di periodo $2^i(2m + 1)$, ma senza punti di periodo $2^i(2m - 1)$.

In maniera simile a quanto fatto nel caso precedente, costruiamo una funzione con punti di periodo $2 \cdot 5$ ma non $2 \cdot 3$ e poi generalizziamo.

Consideriamo l'intervallo $[1, 5]$ e prendiamo la funzione $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ definita nel *Caso I*.

Definiamo la funzione $g : [1, 13] \rightarrow [1, 13]$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 8, & \text{per } 1 \leq x \leq 5 \\ -2x + 19, & \text{per } 5 < x < 9 \\ x - 8, & \text{per } 9 \leq x \leq 13 \end{cases}$$

chiamiamo tale g *funzione doppia* di f .

Osserviamo ora che nessuno dei punti $1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13$ ha periodo



Figura 4.0.3: Il grafico della funzione g .

6 perchè appartengono tutti a un ciclo di periodo 10.

Se $x \in [1, 5]$, allora $g(x) \in [9, 13]$ e $g^2(x) = f(x)$, però f non ha punti di periodo 3 nell'intervallo $[1, 5]$, quindi non potranno esserci punti di periodo 6 per g nell'intervallo $[1, 5]$, inoltre $g([9, 13]) = [1, 5]$ e neanche l'intervallo $[9, 13]$ avrà punti di periodo 6.

Resta da considerare l'intervallo $[5, 9]$.

Poiché $g^6([5, 9]) = [4, 10]$, ripetendo le considerazioni fatte nel *Caso I* dovrà esserci un punto fisso per g in $(5, 9)$, lo chiamiamo x .

Se $g^n(x) \notin (5, 9) \forall n : 1 \leq n \leq 5$, allora anche $g^{n+k}(x) \in [1, 5] \cup [9, 13] \forall k > 0$, ma questo include g^6 , quindi si avrebbe che $g^6(x) \neq x$, assurdo.

Dovrà essere $x, g(x), \dots, g^5(x) \in (5, 9)$, a questo punto utilizzando la definizione di punto fisso nell'intervallo $(5, 9)$, si ottengono i seguenti risultati per

la g e le sue iterate g^2, \dots, g^6 :

$$\begin{aligned}g(x) &= -2x + 19 \Rightarrow x = -2x + 19 \Rightarrow 3x = 19 \Rightarrow x = 19/3 \\g^2(x) &= 4x - 19 \Rightarrow x = 4x - 19 \Rightarrow 3x = 19 \Rightarrow x = 19/3 \\g^3(x) &= -8x + 57 \Rightarrow x = -8x + 57 \Rightarrow 9x = 57 \Rightarrow x = 19/3 \\g^4(x) &= 16x - 95 \Rightarrow x = 16x - 95 \Rightarrow 15x = 95 \Rightarrow x = 19/3 \\g^5(x) &= -32x + 209 \Rightarrow x = -32x + 209 \Rightarrow 33x = 209 \Rightarrow x = 19/3 \\g^6(x) &= 64x - 399 \Rightarrow x = 64x - 399 \Rightarrow 63x = 399 \Rightarrow x = 19/3\end{aligned}$$

da cui si evince che l'unico punto fisso per g e le sue iterate è $x = 19/3$, quindi g non ammette punti periodici di periodo 6 e questa prima costruzione è conclusa.

Passiamo ora alla procedura generica per costruire una funzione avente punti periodici di periodo $2(2n + 1)$, ma senza punti di periodo $2(2n - 1)$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

Definiamo la funzione $f : [1, 1 + h] \rightarrow [1, 1 + h]$ avente punti di periodo $2n + 1$, ma senza punti di periodo $2n - 1$ e la funzione doppia $g : [1, 1 + 3h] \rightarrow [1, 1 + 3h]$ come segue:

$$g(x) \begin{cases} f(x) + 2h, & \text{per } 1 \leq x \leq 1 + h \\ x - 2h, & \text{per } 1 + 2h \leq x \leq 1 + 3h \end{cases}$$

e come nel caso specifico appena studiato la congiungiamo per linearità tra $1 + h < x < 1 + 2h$. Iterando la g , possiamo creare mappe con punti di periodo $2^i(2n + 1)$ ma senza punti periodici di periodo $2^i(2n - 1)$, per $i = 2, 3, 4, \dots$ e anche questo caso è concluso.

Caso 3

Procediamo per induzione su n : vogliamo costruire una funzione che abbia punti di periodo 2, ma che non ne abbia di periodo 2^2 .

(i) Definiamo $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ data da $f(x) = -x + 3$.

A questo punto ci basta notare che ogni punto $x \in [1, 2]$ ha periodo 2 per f a eccezione di $3/2$ che è un punto fisso.

Nell'intervallo $[1, 2]$ non ci saranno punti di periodo 2^2 .

(ii) Nel caso in cui $n = 2$, costruiamo una mappa avente punti di periodo 2^2 ma senza punti di periodo 2^3 .

Definiamo quindi $f : [1, 4] \rightarrow [1, 4]$ come segue:

$$f(1) = 3$$

$$f(2) = 4$$

$$f(3) = 2$$

$$f(4) = 1$$

e di conseguenza

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ -2x + 8 & \text{per } 2 < x < 3 \\ x - 3 & \text{per } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Notiamo che $f([1, 2]) = [3, 4]$ e $f([3, 4]) = [1, 2]$, inoltre f è lineare sugli intervalli $[1, 2]$ e $[3, 4]$. Quindi $f^2([1, 2]) = [1, 2]$ e $f^2([3, 4]) = [3, 4]$, inoltre, sempre considerando gli intervalli $[1, 2]$ e $[3, 4]$, si ha:

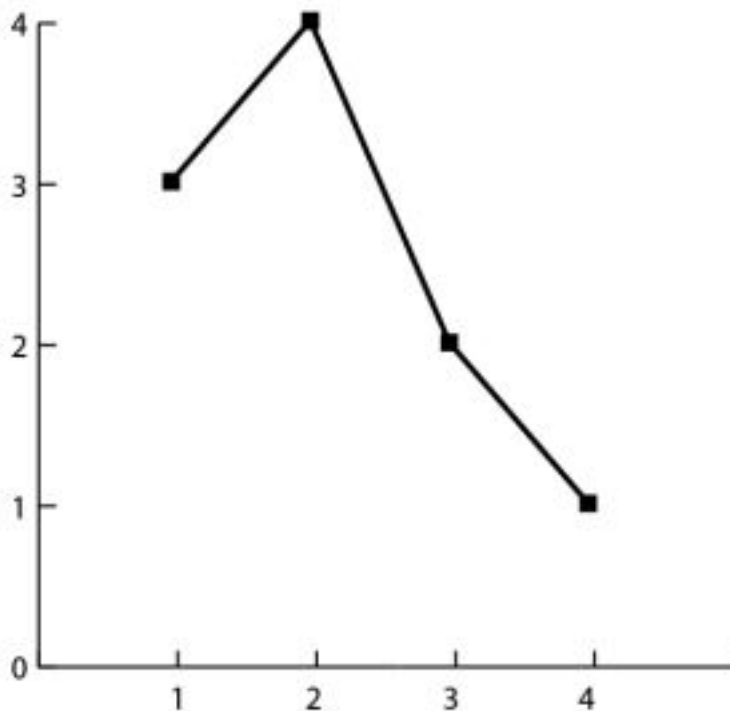


Figura 4.0.4: Il grafico della f .

$$f^2(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{per } 1 < x < 2 \\ -x + 5 & \text{per } 3 < x < 4 \end{cases}$$

quindi f^2 è decrescente e inoltre:

$$f^3(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{per } 1 < x < 2 \\ x - 2 & \text{per } 3 < x < 4 \end{cases}$$

da cui si ottiene che $f^4(x) = x \forall x \in [1, 2] \cup [3, 4]$.

Segue che tutti i punti negli intervalli $[1, 2]$ e $[3, 4]$ hanno periodo 4 a

eccezione di $x = 3/2$ e $x = 7/2$ che hanno invece periodo 2.

Per quanto riguarda l'intervallo $[2, 3]$, si ottiene che $f([2, 3]) = [2, 4]$ e quindi si ha che o i punti dell'intervallo $[2, 3]$ lasciano l'intervallo, oppure vi restano per tutte le iterazioni della f .

Quindi, supponiamo che $x \in [2, 3]$ e che per qualche $i \geq 1$ si abbia $f^i(x) \in [1, 2] \cup [3, 4]$.

Per le considerazioni precedenti la sua orbita prima o poi coinciderà o con un'orbita di periodo 4 o di periodo 2.

Se per $x \in [2, 3]$ si avesse $Orb(x) \subset [2, 3]$, allora $f^n(x) = f_2^n(x)$, dove $f_2(x) = -2x + 8$.

Ma $f_2^8(x) = 256x - 680$ ha come punto fisso $x = 8/3$, da cui segue che la mappa f non avrà nè punti fissi di periodo 8 nè periodo dato da ogni altro numero che lo precede nell'ordinamento dato nella definizione 3.2.1.

(iii) Costruiamo funzioni aventi punti di periodo 2^n ma non 2^{n+1} , per far ciò useremo la funzione doppia g definita nel *Caso II*.

Prendiamo quindi la funzione f definita in (ii) con punti di periodo 2^2 ma non di periodo 2^3 .

Definiamo g come segue:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 6 & \text{per } 1 \leq x \leq 4 \\ -2x + 15 & \text{per } 4 < x < 7 \\ x - 6 & \text{per } 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

La funzione g ammette punti di periodo 2^3 , ma non 2^4 .

A questo punto, possiamo iterare questo procedimento per ottenere funzioni aventi punti di periodo 2^n , ma non 2^{n+1} .

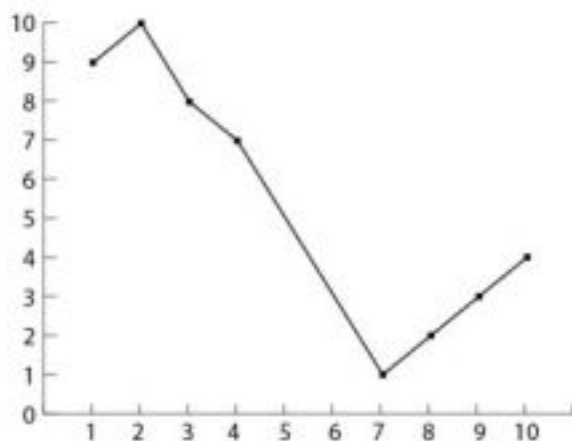


Figura 4.0.5: Il grafico della funzione g .

Caso 4

Possiamo costruire funzioni che abbiano punti di periodo $2^n \cdot 3$ ma non $2^{n-1} \cdot m$ per $m \in \mathbb{N}$ dispari, sempre utilizzando la funzione doppia di f .

Costruiamo una funzione avente punti di periodo $2 \cdot 3$ ma senza periodi dispari.

Sia $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$, poniamo $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 1$ e assumiamo f lineare su ogni intervallo $[n, n + 1]$.

Ovviamente, i punti 1, 2, 3 avranno periodo 3 e definiamo $g : [1, 7] \rightarrow [1, 7]$ come:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 4 & \text{per } 1 \leq x \leq 3 \\ -2x + 11 & \text{per } 3 < x < 5 \\ x - 4 & \text{per } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione g ha punti di periodo $2 \cdot 3$, quindi iterando sarà possibile costruire funzioni continue che abbiano punti di periodo $2^n \cdot 3$ ma

non di periodo $2^{n-1} \cdot m$.

Caso 5

Definiamo gli intervalli $I_k = [1 - 1/3^k, 1 - 2/3^{k+1}]$ e le funzioni $f_k : I_k \rightarrow I_k$ per ogni $k \geq 0$ tali che abbiano punti di periodo 2^k , ma non 2^{k+1} .

Allora la funzione $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che $h(1) = 1$, $h(x) = f_k(x)$ se $x \in I_k$ e per linearità altrimenti, ammette soltanto punti di periodo 2^n per $n \geq 0$.

□

Capitolo 5

Estensione agli alberi

5.1 Alberi, grafi e matrici

In questo capitolo vedremo una possibile estensione del teorema di Sharkovsky agli alberi.

Definizione 5.1.1. Dato un albero orientato T con n vertici v_1, \dots, v_n , denotiamo con $[v_i, v_j]$ l'unico cammino dell'albero che connette v_i e v_j .

Definizione 5.1.2. Dato un albero orientato T con n vertici e una permutazione sui suoi vertici θ , definiamo la funzione $f : T \rightarrow T$ continua tale che $f(i) = \theta(i) \forall 1 \leq i \leq n$ e il lato $l_m = (v_i, v_j) \mapsto (v_k, v_h)$ tale che $f(v_k) = v_i$ e $f(v_h) = v_j$ per $1 \leq m \leq n - 1$.

Definizione 5.1.3. Dato un albero orientato T con n vertici, la funzione $f : T \rightarrow T$ definita in precedenza, definiamo la funzione $H_f : T \rightarrow T$ come $H_f((v_i, v_j)) = [f(v_i), f(v_j)]$.

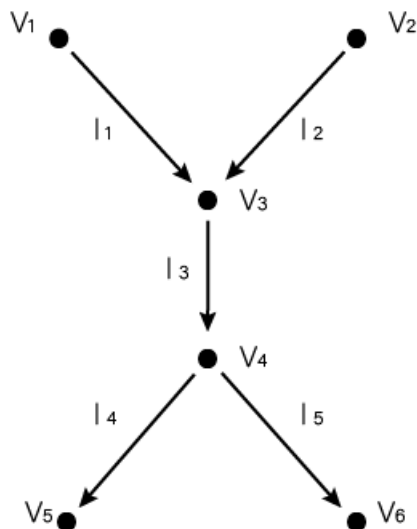


Figura 5.1.1: Un albero orientato.

Definizione 5.1.4. Dato un albero orientato T con n vertici e una funzione $f : T \rightarrow T$ continua, definiamo il grafo orientato G_f associato all'albero T e alla funzione f nel seguente modo: i vertici I_1, \dots, I_{n-1} del grafo corrispondono ai lati l_1, \dots, l_{n-1} dell'albero T .

Denotiamo i lati del grafo con la lettera L e associamo a due vertici I_j, I_k il lato $L_m = (I_j, I_k)$ orientato positivamente se in T il lato l_k è attraversato dal cammino $H_f(l_j)$, se invece è $-l_k$ a essere attraversato dal cammino $H_f(l_j)$, allora associamo ai due vertici il lato L_m orientato negativamente, se l_k non è attraversato dal cammino $H_f(l_j)$ allora non c'è nessun lato tra I_j e I_k .

Definizione 5.1.5. Dato un albero orientato T con n vertici, dato il cammino α da v_i in v_j e un suo lato l_i , denoteremo con $\sum_{\alpha} l_i$ il numero di volte che l_i compare nel cammino meno il numero di volte in cui compare $-l_i$.

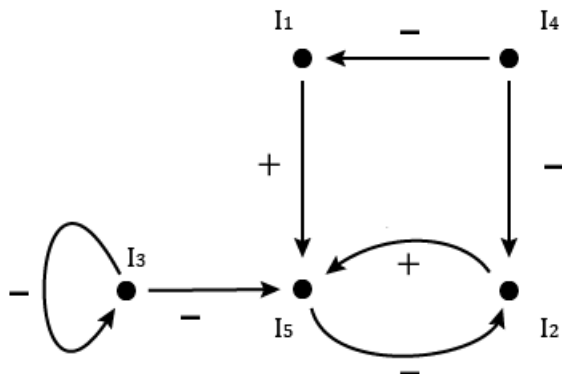


Figura 5.1.2: Il grafo associato all'albero orientato visto in figura 5.1.1 data la permutazione (143625).

Lemma 5.1.6. *Dato un albero orientato T con n vertici, siano v_i e v_j vertici per $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$, sia α il cammino da v_i a v_j . Allora $\sum_{\alpha} l_i = \sum_{[v_i, v_j]} l_i \in \{0, 1, -1\}$ per $i = 1, \dots, n - 1$.*

Dimostrazione. Se non c'è nessun cammino che connette v_i e v_j passante per l_i si avrà $\sum_{\alpha} l_i = 0$, altrimenti dal teorema 1.1.7 il cammino α esiste ed è unico. Se nel cammino α compare l_i si avrà $\sum_{\alpha} l_i = 1$, altrimenti deve comparire $-l_i$ e $\sum_{\alpha} l_i = -1$.

□

Definizione 5.1.7. Dato un albero orientato T con n vertici, una funzione $f : T \rightarrow T$, considerato il corrispondente grafo G_f e un circuito orientato β di G_f , diremo che β ha *orientazione positiva* se e solo se o nessun lato o un numero pari di lati L_i che sono attraversati dal circuito orientato hanno orientazione negativa, altrimenti diremo che β ha *orientazione negativa* se e solo se il circuito orientato attraversa un numero dispari L_i con orientazione negativa.

Lemma 5.1.8. *Dato un albero orientato T con n vertici, data $f : T \rightarrow T$ e considerato il corrispondente grafo orientato G_f , preso β , circuito orientato del grafo G_f , la sua orientazione è indipendente dalla scelta delle orientazioni dei lati dell'albero.*

Dimostrazione. Se il circuito orientato ha lunghezza 1 il risultato è banale. Dato I_i vertice del grafo che è estremo di un lato contenuto nel circuito orientato β di lunghezza > 1 , osserviamo che se nell'albero T cambiassimo l'orientazione del lato l_i corrispondente al vertice del grafo I_i , allora per come abbiamo costruito il grafo, cambiano anche le orientazioni associate ai lati del circuito che hanno I_i come estremo, poiché sono sempre un numero pari di lati a cambiare orientazione (eccetto il caso in cui β è un cappio da I_i in se stesso, nel qual caso il lato cambia orientazione due volte tornando a quella originale), il cambiamento non influisce sull'orientazione del circuito orientato.

□

Definizione 5.1.9. Dato un albero orientato T con n vertici e una funzione $f : T \rightarrow T$ continua, possiamo associare al corrispondente grafo orientato G_f una matrice $n - 1 \times n - 1$:

$$M(f)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se un lato collega } I_i \text{ e } I_j \text{ con orientazione positiva,} \\ -1 & \text{se un lato collega } I_i \text{ e } I_j \text{ con orientazione negativa,} \\ 0 & \text{se nessun lato collega } I_i \text{ e } I_j. \end{cases}$$

Lemma 5.1.10. *Dato un albero orientato T con n vertici, una funzione $f : T \rightarrow T$ continua, il grafo orientato G_f e la matrice $M(f)$, allora l' i, j -esimo elemento della matrice $[M(f)]^k$ è dato dal numero di cammini orientati di lunghezza k da I_i a I_j con orientazione positiva, meno il numero di cammini orientati di lunghezza k con orientazione negativa.*

Dimostrazione. Se $k = 1$, allora il risultato segue immediatamente dalla definizione di $M(f)$. Supponiamo quindi che la tesi valga per

$M^{k-1}(f)$ e osserviamo che per la proprietà delle potenze per le matrici $M^k(f) = M(f) \cdot M^{k-1}(f)$.

Chiamiamo con c il generico elemento della matrice $M^k(f)$, con a un elemento di $M(f)$ e b di $M^{k-1}(f)$, per come è definito il prodotto tra matrici quadrate si avrà che $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n-1} a_{il} \cdot b_{lj} \forall i, j = 1, \dots, n-1$.

Fissato l , l'elemento $a_{il} \cdot b_{lj}$ della sommatoria, ci da il numero di cammini orientati di lunghezza $k-1$ che vanno da j in l moltiplicati, tenendo conto dell'orientazione, il numero di cammini orientati che vanno da l in i , osserviamo che dal lemma 5.1.6 e da come è definita l'orientazione sui lati del grafo, $a_{il} = \{0, 1, -1\}$.

Se $a_{il} = 0$, allora nessun cammino connette i e l e quindi il relativo elemento della sommatoria sarà 0, se $a_{il} = 1$, allora c'è un cammino orientato positivamente che connette i , l e se $b_{lj} \neq 0$ allora ci saranno anche dei cammini orientati di lunghezza k tra j e i ottenuti seguendo i cammini orientati b_{lj} e poi attraversando il lato a_{il} e poiché a_{il} è orientato positivamente i cammini orientati b_{lj} non cambieranno orientazione.

Se invece $a_{il} = -1$ allora vale il ragionamento fatto in precedenza, tuttavia stavolta il lato a_{il} ha orientazione negativa e attraversarlo cambierà orientazione a tutti i cammini orientati b_{lj} .

Il ragionamento sopra descritto vale per ogni elemento della sommatoria e il teorema segue immediatamente dalla formula per c_{ij} .

□

Osservazione 5.1.11. Osserviamo che sebbene possa sembrare controintuitivo non abbiamo considerato la trasposta di $M(f)$, il motivo è dovuto al seguente teorema.

Teorema 5.1.12. *Dato un albero orientato T con n vertici supponiamo che $\theta, \gamma \in S_n$ siano due permutazioni a cui associamo le due funzioni $f : T \rightarrow T$ e $g : T \rightarrow T$, allora $M(f)M(g) = M(f \circ g)$.*

Dimostrazione. Sia $l_k = (v_i, v_j)$. Per definizione, abbiamo che $H_g(l_j) = H_g[v_i, v_j] = [g(v_i), g(v_j)]$ e $H_{f \circ g}(l_j) = [f(g(v_i)), f(g(v_j))]$.

Quindi $H_f(H_g(l_j))$ è un cammino che congiunge $f(g(v_i))$ con $f(g(v_j))$ che chiameremo α .

Notiamo che il lato $l_i \in H_f(H_g(l_k))$ se e solo se esiste un m tale che si ha che o $l_m \in H_g(l_k)$ e $H_f(l_m) = l_n$ oppure se $-l_m \in H_g(l_k)$ e $l_f(-l_m) = l_n$.

Ciò significa che $l_n \in H_f(H_g(l_k))$ se e solo se esiste un m tale che $M(f)_{n,m}M(g)_{m,k} = 1$.

Allo stesso modo si avrà $-l_n \in H_f(H_g(l_k))$ se e solo se esiste un m tale che $M(f)_{n,m}M(g)_{m,k} = -1$.

Quindi, $((M(f)M(g))_{n,k} = \sum_{\alpha} l_n$.

Per definizione avremo che $M(f \circ g)_{n,k} = \sum_{[f(g(v_i)), f(g(v_j))]} l_n$ dal lemma 5.1.6, si ha quindi che $\sum_{\alpha} l_n = \sum_{[f(g(v_i)), f(g(v_j))]} l_n$ e $(M(f)M(g))_{n,k} = M(f \circ g)_{n,k}$.

□

Teorema 5.1.13. *Dato un albero orientato T con n vertici, una funzione $f : T \rightarrow T$ continua, il grafo orientato G_f e la matrice $M(f)$ se $f(v_i) \neq v_i \forall i = 1, \dots, n$, ossia la f non fissa nessun vertice, allora la traccia di $M(f)$ sarà -1 .*

Dimostrazione. Per ogni vertice v_i , consideriamo il cammino $\alpha = [v_i, f(v_i)]$ e associamo al primo lato orientato (v_i, v_k) lungo il cammino α un simbolo $*$ (può essere visto come la direzione in cui il vertice v_i si muove sotto l'azione della theta).

Osserviamo che se il lato $l_i = (v_i, v_j)$ ha due $*$, allora durante la costruzione del grafo, nel cammino $[f(v_i), f(v_j)]$ comparirà $-l_i$ e quindi in G_f ci sarà un lato orientato negativamente da I_i in se stesso.

Se non ci sono $*$ associati a l_i , allora il cammino $[f(v_i), f(v_j)]$ attraverserà il lato l_i e in G_f ci sarà un lato orientato positivamente da I_i in se stesso.

Se invece ho esattamente un $*$, allora durante la costruzione del grafo il

cammino $[f(v_i), f(v_j)]$ non attraverserà l_i in G_f non ci saranno lati che collegano I_i con se stesso.

Sia $A(i)$ il numero di $*$ associati a l_i . Allora, l' i -esimo valore della diagonale principale della matrice $M(\theta)$ è $1 - A(i)$ e quindi $\text{tr}(M(\theta))$ sarà $\sum_{i=1}^{n-1} (1 - A(i)) = (n - 1) - n = -1$.

□

5.2 L'ordinamento parziale per gli alberi

Mostriamo il modo in cui è possibile definire una relazione d'ordine parziale sull'insieme \mathbb{N}_0 dato nella definizione 3.2.1.

Definizione 5.2.1. Dato un $n \in \mathbb{N}$, ne scriviamo l'espansione binaria.

Preso la potenza del 2 minore contenuta nell'espansione binaria di n a cui corrisponde il valore 1, cambiamo tale valore in 0 e iteriamo il procedimento finché non otteniamo una stringa composta soltanto da zeri.

Esempio 5.2.2. Per fare un esempio, il numero 31 ha espansione binaria 11111, applicando il procedimento sopra descritto, si ottengono le stringhe di numeri 11110, 11100, 11000, 10000 e 00000, che in notazione decimale corrispondono ai numeri 30, 28, 24, 16 e 0.

Definizione 5.2.3. Definiamo la relazione \rightarrow tra due elementi $x, y \in \mathbb{N}_0$ dove \mathbb{N}_0 è l'insieme dato nella definizione 3.2.1.

Diremo che $x \rightarrow y$ se:

(1) $x = y$,

(2) se $y = 2^k$ per $k \geq 0$ e x non è un divisore di y ,

(3) se $x = 2^k \cdot x'$ dove $x' > 1$ dispari e $y = 2^k \cdot y'$ per $k \geq 0$ e $y' > x'$,

(4) se y può essere ottenuto da x prendendo l'espansione binaria di x e utilizzando il procedimento dato dalla definizione 5.2.1.

Teorema 5.2.4. *La relazione $x \rightarrow y$ è una relazione d'ordine parziale in \mathbb{N}_0 .*

Dimostrazione. La proprietà riflessiva segue immediatamente da (1).

Proviamo la transitiva, se $x \rightarrow y$, e/o $y \rightarrow z$, tramite (1) i casi sono banali, infatti o si ottiene $x = y = z$, oppure ci si riconduce ai casi dati nella definizione.

I casi in cui $x \rightarrow y$ per (2) e $y \rightarrow z$ per (3) e viceversa non possono mai verificarsi.

Stessa cosa per il caso $x \rightarrow y$ per (2) e $y \rightarrow z$ per (4), osserviamo che se $y = 2^k$, allora applicando il procedimento dato dalla definizione 5.2.1, $z = 0 \notin \mathbb{N}_0$, mentre se $x \rightarrow y$ per (4) e $y \rightarrow z$ per (2), allora o l'espansione binaria di x è nella forma $100\dots 00$ nel qual caso $y = 0 \notin \mathbb{N}_0$, altrimenti osserviamo che z è nella forma 2^k , quindi i suoi unici divisori sono altre potenze del 2, tuttavia c'è un unico valore y ottenuto con il processo dato dalla definizione 5.2.1 che è potenza del 2 e poiché $y \rightarrow z$ segue che $x \rightarrow z$.

Vediamo ora il caso in cui $x \rightarrow y$ per (3) e $y \rightarrow z$ per (4), allora sia y_n, y_{n-1}, \dots, y_0 l'espansione binaria di y e x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 quella di x , notiamo che n è l'indice corrispondente alla massima potenza del 2 tra le due espansioni e quindi sarà possibile ottenere $x_n = 0$.

Se $k \geq 1$, allora $y_i = x_i = 0$ per $0 \leq i \leq k-1$, chiamiamo m il minor intero per cui $y_{n-m} \neq x_{n-m}$. Poiché $x < y$, dobbiamo avere $y_{n-m} = 1$ e $x_{n-m} = 0$.

Osserviamo che z è ottenuto da y con il processo dato dalla definizione 5.2.1, se y_{n-m} non è stato rimosso, allora $z > x$ e poiché $y_i = x_i = z_i = 0$ per $0 \leq i \leq k-1$, otteniamo che $z = 2^k \cdot z'$ per $x' > z'$ e quindi da (3) segue che $x \rightarrow z$.

Se invece y_{n-m} è stato rimosso, allora $x_i = y_i$ per $m < i \leq n$ e z può essere

ottenuto da x utilizzando il procedimento dato nella definizione 5.2.1 e quindi per (4) $x \rightarrow z$.

Vediamo ora il caso inverso in cui $x \rightarrow y$ per (4) e $y \rightarrow z$ per (3), come nel caso precedente prendiamo $x_n, \dots, x_0; y_n, \dots, y_0; z_n, \dots, z_0$ le espansioni binarie di x, y, z e definiamo con $w \in \mathbb{N}$ il minor valore tale che $y_w = 1$, osserviamo che $w > k$, $y_i = 0$ per $0 \leq i < w$ e $y_i = x_i$ per $w \leq i \leq n$.

$x \rightarrow y$ usando (3), segue che $z_i = y_i = 0$ per $0 \leq i < w$, osserviamo che $z > y$ e $y_i = x_i$ per $w \leq i \leq n$ da cui segue $z > x$.

E' possibile quindi scrivere $z = 2^k \cdot z'$ dove $z' > x'$ e quindi $x \rightarrow z$ da (3).

Vediamo ora l'antisimmetrica, se sia $x \rightarrow y$ che $y \rightarrow x$ per (1) il caso è banale, mentre i casi in cui $x \rightarrow y$ per (1) e $y \rightarrow x$ per (2), (3), (4) e viceversa non possono accadere, così come i casi in cui $x \rightarrow y$ per (2) e $y \rightarrow x$ (3), (4).

Se $x \rightarrow y$ per (3), allora consideriamo due casi: o y' non è nella forma 2^i , per $i > 0$, lo è.

Nel primo caso osserviamo che il fattore 2^k compare nelle fattorizzazioni di x, y , ma dalla procedura data nella definizione 5.2.1 non potremo mai ottenere x da y .

Nel secondo caso invece osserviamo che y sarà un numero pari, mentre x sarà dispari e anche in questo caso la procedura descritta nella definizione 5.2.1 non ci permetterà di ottenere x da y .

□

5.3 Sharkovsky e alberi

Siamo pronti per enunciare il

Teorema 5.3.1. *(di Sharkovsky per alberi) Dato un albero orientato T con n vertici e una funzione $f : T \rightarrow T$ continua, supponiamo che i vertici di T formino un'orbita di periodo n sotto l'azione della f . Se $n \rightarrow m$, allora f ha un'orbita periodica di periodo m .*

Dimostrazione. Anche in questo caso divideremo la dimostrazione in 3 parti:

- 1 Se n non è un divisore di 2^k , allora G_f avrà un circuito non ripetitivo di lunghezza 2^k .
- 2 Se $n = 2^k \cdot m$ per $m > 1$ dispari e $k \geq 0$, allora G_f ha un circuito non ripetitivo di lunghezza $2^k \cdot r \forall r \geq m$.
- 3 Se n è dispari, G_f ammette circuiti non ripetitivi di lunghezza $n - 1$.

Parte 1

Poiché n non è un divisore di 2^k , allora f^{2^k} non porta un vertice in se stesso. Dal teorema 5.1.13, la $Tr(M(f^{2^k})) = -1$, da cui segue che ci sarà almeno un -1 nella diagonale principale della matrice $(M(f^{2^k}))$. Utilizzando il teorema 5.1.12, otteniamo la seguente uguaglianza $(M(f^{2^k})) = (M(f))^{2^k}$ e dal lemma 5.1.10 il grafo G_f dovrà avere un circuito β di lunghezza 2^k con orientazione negativa.

Se β fosse ripetizione di un circuito β' più breve, allora distinguiamo due casi:

Se β' avesse orientazione positiva allora anche β la avrà, assurdo.

Se invece anche β' avesse orientazione negativa, allora poiché β ha lunghezza 2^k , β' dovrà avere lunghezza 2^i per $i < k$.

Osserviamo che β' dovrà essere ripetuto un numero pari di volte per ottenere β , da questo segue che β ha orientazione positiva il che è assurdo.

Il primo caso è dimostrato.

Parte 2

Dal teorema 5.1.13 segue che anche in questo caso $Tr(M(f^{2^k})) = -1$.

Dal teorema 5.1.12 e il lemma 5.1.10, dovrà esistere un circuito β di lunghezza 2^k con orientazione negativa in G_f . Poiché $f^{2^k \cdot m}$ è la funzione identità, avremo che $M(f^{2^k \cdot m}) = Id$. Sempre usando il teorema 5.1.12 e il lemma 5.1.10, dovrà esistere un circuito β' di lunghezza $2^k \cdot m$ con orientazione positiva per ognuno dei vertici di G_f .

Dovrà quindi esistere un vertice da cui parte sia il circuito β che il circuito β' .

Poiché β' e β hanno orientazioni opposte e m è dispari, segue che il circuito più lungo non potrà essere ripetizione di quello più breve.

Possiamo quindi formare un circuito non ripetitivo di lunghezza $2^k \cdot r$ per $r \geq m$ seguendo il circuito β' una volta e β per $2^k \cdot m - r$ volte.

Parte 3

Procedendo come nella parte precedente, dovrà esistere un vertice $I_i \in G_f$ da cui parte sia un circuito β di lunghezza 1, che un circuito β' di lunghezza n non ripetitivo. Osserviamo che dovrà anche esistere un terzo circuito β'' di lunghezza $j < n$ che non è una ripetizione del circuito di lunghezza 1, perchè il grafo G_f ha soltanto $n - 1$ vertici, quindi il circuito non ripetitivo di lunghezza $n - 1$ che stiamo cercando si ottiene attraversando β'' una volta e β il rimanente numero di volte e il teorema è dimostrato.

□

Capitolo 6

Equazioni alle differenze periodiche

6.1 Definizioni preliminari

In questo capitolo estenderemo il teorema di Sharkovskiy a equazioni alle differenze periodiche.

Definizione 6.1.1. Sia $\{x_n\}$ una successione a valori reali definita per $n \in \mathbb{N}$, $f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0, n)$ una funzione a valori reali di $k + 2$ variabili e $k \in \mathbb{N}_0$ dove \mathbb{N}_0 è l'insieme degli interi positivi.

Un'equazione alle differenze è una relazione

$$f(x_{n+k}, x_{n+k-1}, \dots, x_n, n) = 0,$$

che dev'essere soddisfatta dalla successione $\{x_n\}$ per ogni intero n .
 k è detto *ordine* dell'equazione alle differenze.

Vediamo adesso alcune definizioni.

Definizione 6.1.2. Un'equazione alle differenze si dice *lineare* se la funzione f è un polinomio di primo grado nelle variabili y_k, \dots, y_0 , ossia quando ha la forma:

$$a_{k,n}x_{n+k} + a_{k-1,n}x_{n+k-1} + \dots + a_{0,n}x_n = z_n.$$

In questo caso il termine z_n è detto *termine noto*.

Definizione 6.1.3. Un'equazione alle differenze lineare per cui $a_{k,n}, a_{k-1,n}, \dots, a_{0,n}, z_n$ non dipendono da n , è detta a *coefficienti costanti*.

Definizione 6.1.4. Un'equazione alle differenze si dice *omogenea* se si ha $z_n = 0 \forall n$.

Definizione 6.1.5. Data un'equazione lineare non omogenea, l'equazione ottenuta ponendo il termine noto $z_n = 0$ è detta *equazione omogenea associata*.

Definizione 6.1.6. Un'equazione alle differenze è in *forma normale* se la funzione f ha la forma:

$$f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0, n) = y_k - g(y_{k-1}, \dots, y_0, n)$$

cioè $f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0, n) = 0$ può essere risolta rispetto alla variabile y_k per ogni n .

Definizione 6.1.7. Un'equazione alle differenze è *autonoma* se la funzione f non dipende da n , ossia può essere scritta come:

$$f(y_{n+k}, \dots, y_0).$$

Definizione 6.1.8. Consideriamo ora la seguente equazione alle differenze non autonoma di periodo p .

$$x_{n+1} = F(n, x_n)$$

Dove $F : \mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$ è una funzione continua e X è uno spazio metrico tale che $F(n+p, \cdot) = F(n, \cdot)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Possiamo riscrivere l'equazione nella seguente forma:

$$x_{n+1} = f_n(x_n),$$

dove, si ha $f_n = F(n, \cdot)$ e $f_{n+p} = f_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Definizione 6.1.9. Dato uno spazio topologico X , definiamo con $C = C(\mathbb{Z} \times X, X)$ lo spazio delle funzioni continue da $\mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ con la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{Z} \times X$.

Data una $g \in C$, definiamo la funzione $\sigma : X \times \mathbb{Z} \rightarrow X$ tale che $\sigma(g, n) = g_n$ e $g_n(k, x) \mapsto g(k+n, x)$.

Definizione 6.1.10. Data la funzione F definita in 6.1.8, definiamo l'insieme $Y = Cl\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ e una famiglia di funzioni $\Phi_n : Y \times \mathbb{Z} \rightarrow Y$ dove presa una funzione $f \in Y$ e posta $f = f_0$, si ha:

$$\begin{aligned} \Phi_0(f_0) &= id, \\ \Phi_n(f_i) &= f_{i+n-1} \circ \cdots \circ f_{i+1} \circ f_i. \end{aligned}$$

Definizione 6.1.11. Dato X spazio topologico, $Y = \{f_i : i = 0, 1, \dots, p-1\}$, e le funzioni Φ, σ date nelle definizioni 6.1.9, 6.1.9 consideriamo la funzione $\pi : X \times Y \times \mathbb{N}_0 \rightarrow X \times Y$ definita da $\pi((x_0, f_i), n) = (\Phi(n, f_i)x_0, f_{i+n})$. Definendo come \mathfrak{p} la proiezione da $X \times Y \rightarrow Y$, si ottiene il diagramma in figura 6.1.1.

Definizione 6.1.12. Dato lo schema in figura 6.1.1, $\forall f_i \in Y : 0 \leq i \leq p-1$, chiamiamo l'insieme $\mathfrak{p}^{-1}(f_i) = \mathcal{F}_i$ l' i -esima fibra nello spazio prodotto $X \times Y$.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y \times \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{\pi} & X \times Y \\
 \downarrow p \times \text{id} & & \downarrow p \\
 Y \times \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{\sigma} & Y
 \end{array}$$

Figura 6.1.1: Diagramma delle trasformazioni.

6.2 Cicli geometrici

Introduciamo ora la nozione di cicli geometrici

Definizione 6.2.1. Dato lo spazio degli stati X e una funzione $f_n : X \rightarrow X$ periodica di periodo p , sia $C_r = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1}\}$ un insieme di punti nello spazio X per $k \geq 1$.

L'insieme C_r è un *ciclo geometrico* di lunghezza r se, per $i = 0, 1, \dots, r-1$.

$$f_{(i+nr) \bmod p}(\bar{x}_i) = \bar{x}_{(i+1) \bmod r}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Osservazione 6.2.2. Possiamo associare a un ciclo geometrico di lunghezza r nello spazio X un ciclo di lunghezza s nello spazio π definito in 6.1.11 dato da $(\bar{x}_0, f_0), (\bar{x}_1, f_1), \dots, (\bar{x}_{(s-1) \bmod r}, f_{(s-1) \bmod p})$, dove s è il minimo comune multiplo (d'ora in poi *mcm*) tra p e r .

Vediamo ora alcune proprietà di questi cicli geometrici

Lemma 6.2.3. Dato lo spazio degli stati X , una funzione $f_n : X \rightarrow X$ periodica di periodo p e un ciclo geometrico C_r con $s = \text{mcm}(p, r)$. Allora

l'orbita di (\bar{x}_0, f_0) per π interseca ogni fibra $\mathcal{F}_i : i = 0, \dots, p-1$ in esattamente $l = s/p$ punti e ognuno di questi punti è periodico di periodo s .

Dimostrazione. Poiché $s = mcm(p, r)$, osserviamo che l'orbita di (\bar{x}_0, f_0) dovrà avere periodo s , di conseguenza, l'insieme

$$S = \{\pi((\bar{x}_0, f_0), n) : n \in \mathbb{N}_0\} \subset X \times Y$$

è minimale, invariante sotto l'azione di π e consiste di s punti distinti. Di conseguenza, $\forall i : 0 \leq i < r$, abbiamo che la funzione:

$$f_i : S \cap \mathcal{F}_i \rightarrow S \cap \mathcal{F}_{i+1 \bmod p}$$

è suriettiva.

Per dimostrare l'induttività, osserviamo che la cardinalità di

$$\mathcal{C}_i = \text{Card}(S \cap \mathcal{F}_i)$$

è una funzione intera non crescente e di conseguenza \mathcal{C}_i dovrà essere costante. Da ciò segue che tutte le $S \cap \mathcal{F}_i$ dovranno contenere lo stesso numero di punti, dato da $l = s/p$.

□

Osservazione 6.2.4. Osserviamo che, dato uno spazio metrico Ω e una funzione $h : \Omega \rightarrow \Omega$ continua nello spazio metrico Ω . Se h ammette un ciclo di lunghezza r , allora $r \leq k$.

Teorema 6.2.5. (teorema di Elaydi-Sacker) Dato uno spazio metrico connesso X , supponiamo che ogni funzione $f_i \in Y : f_i : X \rightarrow X$ per $i = 0, \dots, p-1$ sia continua e $C_r = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r\}$ un ciclo geometrico per l'equazione alle differenze 6.1.8 di periodo p , allora allora $r \mid p$.

Dimostrazione. Sia $C_r = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r\}$ un ciclo geometrico per l'equazione 6.1.8 e sia $s = mcm(r, p)$. Allora, per il lemma 6.2.3 ogni fibra $\mathbf{p}^{-1}(f_i)$, con $0 \leq i \leq p-1$ contiene $l = s/p$ punti $(x_{n_1}, f_i), (x_{n_2}, f_i), \dots, (x_{n_l}, f_i)$ e ognuno di questi punti ha periodo s nella mappa

$$h : X \times \{f_1, \dots, f_p\} \rightarrow X \times \{f_1, \dots, f_p\},$$

$$h(x, f_i) = (\Phi(1, f_i)x, f_{i+1 \bmod p}).$$

Ma X connessa implica che $X \times \{f_1, \dots, f_p\}$ ha p componenti e quindi, per il teorema 6.2.4, si ha che $s \leq p$. Ma $s = mcm(r, p) \geq p$, quindi $s = p$, segue che $mcm(r, p) = p$ e quindi r dovrà dividere p .

□

Ora vogliamo collegare equazioni alle differenze di periodo p e cicli geometrici di lunghezza r .

Teorema 6.2.6. *Per ogni intero positivo $p > 1$ e $r \geq 1$, esistono polinomi f_0, f_1, \dots, f_{p-1} di grado al più $l = mcm(p, r)/p$ tali per cui l'equazione alle differenze di periodo p data da $x_{n+1} = f_n(x_n)$ ammette un ciclo geometrico di periodo r .*

Dimostrazione. Assumiamo che il ciclo costruito sia

$$\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_{r-1}$$

con $\bar{x}_i, \bar{x}_j : i \neq j$.

dato $d = MCD(p, r)$, $\forall 0 \leq i \leq d-1$, cerchiamo il polinomio interpolante f_i di grado al massimo $l-1$ per $l = r/d$ che attraversi i punti $(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}), (\bar{x}_{i+d}, \bar{x}_{i+d+1}), \dots, (\bar{x}_{i+(l-1)d \bmod r}, \bar{x}_{i+1+(l-1)d \bmod r})$.

Quindi $f_i(x)$ può essere scritta come:

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{l-1} \bar{x}_{i+1+jd \bmod r} l_j(x),$$

dove $l_j(x)$ soddisfa $l_j(\bar{x}_{i+kd \bmod r}) = 0$, $j \neq k$ e $l_j(\bar{x}_{i+jd \bmod r}) = 1$.

Gli $l_j(x)$ sono i polinomi interpolanti di Lagrange associati ai nodi $\{\bar{x}_i, \bar{x}_{i+d}, \dots, \bar{x}_{i+(l-1)d \bmod r}\}$ che possono essere anche scritti come:

$$l_j(x) = \prod_{k=0; k \neq j}^{l-1} \frac{x - \bar{x}_{i+kd \bmod r}}{\bar{x}_{i+jd \bmod r} - \bar{x}_{i+kd \bmod r}}.$$

Chiaramente,

$$f_i(\bar{x}_{(i+kd) \bmod r}) = \bar{x}_{(i+1+kd) \bmod r}, \quad 0 \leq k \leq l-1.$$

Se $p = d$, allora le funzioni definite sopra producono il ciclo geometrico di periodo r desiderato.

Invece, nel caso in cui $p \neq d$, allora fissiamo un i , $0 \leq i \leq d-1$ e per ogni $1 \leq j \leq m-1$, costruiamo le mappe $f_{i+jd}(x)$ come:

$$f_{i+jd}(x) = f_i(x) + \lambda_j \prod_{k=0}^{l-1} (x - \bar{x}_{i+kd \bmod r}),$$

dove i parametri λ_j per $1 \leq j \leq m-1$ possono essere manipolati liberamente per mantenere il sistema in forma non autonoma.

Osserviamo che i polinomi $f_i(x)$ per $0 \leq i \leq d-1$ sono di grado almeno $l-1$ e che per tutti gli $0 \leq i \leq d-1$ e $1 \leq j \leq m-1$ le funzioni $f_{i+jd}(x)$ sono di grado almeno l .

Inoltre sostituendo, si ha che per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$f_{n \bmod p}(\bar{x}_{n \bmod r}) = \bar{x}_{n+1 \bmod r}.$$

□

6.3 Il teorema per equazioni alle differenze

Osservazione 6.3.1. Dati due interi positivi $p > 1$ e $q \geq 1$, li scomponiamo in fattori primi nel modo seguente:

$$p = \prod_{i=1}^k p_i^{s_i}$$

$$q = (\prod_{i=1}^k p_i^{t_i}) (\prod_{i=1}^m q_i^{t_i^*})$$

dove gli p_i sono i fattori primi distinti di p e gli q_i sono i fattori primi distinti di q che non sono in comune con p .

Definizione 6.3.2. Definiamo l'insieme

$$A_q(p) = \left\{ q \prod_{i=1}^k p_i^{s_i^*} : s_i^* = 0, 1, \dots, s_i \text{ se } t_i = 0, \text{ e } s_i^* = s_i \text{ se } t_i \neq 0 \right\}.$$

Per p fissato, scriviamo $A_q(p) = A_q$.

Lemma 6.3.3. *L'insieme A_q può essere scritto in forma seguente:*

$$A_q = \{n : mcm(n, p) = pq\}.$$

Dimostrazione. Dalla definizione 6.3.2 segue che $A_q \subseteq \{n : mcm(n, p) = pq\}$. Preso un $m : mcm(m, p) = pq$, allora $mp/MCD(m, p) = pq$ da cui segue $m = q \cdot MCD(m, p)$.

Ciò implica che $m \in A_q$ e il lemma è dimostrato.

□

Osservazione 6.3.4. Notiamo che per p fissato, l'insieme A_q ha le seguenti proprietà:

- (i) $pq \in A_q \forall q \in \mathbb{N}_0$,
- (ii) $A_{q_1} \cap A_{q_2} = \emptyset$ se e solo se $q_1 \neq q_2$,
- (iii) $\bigcup_{q \in \mathbb{N}_0} A_q = \mathbb{N}_0$.

Definizione 6.3.5. Fissato un $p \in \mathbb{N}_0$, definiamo l'ordinamento *p-Sharkovsky* sugli insiemi A_q .

In questo ordinamento scriviamo $A_{q_1} < A_{q_2}$ se $q_1 \triangleright q_2$ nell'ordinamento dato nella definizione 3.2.1 e con tale scrittura intendiamo che ogni elemento di A_{q_1} precede ogni elemento di A_{q_2} .

Osservazione 6.3.6. Notiamo che l'ordinamento *p-Sharkovsky*, coincide con l'ordinamento dato nella definizione 3.2.1 se e solo se $p = 1$.

In tutti gli altri casi, dipende dalla scelta di p secondo la definizione di A_q .

Teorema 6.3.7. *(di Sharkovsky per eq. alle differenze) Data un'equazione alle differenze nella forma $x_{n+1} = f_n(x_n)$ di periodo p , se possiamo associare a tale equazione un ciclo geometrico C_r di periodo r tale che $A_l < A_q$ con $l = \text{mcm}(p,r)/p$, allora ogni insieme A_q contiene un periodo di un ciclo geometrico.*

Dimostrazione. Supponiamo che l'equazione alle differenze $x_{n+1} = f(n, x_n)$ abbia un ciclo geometrico di periodo r , allora per il lemma 6.2.3 dovranno esserci l punti distinti in ogni fibra F_i per $0 \leq i \leq p-1$.

Inoltre, gli l punti in F_0 formano un ciclo di periodo l sotto l'azione della funzione $h(x) = f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0(x)$. Applicando quindi il teorema di Sharkovsky 3.3.1 alla funzione $h(x)$ concludiamo che $h(x)$ ha cicli di periodo q per ogni $l < q$ nell'ordinamento 6.3.5.

Ora, i q punti del ciclo di periodo q sono nell'intersezione della fibra F_0 e di un qualche ciclo geometrico che sappiamo esistere per il teorema 6.2.6 di lunghezza r_1 per qualche r_1 tale che $\text{mcm}(p, r_1) = pq$.

Ma se $\text{mcm}(p, r_1) = pq$, allora per il lemma 6.3.3 si avrà che $r_1 \in A_q$ e per come abbiamo definito l'ordinamento 6.3.5, ogni insieme $A_l < A_q$ dovrà contenere un periodo di un ciclo geometrico.

□

6.4 Il teorema inverso per equazioni alle differenze

Vogliamo ora vedere come il teorema inverso possa essere esteso a equazioni alle differenze periodiche.

Teorema 6.4.1. *Dati $r, p \in \mathbb{N}_0 : p > 1$, posto $l = \text{mcm}(r, p)/p$, esiste un'equazione alle differenze $x_{n+1} = f_n(x_n)$ di periodo p a cui possiamo associare*

un ciclo geometrico di periodo r , ma non di periodo r_1 per ogni $r_1 \in A_q$ per $l \triangleright q$ nell'ordinamento 6.3.5.

Dimostrazione. Dalle costruzioni fatte nella dimostrazione del teorema 4.0.1 dovrà esistere una mappa continua a tratti $f(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$ che ammetta un punto periodico di periodo l , ma non di periodo l_1 per $l_1 \triangleright l$ considerando l'ordinamento 3.2.1. Prese $p-1$ funzioni biettive f_1, f_2, \dots, f_{p-1} nell'intervallo $[a, b]$, definiamo la funzione f_0 nel seguente modo:

$$f_0(x) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \dots \circ f_{p-1}^{-1} \circ f(x).$$

Poniamo $f_n(x) = x$ per $1 \leq n \leq p-1$ e $f_0(x) = f(x)$. Allora la funzione $f_{p-1} \circ f_{p-2} \circ \dots \circ f_0(x) = f(x)$ non ha punti di periodo $l_1 \forall l_1 \triangleright l$ e conseguentemente l'equazione alle differenze $x_{n+1} = f_n(x_n)$ non avrà cicli di periodo $r_1 \forall r_1 \in A_q \triangleright A_l$.

□

Corollario 6.4.2. *Dati $m, r \in \mathbb{N}_0 : r \geq 1$, poniamo $p = 2^m$, $l = \text{mcm}(r, 2^m)/2^m$ e k il valore minimo contenuto in A_l secondo l'ordinamento dato nella definizione 6.3.5. Allora esiste un'equazione alle differenze $x_{n+1} = f_n(x_n)$ di periodo p che ammette un ciclo geometrico di lunghezza r ma non di periodo $r_1 \forall r_1 : r_1 \triangleright k$ nell'ordinamento dato nella definizione 3.2.1.*

Dimostrazione. Definito l'insieme $A = \{x : x \triangleright k\}$, vogliamo mostrare che $A \subseteq \bigcup_{q \triangleright l} A_q$ considerando i seguenti tre casi:

- (i) se $l = 2^j$ per qualche $j \in \mathbb{N}_0$, allora $\min A_{2^j} = k$ e poiché $p = 2^m$ avremo che $k = 2^{j+m}$, quindi A avrà come elementi tutti i numeri che nell'ordinamento dato nella definizione 3.2.1 sono maggiori di k , ma poiché k è anche il valore minimo contenuto in A_{2^j} , allora avremo che $A = \bigcup_{q \triangleright l} A_q$.

(ii) vediamo ora invece il caso in cui l sia nella forma $l = 2^j(2t + 1)$ per $j, t \in \mathbb{N}_0$, allora $k = 2^{j+m}(2t + 1)$ e come nel caso (i), si ha che $A = \bigcup_{q \triangleright l} A_q$.

(iii) infine, se $l = (2t + 1)$ per $t \in \mathbb{N}_0$, allora $k = 2t + 1$ e sempre procedendo come nel caso (i), avremo che $A = \{3, \dots, 2t + 1\}$ ma dalla definizione di A_q e tenendo conto del p -ordinamento, avremo che $A \subset \bigcup_{q \triangleright l} A_q$.

a questo punto utilizziamo il teorema 6.4 e la dimostrazione è conclusa. \square

Corollario 6.4.3. *Dato $p \in \mathbb{N}_0$ dispari e q_1 il più piccolo fattore di p , poniamo $r = 2^k q$: $k \in \mathbb{N}_0$ e q è un fattore primo qualsiasi di p . Se esiste un'equazione alle differenze $x_{n+1} = f_n(x_n)$ di periodo p a cui può essere associato un ciclo geometrico di periodo r ma non r_1 per $r_1 \triangleright 2^k q_1$, allora possiamo associare all'equazione $x_{n+1} = f_n(x_n)$ cicli geometrici di periodo $2^{k-1}, 2^{k-2}, \dots, 2^2, 2, 1$.*

Dimostrazione. Poiché $l = \text{mcm}(p, r)/p = 2^k$, dal teorema 6.3.7, preso $j \in \mathbb{N}_0$, se $2^k \triangleright 2^j$, allora esiste un ciclo geometrico di lunghezza r_1 per $r_1 \in A_{2^j}$.

Notiamo che tutti gli elementi nell'insieme A_{2^j} a eccezione di 2^j precedono $2^k q_1$ nell'ordinamento 6.3.5.

Dalle ipotesi segue che $r_1 = 2^j$ per $0 \leq j \leq k$. \square

Bibliografia

1. Alsedà L., Llibre J., Misiurewicz M., *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one. Advanced series in nonlinear dynamics*, **5**, Singapore, World Scientific, 2000.
2. Alsharawi Z., Angelos J., Elaydi S., Rakesh L., *An extension of Sharkovsky's theorem to periodic difference equations*, Journal of math. analysis and applications [e-journal] **316** 128-141.
3. Bernhardt C., *Vertex maps for trees: algebra and periods of periodic orbits*, Discrete and continuous dynamical systems **14**(3), 399-408, 2005.
4. Bernhardt C., *A Sharkovsky's theorem for vertex maps on trees*, Journal of difference equations and applications, **17**, 103-113, 2011.
5. Bernhardt C., *Sharkovsky's theorem and one-dimensional combinatorial dynamics*, arXiv:1201.3583v1, 2012.
6. Block L. S., Coppel W. A., *Dynamics in one dimension*, Springer, 1992.
7. Burkart U., *Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions*, Journal of combinatorial theory **32**, 57-68, 1982.
8. Burns K., Hasselblatt H., *Sharkovsky's theorem*, The american math. monthly, **118** (3), 2011.
9. Devaney R. L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Westview Press, 2 edizione, 2003.

10. Du Bau-Sen., *A simple proof of Sharkovsky's theorem revisited*, American math. monthly **114** (2), 152-155, 2007.
11. Elaydi S., *On a converse of Sharkovsky's theorem*, The american math. monthly **103**, 386-392, 1996.
12. Elaydi S., Sacker J. R., *Global stability of periodic orbits of non-autonomous difference equations and population biology*, Journal of math. analysis and applications [e-journal], **208**, 258-273, 2005.
13. Leonesi S., Toffalori C. *Un invito all'algebra*, Springer, 2006.
14. Li Tien-Yien, Yorke A. J. *Period three implies chaos*, The american math. monthly, **82**, 985-992, 1975.
15. Sharkovsky A. N., *Co existence of the cycles of a continuous mapping of the line onto itself*, Ukrain. math. Zh. **16** (1), 61-71, 1964.
16. Straffin P. D., *Periodic points of continuous functions*, Mathematics magazine, **51** (2), 99-105, 1978.