

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE
LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA E APPICAZIONI

Spazi auto-omeomorfi e auto-simili



Elaborato Finale in Geometria

Candidato:
Gabriele Sacchi

Relatore:
Prof. Riccardo Piergallini

ANNO ACCADEMICO 2024 / 2025

Alla nonna Rosi

Indice

Introduzione	vii
1 Dimensione topologica	1
2 Misura e dimensione di Hausdorff	11
2.1 Misura di Hausdorff	11
2.2 Dimensione di Hausdorff	14
3 Spazi auto-simili	21
3.1 Spazi Simbolici	21
3.2 Sistemi di Funzioni Iterate	23
3.3 Attrattori di SFI	25
4 Spazi auto-omeomorfi	35
4.1 Definizione e proprietà topologiche	35
4.2 Metriche auto-simili associate	42
Bibliografia	49

Introduzione

In topologia due spazi si dicono omeomorfi se esiste una trasformazione capace di mappare uno spazio nell'altro preservandone la struttura topologica. Tale trasformazione, continua, invertibile e con inversa continua, prende il nome di omeomorfismo. Uno spazio auto-omeomorfo è caratterizzato dalla presenza di una famiglia “densa” di sottospazi che sono sue copie omeomorfe. Uno spazio auto-simile è invece uno spazio metrico auto-omeomorfo, in cui le copie omeomorfe sono anche simili, ovvero legate da trasformazioni che preservano la forma a diverse scale. Gli spazi auto-omeomorfi presentano proprietà peculiari e trovano applicazioni in diversi ambiti, tra cui l'informatica, i sistemi dinamici e la biologia

In questo elaborato vengono analizzate alcune proprietà fondamentali degli spazi auto-omeomorfi e auto-simili, e le principali relazioni tra questi due concetti. Per affrontare in modo adeguato l'argomento, vengono introdotti i concetti di dimensione di Hausdorff e di Sistemi di Funzioni Iterate (SFI). Le definizioni di dimensione topologica si basano principalmente sul testo di W. Hurewicz e H. Wallman [3], integrate dalle nozioni di dimensione di Hausdorff presenti nell'opera di K. Falconer [2]. Per quanto riguarda gli spazi auto-omeomorfi e auto-simili, si fa riferimento all'articolo di W.J. Charatonik e A. Dilks [4]. Le definizioni e principali proprietà dei Sistemi di Funzioni Iterate, strumento fondamentale per la generazione e lo studio di spazi auto-simili, sono anch'esse tratte dal lavoro di K.Falconer.

Infine, a conclusione dell'elaborato, viene studiato un caso semplice di spazio auto-omeomorfo, analizzando alcune metriche associabili che possono renderlo auto-simile.

La struttura della tesi è la seguente:

1. Il Capitolo 1 presenta la definizione rigorosa di dimensione topologica e alcune sue proprietà fondamentali. In particolare, vengono distinti gli spazi di dimensione zero, le cui proprietà costituiscono il caso base per argomentazioni di tipo induttivo, e gli spazi di dimensione generica n . Il capitolo si conclude osservando che lo spazio euclideo di dimensione n ha effettivamente dimensione topologica n .
2. Il Capitolo 2 introduce la dimensione di Hausdorff, un importante strumento per la caratterizzazione degli spazi auto-simili. Dopo averne presentato la definizione e alcune proprietà fondamentali, il capitolo si conclude mettendo in relazione la dimensione di Hausdorff con quella topologica.
3. Il Capitolo 3 è dedicato agli spazi auto-simili e ai Sistemi di Funzioni Iterate (SFI). In particolare, i SFI vengono utilizzati per definire spazi auto-simili e per derivarne alcune proprietà rilevanti, sfruttando la struttura ricorsiva che li caratterizza.
4. Il Capitolo 4 affronta la definizione formale di spazi auto-omeomorfi, introducendone alcune varianti più restrittive e riportando esempi significativi. Infine, vengono analizzate le condizioni sufficienti per associare a uno spazio auto-omeomorfo una metrica auto-simile, in grado di assegnare allo spazio una dimensione di Hausdorff arbitraria. Si esamina in particolare una costruzione ricorsiva di uno spazio topologico di Hausdorff, analogo non metrico all'insieme di Cantor. Lo spazio si presenta come un'unione disgiunta di due sottoinsiemi aperti e chiusi, ciascuno omeomorfo all'intero spazio. Iterando indefinitamente questa suddivisione, si ottiene una struttura gerarchica di copie omeomorfe annidate, generando uno spazio totalmente sconnesso, compatto e a dimensione topologica zero.

Lo scopo dell'elaborato è quindi quello di evidenziare le connessioni tra struttura topologica e auto-similarità, mostrando come concetti metrici e puramente topologici possano interagire nella costruzione di spazi complessi.

Capitolo 1

Dimensione topologica

Di seguito si fornirà la definizione di Menger e Urysohn di dimensione topologica di uno spazio e si studieranno alcune caratteristiche fondamentali.

Definizione 1.1. Sia X uno spazio metrico separabile. X ha dimensione -1 se e solo se X è uguale all'insieme vuoto. Dimensioni superiori sono definite in maniera induttiva nel seguente modo:

Uno spazio X ha dimensione $\leq n$ in un punto p , se p ha intorni arbitrariamente piccoli la cui frontiera ha dimensione $\leq n - 1$.

X ha dimensione $\leq n$, se X ha dimensione $\leq n$ in ogni punto.

X ha dimensione n in un punto p , se X ha dimensione $\leq n$ in p , ma non $\leq n - 1$ in p .

X ha dimensione n , se ha dimensione $\leq n$, ma non $\leq n - 1$.

X ha dimensione ∞ se non ha dimensione $\leq n$ per nessun n .

Proposizione 1.2. *La dimensione topologica è un invariante topologico, ovvero se due spazi topologici sono omeomorfi, allora hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio topologico con $\dim X = n$, e sia $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo su uno spazio topologico Y . Poiché f è un omeomorfismo, esso preserva le proprietà topologiche, comprese le chiusure e le frontiere degli insiemi. Per ogni punto $p \in X$ e ogni intorno U di p , esiste un intorno $V \subset U$ tale che la

frontiera ∂V ha dimensione $\leq n - 1$. Poiché f è un omeomorfismo, l'immagine $f(V)$ è un intorno di $f(p)$ in Y , e si ha:

$$f(\partial V) = \partial f(V).$$

Segue che $\dim(\partial f(V)) \leq n - 1$. Dunque Y ha dimensione $\leq n$ in ogni punto. Invertendo i ruoli di X e Y , applicando lo stesso ragionamento a f^{-1} , si ottiene la disuguaglianza inversa. Pertanto $\dim X = \dim Y$, ovvero la dimensione topologica è invariante per omeomorfismi. \square

Osservazione 1.3. La dimensione topologica non è invariante per trasformazioni continue in generale. Esistono applicazioni continue che modificano la dimensione dello spazio.

Esempio 1.4 (Proiezione). Si consideri la proiezione canonica $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $\pi(x, y) = x$. Si tratta di una funzione continua e suriettiva, ma:

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2, \quad \dim \mathbb{R} = 1.$$

Quindi la proiezione riduce la dimensione topologica.

Esempio 1.5 (Curva di Peano). Esiste una funzione continua suriettiva $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, detta curva di Peano, tale che:

$$\dim[0, 1] = 1, \quad \dim[0, 1]^2 = 2.$$

Quindi, in questo caso, una mappa continua aumenta la dimensione dello spazio.

Osservazione 1.6. Uno spazio ha dimensione zero in un punto p , solo se p ha intorni arbitrariamente piccoli la cui frontiera è vuota, ovvero se per ogni intorno U di p , esiste un $V \subset U$ intorno di p con frontiera vuota. Si può quindi definire uno spazio di dimensione zero come uno spazio in cui esiste una base di aperti i cui elementi sono anche chiusi.

Proposizione 1.7. *È possibile dare anche la seguente definizione equivalente: uno spazio non vuoto X ha dimensione 0 se e solo se, per ogni punto p e ogni chiuso*

C tale che $p \notin C$, p e C possono essere separati, ovvero esiste un aperto e chiuso S contenente p , disgiunto da C .

Dimostrazione. Si dimostra che esiste una base di aperti e chiusi, proprietà che, per l'osservazione precedente, coincide con l'avere dimensione zero. Fissato un punto $p \in X$, per ogni aperto A contenente p , consideriamo $C = X \setminus A$ chiuso. Ora, per la proprietà della proposizione, C e p possono essere separati, ovvero esiste un sottoinsieme $S \subset A$ contenente p , aperto e chiuso. In maniera analoga si dimostra che, se X ha dimensione zero, vale la proprietà. \square

Osservazione 1.8. Uno spazio con dimensione zero è totalmente disconnesso, ovvero ogni singoletto $\{x\}$ è aperto e chiuso. Questo vale perché ogni sottospazio ha dimensione zero, e l'unico spazio connesso di dimensione zero è uno spazio composto da un solo punto.

Proposizione 1.9. Siano C_1 e C_2 due sottoinsiemi chiusi e disgiunti di uno spazio metrico X , e sia $A \subset X$ un sottospazio di dimensione topologica zero. Allora esiste un insieme chiuso $B \subset X$, disgiunto da A , tale che C_1 e C_2 risultano separati in $X \setminus B$.

Dimostrazione. Poiché X è uno spazio metrico, esistono intorni aperti U_1 e U_2 di C_1 e C_2 , rispettivamente, tali che

$$\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset.$$

Gli insiemi $\overline{U_i} \cap A$ sono chiusi e disgiunti in uno spazio di dimensione zero. Quindi A può essere separato da due insiemi aperti e chiusi $C'_1, C'_2 \subset A$ tali che

$$A = C'_1 \cup C'_2, \quad \overline{U_i} \cap A \subset C'_i.$$

Sia ora $D_i = C_i \cup C'_i$. Le chiusure di D_1 e D_2 sono disgiunte in X , per costruzione degli insiemi. Poiché X è normale, esiste un aperto $W \subset X$ tale che

$$D_1 \subset W \quad \text{e} \quad \overline{W} \cap D_2 = \emptyset.$$

Sia $B = \partial W$ la frontiera di W . Si osserva che B separa C_1 e C_2 ed è disgiunto da A . \square

Teorema 1.10. *Un sottospazio di uno spazio di dimensione $\leq n$ ha dimensione $\leq n$.*

Dimostrazione. La proprietà è ovvia per $n = -1$. Si assuma quindi vera per $n - 1$. Sia X uno spazio di dimensione $\leq n$, sia X' un sottospazio, e p un punto di X' . Sia U' un intorno di p contenuto in X' . Allora esiste un intorno U in X tale che $U' = U \cap X'$. Poiché $\dim X \leq n$, esiste V intorno aperto di p , contenuto in U , la cui frontiera B ha dimensione $\leq n - 1$. Sia ora $V' = V \cap X'$. Quindi V' è aperto in X' , intorno di p , e contenuto in U' . Sia B' la frontiera di V' in X' . Si ha quindi che $B' \subset B \cap X'$, e quindi per ipotesi, $\dim B' \leq n - 1$. Da cui la tesi. \square

Proposizione 1.11. *Sia X uno spazio metrico. Se $A, B \subset X$ sono due sottospazi di X , allora:*

$$\dim(A \cup B) \leq 1 + \dim A + \dim B.$$

Dimostrazione. La proposizione è ovvia nel caso $\dim A = \dim B = -1$. Siano ora $\dim A = m$ e $\dim B = n$. Si assume vera la proposizione per i casi

$$\dim A \leq m, \dim B \leq n - 1$$

$$\dim A \leq m - 1, \dim B \leq n.$$

Sia $p \in A \cup B$. Si può assumere $p \in A$ senza ledere la generalità. Sia U un intorno aperto di p in X . Poiché $\dim A = m$, esiste un intorno aperto $V \subset U$ di p tale che:

$$\dim(\partial V \cap A) \leq m - 1.$$

Siccome $\partial V \cap B \subset B$, e $\dim B = n$, si ha:

$$\dim(\partial V \cap B) \leq n.$$

Quindi, l'insieme $\partial V \cap (A \cup B)$ è contenuto in $(\partial V \cap A) \cup (\partial V \cap B)$, e per l'ipotesi induttiva:

$$\dim \partial V \cap (A \cup B) \leq m + n.$$

Poiché questo vale per ogni punto $p \in A \cup B$ e ogni suo intorno, segue per la definizione di dimensione di copertura che:

$$\dim(A \cup B) \leq m + n + 1.$$

□

Lemma 1.12. *Ogni spazio A di dimensione $\leq n$ è unione di un sottospazio di dimensione $\leq n - 1$ e di un sottospazio di dimensione ≤ 0 , ovvero:*

$$\dim A \leq n \Rightarrow A = M \cup N \text{ con } \dim M \leq n - 1 \text{ e } \dim N \leq 0. \quad (1.1)$$

Dimostrazione. Poiché $\dim A \leq n$, esiste una base di aperti di A composta da insiemi la cui frontiera ha dimensioni $\leq n - 1$. Siccome A è uno spazio metrico e separabile, allora esiste una base numerabile $\{U_i\}$ fatta di aperti la cui frontiera ha dimensione $\leq n - 1$. Segue quindi dalle ipotesi che l'unione di tutte le frontiere $M = \bigcup \partial U_i$ ha dimensione $\leq n - 1$. Si ha inoltre che le frontiere degli aperti U_i non intersecano il sottoinsieme $N = A \setminus M$, che pertanto risulta avere dimensione ≤ 0 . Considerando la decomposizione $A = M \cup (A \setminus M)$ si ottiene la proprietà. □

Teorema 1.13. *L'unione numerabile di insiemi chiusi di dimensione $\leq n$ ha dimensione $\leq n$.*

Dimostrazione. Il caso base con dimensione -1 risulta banale. Assumiamo per ipotesi che valga la proprietà per dimensioni $\leq n - 1$. Si considera $X = C_1 \cup C_2 \cup \dots$ con C_i chiuso di dimensione $\leq n$. e si vuole dimostrare che $\dim X \leq n$. Sia $K_1 = C_1$, e sia

$$K_i = C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j = C_i \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j).$$

Si hanno allora le seguenti proprietà:

1. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$,
2. $K_i \cap K_j$ per ogni $i \neq j$,
3. K_i è un F_σ in X ,
4. $\dim K_i \leq n$.

Le prime due sono immediate. Per dimostrare che K_i è un F_σ , ovvero è un'unione numerabile di chiusi in X , si considera che $X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ è un aperto in uno spazio metrico, e quindi un F_σ , e che l'intersezione di un chiuso e uno spazio F_σ è ancora uno spazio F_σ . L'ultima proprietà deriva dall'inclusione $K_i \subset C_i$. Per dimostrare il teorema si applica il lemma (1.1) ad ogni K_i : si ha così

$$K_i = M_i \cup N_i \quad \text{con} \quad \dim M_i \leq n - 1 \text{ e } \dim N_i \leq 0.$$

Si pone ora:

$$M = \bigcup_i M_i, \quad N = \bigcup_i N_i.$$

Allora $X = M \cup N$, e poiché ogni M_i è un F_σ in M in quanto uguale all'intersezione di M e K_i , si può applicare l'ipotesi induttiva per concludere:

$$\dim M \leq n - 1, \quad \dim N \leq 0,$$

utilizzando un'argomentazione analoga N_i . Si ha quindi che $X = M \cup N$ con M e N spazi di dimensione rispettivamente $\leq n - 1$ e ≤ 0 . Si conclude che $\dim X \leq 1 + \dim M + \dim N = n$. \square

Teorema 1.14. *Il prodotto topologico di due spazi A e B ha dimensione*

$$\dim(A \times B) \leq \dim A + \dim B.$$

Dimostrazione. Il caso base con A e B insiemi vuoti è banale. Siano $\dim A = m$

e $\dim B = n$ e si assume vera la proposizione per i casi

$$\dim A \leq m, \dim B \leq n - 1$$

$$\dim A \leq m - 1, \dim B \leq n.$$

Ogni punto $p = (a, b) \in A \times B$ ha intornoi arbitrariamente piccoli della forma $U \times V$, con $a \in U \subset A$ e $b \in V \subset B$. Si assume ora che le frontiere di U e V abbiano dimensione rispettivamente $\leq m - 1$ e $\leq n - 1$. Ora si osserva che

$$\partial(U \times V) = (\overline{U} \times \partial V) \cup (\partial U \times \overline{V}).$$

Ogni termine dell'unione è chiuso, e dalle ipotesi dell'induzione ha dimensione $\leq m + n - 1$. Utilizzando il precedente teorema si ha che anche la frontiera di $U \times V$ ha dimensione $\leq m + n - 1$. Da cui la tesi. \square

Proposizione 1.15. *Siano C_1 e C_2 due sottoinsiemi chiusi disgiunti di X . Sia A un sottospazio di X di dimensione $\leq n$, allora esiste un insieme chiuso B che separa C_1 e C_2 con dimensione $A \cap B \leq n - 1$.*

Dimostrazione. Se $\dim A = -1$ la proposizione è ovvia. Il caso $\dim A = 0$ è stato dimostrato nella proposizione 1.9. Sia quindi $\dim A = n > 0$. Si ha dalla (1.1), che $A = M \cup N$, con $\dim M \leq n - 1$, e $\dim N \leq 0$. Si può quindi ottenere una separazione di C_1 e C_2 tramite un insieme B disgiunto da N . Ottenendo così $A \cap B \subset M$. Infine basta osservare che $\dim A \cap B \leq \dim M \leq n - 1$ \square

Proposizione 1.16. *Sia X uno spazio di dimensione $\leq n - 1$, e siano C_i e C'_i , per $i = 1, \dots, n$, n coppie di chiusi disgiunti. Allora esistono n insiemi chiusi B_i tali da separare C_i e C'_i , e tali che $\bigcap B_i = \emptyset$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione ci si limiterà ad applicare più volte la proposizione precedente. Assumendo lo spazio $A = X$, si ha che esiste un chiuso B_1 che separa C_1 e C'_1 , di dimensione $\dim B_1 \leq n - 2$. Assumendo lo spazio $A = B_1$, si ha che esiste un chiuso B_2 che separa C_2 e C'_2 con dimensione $\dim B_1 \cap B_2 \leq n - 3$.

Iterando il processo si ottengono k chiusi B_i , che separano C_i e C'_i , e tali che $\dim \bigcap_{i=1}^k B_i \leq n - k - 1$. Per $k = n$ si ottiene la tesi. \square

Teorema 1.17 (Teorema del Punto Fisso di Brouwer). *Una funzione di una regione sferica chiusa $K^n \subset \mathbb{E}^n$ in se stessa ammette sempre un punto fisso, ovvero un punto $x \in K^n$ tale che $f(x) = x$.*

Dimostrazione. Una dimostrazione completa è presente nel libro *Dimension Theory* di W. Hurewicz e H. Wallman [3], sezione IV, paragrafo 1, proposizione C. \square

Col seguente teorema si proverà che la definizione di dimensione topologica è coerente con la dimensione dello spazio euclideo.

Teorema 1.18. *Lo spazio euclideo \mathbb{E}^n ha dimensione n .*

Dimostrazione. Dal teorema sulla dimensione del prodotto topologico si ha già la disuguaglianza $\dim \mathbb{E}^n \leq n$. Si vuole ora dimostrare la disuguaglianza opposta. Basterà dimostrare che $\dim \mathbb{E}^n \not\leq n - 1$. Studiamo in particolare il cubo I^n , ovvero l'insieme dei punti le cui n coordinate soddisfano $|x_i| \leq 1$. Definiamo inoltre una faccia C_i , l'insieme dei punti con coordinata $x_i = 1$, e C'_i la faccia opposta. Se per assurdo $\dim I^n \leq n - 1$, allora per la proposizione 1.16, dovrebbero esistere n sottospazi chiusi B_i , ognuno dei quali separa una differente coppia di facce opposte, con

$$\bigcap_i B_i = \emptyset. \quad (1.2)$$

Ovvero, per ogni i , esistono due insiemi aperti disgiunti U_i e U'_i , contenenti rispettivamente C_i e C'_i , tali che:

$$I^n \setminus B_i = U_i \cup U'_i.$$

Si procede per assurdo. Per ogni punto $x \in I^n$, si definisce un vettore $v(x)$, la cui i -esima componente è la distanza tra x e B_i , presa con segno positivo se $x \in U'_i$, e segno negativo se $x \in U_i$. Posizioniamo il vettore $v(x)$ con punto iniziale in x , e definiamo la funzione $f : I^n \rightarrow I^n$ tale che $f(x) = x + v(x)$. La funzione f è ben definita e continua. Poiché I^n è compatto e convesso, si può applicare il Teorema

del Punto Fisso di Brouwer 1.17, ottenendo l'esistenza di un punto $x^0 \in I^n$ tale che $f(x^0) = x^0$. Ne segue che $d(x^0, B_i) = 0$ per ogni i . Pertanto $x^0 \in \bigcup_i B_i$. Questo contraddice la (1.2). Si conclude dunque per assurdo. Infine, poiché I^n è un sottospazio di \mathbb{E}^n e si è dimostrato che la sua dimensione topologica è almeno n , si ottiene la tesi. \square

Capitolo 2

Misura e dimensione di Hausdorff

In questo capitolo si forniranno le definizioni di misura e di dimensione di Hausdorff e le relazioni tra questa notazione di dimensione, e la dimensione topologica.

2.1 Misura di Hausdorff

In questa sezione ci si concentrerà sull'analisi della misura di Hausdorff, limitando la trattazione ai sottospazi dello spazio euclideo \mathbb{R}^n .

Definizione 2.1. Sia U sottoinsieme di \mathbb{R}^n non vuoto. Si definisce *diametro* di U

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Sia F un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $\forall \delta \in \mathbb{R}$ si definisce δ -*ricoprimento* di F una qualunque famiglia numerabile di insiemi $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $F \subset \bigcup_n U_n$, e il diametro di ogni elemento è minore o uguale a δ .

Definizione 2.2. Sia F un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . F è detto *insieme di Borel* se F è aperto, unione o intersezione numerabile di insiemi di Borel, o insieme complementare di un insieme di Borel

Definizione 2.3. Sia F un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , siano $s \geq 0$, $\delta > 0$. Definiamo la quantità

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ } \delta\text{-ricoprimento di } F \right\}.$$

E definiamo la *misura di Hausdorff s -dimensionale* dell'insieme F

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Osservazione 2.4. Si può verificare che la misura così enunciata sia ben definita. Si deve dimostrare che

1. La misura dell'insieme vuoto deve essere uguale a zero.
2. Se $E \subset F$, allora $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.
3. Per ogni famiglia di sottoinsiemi misurabili $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, la misura dell'unione dei sottoinsiemi è minore o uguale alla somma delle misure dei sottoinsiemi $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$. Inoltre vale l'uguaglianza se le F_i sono disgiunte.

Dimostrazione. Il punto 1. segue ovviamente dalla definizione.

Per il punto 3. si dimostrerà dapprima la disuguaglianza, e poi l'uguaglianza stretta nel caso le F_i siano disgiunte. Si considerano i ricoprimenti delle F_i , $\{U_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Quindi l'unione dei vari ricoprimenti è un ricoprimento dell'unione delle F_i , $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subset \bigcup_{i,j} U_{i,j}$, e risulta immediato che

$$\inf \sum_{i,j=1}^{\infty} |U_{i,j}|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \inf \sum_{j=1}^{\infty} |U_{i,j}|^s$$

da cui la disuguaglianza. Mentre le proprietà finora enunciate sono valide per ogni insieme $F \subset \mathbb{R}^n$, per dimostrare l'uguaglianza sarà necessario considerare F_i insieme di Borel. Si può mostrare, infatti, che essendo la misura di Hausdorff una *misura esterna di Caratheodory*, risulta essere una misura sugli insiemi di Borel. Per dimostrare che la misura di Hausdorff sia una *misura esterna di Caratheodory*, si deve dimostrare che per ogni famiglia di sottoinsiemi disgiunti di \mathbb{R}^n , distanziati

tra loro di almeno un $\varepsilon > 0$, ovvero tali che

$$\inf\{|x - y| : x \in E_i, y \in E_j\} = \varepsilon > 0 \quad \forall i \neq j.$$

Allora vale l'uguaglianza tra misura dell'unione e somma delle misure.

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i).$$

Per dimostrarlo basta considerare che ogni U elemento di un ricoprimento di E_i o di E_j , avrà diametro limitato, in particolare per $\delta \rightarrow 0$ si ha $|U| < \delta < \varepsilon$, e quindi non esisterà nessun aperto appartenente ad entrambi i ricoprimenti di E_i e di E_j . Vale quindi l'uguaglianza.

Il punto 2. si può dimostrare osservando che se $E \subset F$, allora si può scrivere

$$F = E \cup (F \setminus E),$$

dove l'unione è disgiunta. Applicando il punto 3. si ottiene

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F \setminus E) \geq \mathcal{H}^s(E).$$

□

Osservazione 2.5. Nel caso $s = n \in \mathbb{N}$ la misura di Hausdorff coincide con la misura di Lebesgue n -dimensionale. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme di Borel, allora

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F)$$

con c_n volume di una n -boccia di diametro 1.

Osservazione 2.6. Si osserva che la misura di Hausdorff 0-dimensionale di uno spazio corrisponde al numero di punti in esso contenuti.

Proposizione 2.7. Sia S una similitudine con rapporto di similitudine $\lambda > 0$. Sia F sottoinsieme di \mathbb{R}^n , allora $\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ un δ -ricoprimento di F , allora si ha che $\{S(U_i)\}$ è un $\lambda\delta$ -ricoprimento di $S(F)$, quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \Rightarrow \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$$

e, passando al limite per delta che tende a zero, $\mathcal{H}^s(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta basta considerare la similitudine $S' = S^{-1}$, $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, $F' = S(F)$. \square

Proposizione 2.8. *Sia F un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e f una funzione definita su F con valori in \mathbb{R}^n tale che, fissate delle costanti $c, \alpha > 0$, per ogni $x, y \in F$*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Allora, per ogni $s > 0$,

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ un δ -ricoprimento di F allora

$$|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha \leq c\delta^\alpha,$$

e quindi $\{f(F \cap U_i)\}$ è un ε -ricoprimento di $f(F)$ con $\varepsilon = c\delta^\alpha$. Inoltre utilizzando la precedente disequazione, in particolare osservando il primo e il terzo membro, si ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

e passando all'estremo inferiore si ottiene $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$. Osservando che $\varepsilon \rightarrow 0$ per $\delta \rightarrow 0$ si ha la tesi. \square

2.2 Dimensione di Hausdorff

Dopo aver introdotto la misura di Hausdorff, si definisce ora la relativa nozione di dimensione, che estende la dimensione topologica a insiemi anche molto irregolari

o frammentati.

Osservazione 2.9. Per ogni sottoinsieme F di \mathbb{R}^n , per ogni $\delta < 1$, si ha che $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ è non crescente in funzione di s . Si può facilmente vedere che

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Se quindi $\mathcal{H}^s(F)$ è limitato, allora $\mathcal{H}^t = 0$ per ogni $t > s$. Esiste quindi un unico \bar{s} tale che $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ per ogni $s < \bar{s}$ e $\mathcal{H}^t(F) = 0$ per ogni $t > \bar{s}$.

Definizione 2.10. Chiamiamo tale s *dimensione di Hausdorff* $= \dim_{\mathcal{H}} F$. Ovvero

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}.$$

In particolare, un insieme di Borel F con dimensione di Hausdorff s viene detto *s-insieme* se ha misura finita non nulla: $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Proposizione 2.11. *Si enunciano alcune proprietà della dimensione di Hausdorff:*

1. Monotonia: Se $E \subset F \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}} E \leq \dim_{\mathcal{H}} F$.
2. Stabilità nel numerabile: Se $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ famiglia numerabile di insiemi, allora

$$\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_{\mathcal{H}} F_i.$$

3. Insiemi numerabili: Se F numerabile, allora $\dim_{\mathcal{H}} F = 0$.
4. Insiemi aperti: Se $F \subset \mathbb{R}^n$ aperto, allora $\dim_{\mathcal{H}} F = n$.

Dimostrazione. 1. Segue immediatamente da $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F) \forall s$.

2. $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_{\mathcal{H}} F_j$ per ogni j , ma se $s > \dim_{\mathcal{H}} F_i$ per ogni i , allora la misura di Hausdorff s -dimensionale è nulla per ogni F_i , e quindi sarà nullo anche il sup.

3. Segue immediatamente dalla precedente e dal fatto che $\dim_{\mathcal{H}} \{x\} = 0$.

4. F contiene una n -boccia, quindi $\dim_{\mathcal{H}} F \geq n$, ma allo stesso tempo esiste un ricoprimento numerabile di n -bocce di F , e quindi $\dim_{\mathcal{H}} F \leq n$, da cui l'uguaglianza.

□

Lemma 2.12. *Sia X uno spazio metrico di dimensione topologica n , sia x_0 un punto di X . Per ogni $r > 0$ sia $S(x_0, r)$ la frontiera della boccia $B(x_0, r)$. Se $\mathcal{H}^{p+1}(X) = 0$, allora per quasi ogni r (ovvero a meno di un insieme di misura di Lebesgue nulla) la misura p -dimensionale degli insiemi $S(x_0, r)$ è zero.*

Dimostrazione. Sia E un sottoinsieme di X . Siano r_1 e r_2 rispettivamente la minima e la massima distanza di E da x_0 , ovvero

$$r_1 = \inf_{x \in E} d(x, x_0), \quad r_2 = \sup_{x \in E} d(x, x_0).$$

Dalla disuguaglianza triangolare si ha $r_2 - r_1 \leq |E|$. Da cui

$$\int_0^\infty |S(x_0, r) \cap E|^p dr = \int_{r_1}^{r_2} |S(x_0, r) \cap E|^p dr \leq |E|^p \int_{r_1}^{r_2} dr \leq |E|^{p+1}. \quad (2.1)$$

Per le ipotesi abbiamo che per ogni δ -ricoprimento di X , $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{p+1} \leq \mathcal{H}^{p+1}(X) = 0.$$

Da cui, considerando la disequazione (2.1), e sostituendo E con U_i , si ha

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty |S(x_0, r) \cap U_i|^p dr = 0.$$

È ora possibile scambiare l'integrale e la sommatoria e osservare che, poiché l'integrale si annulla e l'integrando è sempre positivo, il limite dell'integrando risulta

essere uguale a zero quasi ovunque. Ovvero si ha

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} |S(x_0, r) \cap U_i|^p = 0$$

per quasi ogni r . Per cui $\mathcal{H}^p(S(x_0, r)) = 0$ per quasi ogni r . \square

Proposizione 2.13. *Sia X uno spazio metrico di dimensione topologica n , allora $\mathcal{H}^n(X) > 0$*

Dimostrazione. Basterà dimostrare che, se $\mathcal{H}^{n+1}(X) = 0$, allora X ha dimensione $\leq n$. Possiamo dimostrare questa proprietà tramite induzione partendo dal caso base in cui un insieme ha misura di Hausdorff 0-dimensionale nulla se e solo se è l'insieme vuoto (e quindi dimensione topologica -1). Dal lemma 2.12 si ha che per ogni punto, quasi ogni intorno sferico (e quindi ogni intorno arbitrariamente piccolo) ha misura p -dimensionale nulla, e quindi, per induzione, dimensione topologica $\leq p - 1$. Da cui, per la definizione, X ha dimensione topologica $\leq p$. \square

Proposizione 2.14. *Dalla proposizione precedente segue che $\dim_{\mathcal{H}}(X) \geq \dim(X)$.*

Proposizione 2.15. *Sia F sottoinsieme di \mathbb{R}^n , e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione che soddisfa le condizioni di Hölder con costanti $0 < \alpha < 1$ e $c > 0$, ovvero tale che :*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in F.$$

Allora la dimensione di Hausdorff dell'immagine è limitata superiormente da:

$$\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq 1/\alpha \dim_{\mathcal{H}} F.$$

Dimostrazione. Se $s > \dim_{\mathcal{H}} F$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0 \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq s/\alpha \quad \forall s > \dim_{\mathcal{H}} F$$

E passando all'inf si dimostra la proposizione. \square

Proposizione 2.16. *1. Se f è Lipschitziana, allora $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \dim_{\mathcal{H}} F$.*

2. Se f è bi-Lipschitziana, allora $\dim_{\mathcal{H}} f(F) = \dim_{\mathcal{H}} F$.

Dimostrazione. 1. Direttamente dalla proposizione precedente.

2. Si ottiene applicando la proposizione a $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$.

In particolare si osserva che la dimensione di Hausdorff è invariante per trasformazioni bi-Lipschitziane. \square

Proposizione 2.17. *Sia $F \subset \mathbb{R}^n$, $\dim_{\mathcal{H}} F < 1$, allora F è totalmente disconnessa.*

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione basta considerare che se $\dim_{\mathcal{H}} F < 1$, allora la dimensione topologica, che è minore della dimensione di Hausdorff, dovrà essere zero o meno uno. Scartando il caso banale di F uguale all'insieme vuoto, otteniamo che F ha dimensione topologica zero, e risulta pertanto totalmente disconnessa. \square

Esempio 2.18. Calcolo della dimensione e della misura di Hausdorff dell'insieme di Cantor

Primo metodo: definiamo F l'insieme di Cantor come l'unione di due copie di insiemi di Cantor lunghe un terzo. Abbiamo quindi per la linearità che

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = 2(1/3)^s \mathcal{H}^s(F)$$

E, assumendo F un s -insieme, troviamo $3^s = 2$, e quindi

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) = \log(2)/\log(3)$$

Secondo metodo: consideriamo la costruzione ricorsiva dell'insieme di Cantor: ogni passaggio C_k consiste in 2^k intervalli, ognuno dei quali è lungo 3^{-k} . Si ha allora che l'insieme degli intervalli al passaggio k corrisponde ad un 3^{-k} -ricoprimento di F , composto da 2^k elementi. Quindi $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$ considerando $s = \dim_{\mathcal{H}} F = \log(2)/\log(3)$.

Vogliamo ora dimostrare

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

Considerando un ricoprimento $\{U_i\}$ tale che

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}$$

per ogni U_i . Abbiamo quindi che ogni elemento del ricoprimento interseca al massimo un intervallo di C_k , in quanto tutti gli intervalli sono distanti almeno 3^{-k} , e al massimo 2^{j-k} intervalli di C_j . Possiamo quindi notare che il numero totale di intervalli di C_j è minore o uguale alla somma degli intervalli intersecati dai vari U_i , si ha quindi

$$2^j \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{j-k} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^j 3^{-sk} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^j (3^{1-(k+1)})^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^j 3^s |U_i|$$

Otteniamo così la disequazione (2.2), valida per ogni k , e quindi per ogni δ -ricoprimento, per $\delta \rightarrow 0$.

Si ha così dimostrato che l'insieme di Cantor ha $\dim_{\mathcal{H}} = \log(2)/\log(3)$ e misura compresa tra $1/2$ e 1 .

Proposizione 2.19. *È possibile definire misure analoghe alla misura di Hausdorff tramite le bocce sferiche:*

$$\mathcal{B}_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \{B_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di bocce aperte} \right\}$$

$$\mathcal{B}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{B}_{\delta}^s(F) = \mathcal{H}^s(F)$$

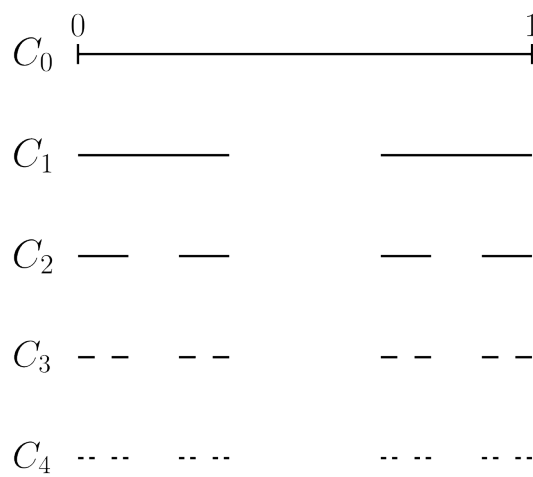


Figura 2.1: Primi passi del processo ricorsivo per la costruzione dell'insieme di Cantor.

Capitolo 3

Spazi auto-simili

In questo capitolo verranno introdotti i Sistemi di Funzioni Iterate (SFI), uno strumento fondamentale per la costruzione e l'analisi di strutture auto-simili. Prima di definire formalmente tali sistemi, verranno presentati i concetti di alfabeto e linguaggio, che forniscono il contesto simbolico utile a descrivere in modo ordinato e compatto le iterazioni applicate. Nella seconda parte del capitolo si analizzeranno le proprietà principali dei SFI, mostrando come essi permettano di definire in maniera naturale insiemi auto-simili e di calcolarne caratteristiche geometriche rilevanti, come la dimensione.

3.1 Spazi Simbolici

Per comprendere appieno la natura iterativa e codificata dei SFI, è utile introdurre formalmente il concetto di spazio simbolico, che fornisce una rappresentazione discreta delle sequenze di trasformazioni applicate.

Definizione 3.1. Si definisce *alfabeto* un insieme finito di simboli, denotato con \mathcal{A} , i cui elementi sono detti *lettere*.

Una *sequenza infinita* di lettere dell'alfabeto è una successione $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dove $\omega_i \in \mathcal{A}$ per ogni i . L'insieme di tutte le sequenze infinite su \mathcal{A} si denota con $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Una *parola*, o *blocco*, è una sequenza finita di lettere appartenenti a \mathcal{A} . L'insieme

delle parole di lunghezza n si indica con \mathcal{A}^n , mentre l'unione di tutte le parole finite di qualsiasi lunghezza, è detto *linguaggio* associato all'alfabeto, ed è denotato con

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n.$$

Per ogni parola finita $w = (w_1, \dots, w_k) \in \mathcal{A}^k$, si definisce il *cilindro* associato a w come l'insieme

$$[w] = \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \omega_1 = w_1, \dots, \omega_k = w_k\}.$$

Lo *spazio simbolico* associato all'alfabeto \mathcal{A} è l'insieme $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dotato della topologia generata dalla famiglia di cilindri $[w]$, per ogni parola $w \in \mathcal{A}^*$.

Osservazione 3.2. Se \mathcal{A} è un alfabeto con almeno due simboli, allora lo spazio simbolico associato $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ è:

- Compatto;
- A dimensione topologica zero (e quindi totalmente disconnesso);
- perfetto (cioè senza punti isolati).

Dimostrazione. Compattezza. Si considera $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ come il prodotto topologico infinito di copie di \mathcal{A} , ciascuna dotata di topologia discreta. Poiché \mathcal{A} è finito, è compatto. Per il teorema di Tychonoff, il prodotto arbitrario di spazi compatti è compatto.

Dimensione zero. La base della topologia prodotto su $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ è data dai cilindri $[w]$, dove $w \in \mathcal{A}^*$. Tali insiemi sono, per definizione, aperti. Si dimostra ora che sono anche chiusi, ovvero che la loro chiusura soddisfa $\overline{[w]} \subset [w]$. Sia $[w]$ un cilindro, con $w \in \mathcal{A}^k$, e sia $\omega \in \overline{[w]}$. Allora ogni intorno aperto di ω interseca $[w]$. Si considera un cilindro $[v]$ contenente ω , dove $v = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, per qualche $m \geq k$. Poiché $\omega \in \overline{[w]}$, si ha $[v] \cap [w] \neq \emptyset$. Sia $\xi \in [v] \cap [w]$. Allora ξ ha come prefissi sia v che w . In particolare i primi k simboli di v devono coincidere con quelli di w , e pertanto deve valere $[v] \subset [w]$. Segue che $\omega \in [w]$ per ogni $\omega \in \overline{[w]}$, e quindi:

$$\overline{[w]} = [w].$$

Per l'osservazione 1.6, ciò implica che lo spazio ha dimensione topologica zero. Inoltre, per l'osservazione 1.8), ogni spazio di dimensione zero è totalmente sconnesso.

Perfezione. Sia $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ e sia $[w]$ un cilindro contenente ω , con $w \in \mathcal{A}^k$. Poiché \mathcal{A} contiene almeno due lettere, è possibile modificare almeno un termine della sequenza dopo la posizione k , ottenendo così una nuova sequenza $\omega' \in [w]$, con $\omega' \neq \omega$. Pertanto, ogni intorno aperto di ω contiene almeno un punto distinto da ω . Quindi nessun punto è isolato, e lo spazio è perfetto. \square

Definizione 3.3. Nel contesto dei Sistemi di Funzioni Iterate, si lavora frequentemente con composizioni di funzioni indicizzate, denotate come $\{S_i\}_{i \in \mathcal{A}}$. Per una parola finita $w = (w_1, \dots, w_k) \in \mathcal{A}^k$, si indicherà con:

$$E_w = E_{w_1, \dots, w_k} = S_{w_1} \circ \dots \circ S_{w_k}(E),$$

l'immagine dell'insieme E tramite la composizione ordinata delle funzioni S_{w_i} corrispondenti agli indici della parola w .

Per una parola infinita $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, si definisce invece:

$$E_\omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{\omega_1} \circ S_{\omega_2} \circ \dots \circ S_{\omega_k}(E),$$

il limite della sequenza decrescente di insiemi annidati ottenuta applicando iterativamente le funzioni secondo la sequenza infinita ω .

3.2 Sistemi di Funzioni Iterate

Introdotta la notazione simbolica, si può ora definire formalmente i Sistemi di Funzioni Iterate (SFI), i quali consentono di costruire, tramite un processo iterativo, insiemi caratterizzati da proprietà di auto-similitudine.

Definizione 3.4. Sia D un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^n , $S : D \rightarrow D$ viene detto

contrazione se

$$\exists c \in (0, 1) : |S(x) - S(y)| \leq c|x - y| \quad \forall x, y \in D.$$

S viene detta *similitudine contrattiva* se

$$\exists c \in (0, 1) : |S(x) - S(y)| = c|x - y|.$$

$\{S_1, \dots, S_n\}$ con $n \geq 2$ viene detto *sistema di funzioni iterate* (SFI) se S_i è una contrazione $\forall i$.

Definizione 3.5. Siano A e B due sottoinsiemi di D .

Si definisce δ -intorno di A , l'insieme dei punti distanti meno di δ da A , ovvero l'insieme

$$A_\delta = \{x \in D : \inf_{a \in A} |x - a| \leq \delta\}.$$

Si definisce *distanza di Hausdorff* $d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\}$ con A_δ e B_δ δ -intorni rispettivamente di A e B .

Osservazione 3.6. Si può verificare che la distanza sia ben definita.

Dimostrazione. i La distanza tra due insiemi è sempre non negativa, in particolare è uguale a zero se e solo se i due insiemi sono uguali.

ii La distanza è simmetrica, ovvero $d(A, B) = d(B, A)$.

iii Deve valere la disuguaglianza triangolare:

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Basta considerare $\delta_1 = d(A, C)$ e $\delta_2 = d(C, B)$. Si ottengono così le seguenti inclusioni: $B \subset C_{\delta_2} \subset A_{\delta_2 + \delta_1}$ e $A \subset C_{\delta_1} \subset B_{\delta_1 + \delta_2}$. Da cui la tesi.

□

3.3 Attrattori di SFI

In questa sezione verrà presentata la definizione di attrattore di un Sistema di Funzioni Iterate. Verranno inoltre esaminate alcune proprietà fondamentali, tra cui l'esistenza, l'unicità e il calcolo della dimensione di Hausdorff.

Definizione 3.7. Si definisce un *attrattore* (o insieme invariante) un

$$F \subset D : F = \bigcup_{i=1}^n S_i(F)$$

Teorema 3.8. Sia $\{S_1, \dots, S_m\}$ un sistema di funzioni iterate su un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$, dove ogni funzione $S_i : D \rightarrow D$ è contrattiva con rapporto di contrazione c_i tale che

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad \forall x, y \in D.$$

Allora esiste un unico attrattore dell'IFS F , tale che

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Inoltre se si definisce una mappa $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, definita nell'insieme \mathcal{S} dei sottoinsiemi compatti non vuoti di D , ponendo

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E),$$

l'attrattore F è anche il limite dell'iterazione di S , ovvero

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E),$$

per ogni $E \in \mathcal{S}$ tale che $S_i(E) \subset E$ per ogni i .

Dimostrazione. Vengono di seguito proposte due dimostrazioni al precedente teorema:

Prima dimostrazione Siccome ogni S_i è continua, conserva la compattezza, e siccome un'unione finita di compatti è compatta, si ha che anche S conserva la compattezza. Quindi dominio e codominio di S coincidono con \mathcal{S} , ed è quindi ben definito il processo di iterazione. Ora è facile verificare che S abbia rapporto di contrazione pari a $\max_{1 \leq i \leq m} c_i$. Basterà considerare che lo spazio \mathcal{S} dotato di distanza d è completo, in quanto per ogni punto dello spazio esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(x, \varepsilon)}$ è compatta. Si ha così che S è una contrazione in uno spazio completo, ed è possibile applicare il teorema del punto fisso, che afferma

$$\exists! F \in \mathcal{S} : S(F) = F,$$

e in particolare

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E) = F \quad \forall E.$$

Seconda dimostrazione Sia $E \in \mathcal{S} : S_i(E) \subset E$ per ogni i , e tale che $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$, generando così una successione decrescente di compatti non vuoti. Si definisce quindi

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E), \quad (3.1)$$

compatto non vuoto. Dalla definizione si ha che $S(F) = F$ e che quindi F è un attrattore. Ora per dimostrare l'unicità viene posta per assurdo l'esistenza di due attrattori distinti A e B . Si avrà

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i \right) d(A, B) < d(A, B).$$

Da cui l'unica possibilità sarebbe $d(A, B) = 0$ ottenendo così l'assurdo.

□

Definizione 3.9. È quindi possibile usare $\{S_i\}_{i \in \mathcal{A}}$, con $\mathcal{A} = \{1, \dots, m\}$ per computare gli attrattori di un SFI. Se F è l'attrattore del sistema, allora per ogni

insieme compatto E , le immagini iterate

$$S^k(E) = \bigcup_{w \in \mathcal{A}^k} E_w$$

costituiscono approssimazioni sempre più accurate di F al crescere di k , e sono dette *prefrattali di F* .

Inoltre, se per ogni $i \in \mathcal{A}$ vale $S_i(E) \subset E$, allora, per ogni parola infinita $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, l'insieme

$$E_\omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{\omega_1} \circ \cdots \circ S_{\omega_k}(E)$$

è non vuoto, in quanto intersezione numerabile di compatti non vuoti, e ha diametro zero. In tal caso, E_ω contiene un unico punto. Ne segue, dalla (3.1), che ogni punto $x \in F$ può essere associato ad almeno una parola $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tale che $x = x_\omega = E_\omega$. Questa rappresentazione non è necessariamente unica, e risulta indipendente dall'insieme iniziale E scelto. Per ogni parola finita $w \in \mathcal{A}^k$, si definisce *insieme di livello k* il sottoinsieme

$$E_{[w]} = \{x_\omega : \omega \in [w]\} = E_w.$$

Infine, l'attrattore F può essere descritto come unione dei punti codificati dalle parole infinite:

$$F = \bigcup_{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{\omega_1} \circ \cdots \circ S_{\omega_k}(E) = \bigcup_{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}} E_\omega = \bigcup_{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}} \{x_\omega\}.$$

Definizione 3.10. Sia F un attrattore di un SFI. F è detto *insieme auto-simile* se tutte le S_i del SFI sono similitudini. Si dice che $\{S_i\}$ soddisfa le *condizioni di insieme aperto* se esiste un aperto limitato non vuoto V , tale che $S_i(V)$ sono tutti disgiunti e $\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V$.

Definizione 3.11. Si definisce *distribuzione di massa* una misura μ con supporto contenuto in un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n , e per cui

$$0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Teorema 3.12 (Principio di distribuzione di massa). *Sia μ una distribuzione di massa definita su un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$, tale che $\mu(F) > 0$. Se esistono costanti $N > 0$, $s > 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che*

$$\mu(U) \leq N|U|^s$$

per ogni insieme U con $|U| \leq \varepsilon$. Allora $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/N$ e

$$s \leq \dim_{\mathcal{H}} F \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F).$$

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ una famiglia di insiemi che ricopre F , allora

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq N \sum_i |U_i|^s$$

usando le proprietà delle misure e l'ipotesi. Passando all'estremo inferiore, si ottiene $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \mu(F)/N$ per ogni δ sufficientemente piccolo, quindi $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/N$. Siccome $\mu(F) > 0$ otteniamo che $\dim_{\mathcal{H}} F \geq s$. \square

Lemma 3.13. *Siano $\{V_i\}$ aperti disgiunti in \mathbb{R}^n , tali che per ogni V_i esistono una boccia di raggio $a_1 r$ contenuta in V_i e una boccia di raggio $a_2 r$ contenente V_i . Allora ogni boccia B di raggio r interseca al massimo $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ chiusi $\overline{V_i}$.*

Dimostrazione. Se $\overline{V_i}$ interseca B , allora è contenuto in una boccia concentrica con B di raggio $(1 + 2a_2)r$. Supponendo che N diversi insiemi $\overline{V_i}$ intersechino B . Allora, sommando i volumi delle bocce interne di raggio $a_1 r$, segue che

$$N(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$$

.

\square

Teorema 3.14. *Sia SFI un sistema di funzioni iterate di similitudini S_i su \mathbb{R}^n , che soddisfano le condizioni di insieme aperto, con fattori di contrazione $0 < c_i < 1$ per $1 \leq i \leq m$. Sia F l'attrattore del SFI. Allora $\dim_{\mathcal{H}}(F) = \dim_B(F) = s$, con \dim_B la dimensione ottenuta usando la distanza di Hausdorff solo con bocce aperte, e s*

tale che

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1. \quad (3.2)$$

Inoltre, per questo valore di s , $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, m\}$ l'alfabeto associato al SFI. Si osserva che dalla definizione di attrattore, segue che l'attrattore è uguale a

$$F = \bigcup_{w \in \mathcal{A}^k} F_w.$$

Ora si verifica, assumendo s tale da soddisfare la (3.2), che questa famiglia di funzioni permette di porre un estremo superiore alla misura di Hausdorff s -dimensionale di F .

$$\sum_{w \in \mathcal{A}^k} |F_w|^s = \sum_{w \in \mathcal{A}^k} (c_{w_1} \dots c_{w_k})^s |F|^s = \left(\sum_{w_1 \in \mathcal{A}} c_{w_1}^s \right) \dots \left(\sum_{w_k \in \mathcal{A}} c_{w_k}^s \right) |F|^s = |F|^s.$$

Per ogni $\delta > 0$, si sceglie k sufficientemente grande tale che $|F_w| \leq (\max_i c_i)^k |F| \leq \delta$, con $w \in \mathcal{A}^k$, da cui $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ e infine $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$.

Ora si cercherà un estremo inferiore. Si definisce una distribuzione di massa μ su $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ tale che per ogni $w \in \mathcal{A}^k$

$$\mu([w]) = (c_{w_1} \dots c_{w_k})^s.$$

E osservare che $\mu(\mathcal{A}^\mathbb{N}) = 1$. Si può ora trasferire μ , in una distribuzione di massa $\tilde{\mu}$ su F , definendo $\tilde{\mu}(A) = \mu\{\omega \in \mathcal{A}^\mathbb{N} | x_\omega \in A\}$ per ogni A sottoinsieme di F . Mostriamo ora che $\tilde{\mu}$ soddisfa le condizioni del principio di distribuzione di massa.. Sia V l'insieme per cui S_i soddisfano il criterio di insieme aperto. Siccome $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$, la sequenza decrescente di iterate $S^k(\bar{V})$ converge a F . Sia B una boccia di raggio $r < 1$. Stimiamo $\tilde{\mu}(B)$ considerando gli insiemi V_{i_1, \dots, i_k} la cui chiusura interseca $F \cap B$. Si riduce ogni parola infinita $\omega \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ al primo termine ω_k tale che

$$\left(\min_{1 \leq i \leq m} c_i \right) r \leq c_{\omega_1} c_{\omega_2} \dots c_{\omega_k} \leq r. \quad (3.3)$$

Viene definito Q , l'insieme di tutte le parole finite così ottenute. Si osserva che la famiglia $\{V_q | q \in Q\}$ è disgiunta, in quanto per ogni parola finita w , le $S_i(V_w)$ sono disgiunte per ogni i . Inoltre, poiché $F \subset \bar{V}$, si ha

$$F \subset \bigcup_{q \in Q} F_q \subset \bigcup_{q \in Q} \bar{V}_q.$$

Si scelgono ora a_1, a_2 tali che V contiene una boccia di raggio a_1 ed è contenuto in una boccia di raggio a_2 . Quindi, per ogni $q \in Q$, l'insieme V_q contiene una boccia di raggio $c_{w_1} \dots c_{w_k} a_1$ e quindi una di raggio $(\min_i c_i) a_1 r$ per la scelta di k (3.3), ed è contenuto in una boccia di raggio $c_{w_1} \dots c_{w_k} a_2$ e quindi in una boccia di raggio $a_2 r$. Sia Q_1 la famiglia delle sequenze in Q tali che B interseca \bar{V}_q . Dal lemma 3.13 ci sono al più $N = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ sequenze in Q_1 . Allora

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) = \mu\{\omega : x_\omega \in F \cap B\} \leq \mu\left(\bigcup_{q \in Q_1} [q]\right).$$

Quindi

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{q \in Q_1} \mu([q]) = \sum_{q \in Q_1} (c_{q_1} \dots c_{q_k})^s \leq \sum_{q \in Q_1} r^s \leq N r^s.$$

Siccome ogni insieme U con diametro < 1 è contenuto in una boccia di raggio < 1 , si ha

$$\tilde{\mu}(U) \leq N |U|^s.$$

Di conseguenza, applicando il principio della distribuzione di massa, si ottiene che $\mathcal{H}^s(F) \geq N^{-1} > 0$. Si ha così che la misura s -dimensionale è compresa tra q^{-1} e $|F|^s$ e che quindi $\dim_{\mathcal{H}}(F) = s$.

Segue inoltre, ancora dal principio di distribuzione della massa, che

$$s = \dim_{\mathcal{H}}(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F).$$

Si osserva che, poiché Q è chiuso rispetto a permutazioni delle lettere,

$$\sum_{q \in Q} (c_{q_1} \dots c_{q_k})^s = 1.$$

Quindi, utilizzando la prima disuguaglianza della (3.3), si ha che Q contiene al massimo $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ parole finite. Per ogni parola $q \in Q$ vale inoltre la seguente disuguaglianza $|\overline{V}_q| \leq r|\overline{V}|$. Quindi F può essere ricoperto da $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ bocce di diametro $r|\overline{V}|$ per ogni $r < 1$. Segue quindi che s limita superiormente la dimensione di F secondo le bocce, aggiungendo alla serie di disequazioni precedente, $\overline{\dim}_B(F) \leq s$. Si ottiene così l'uguaglianza tra dimensione di Hausdorff e dimensione secondo le bocce. \square

Definizione 3.15. Un metodo comune per la costruzione di insiemi auto-simili, in particolare nel caso di curve, consiste nell'utilizzo di un *generatore*: un insieme di segmenti consecutivi con due punti estremi specificamente identificati. A ciascun segmento del generatore si associa una similitudine che invia i due punti estremi ai capi del segmento stesso. Iterando questo processo, cioè sostituendo ogni segmento con una copia simile del generatore mediante le corrispondenti trasformazioni, si ottiene una successione di insiemi che converge verso l'attrattore del Sistema di Funzioni Iterato (SFI) così definito.

Esempio 3.16 (Curva di Von Koch modificata). Uno degli esempi più noti di curva auto-simile ottenuta tramite un generatore è la curva di von Koch. Si parte da un segmento di lunghezza unitaria, che funge da segmento iniziale. Il generatore è costituito da quattro segmenti consecutivi, ciascuno lungo un terzo rispetto al segmento originale: i due segmenti iniziale e finale sono allineati con quello di partenza, mentre i due centrali formano un triangolo equilatero sporgente verso l'esterno. Si definisce così un sistema di quattro similitudini $\{S_i\}_{i=1}^4$, ognuna con rapporto di similitudine $c_i = \frac{1}{3}$. La curva risultante è l'attrattore del corrispondente Sistema di Funzioni Iterate. La dimensione di Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(K) = s$ di tale curva è data dalla soluzione dell'equazione:

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 3^{-s} = 1 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Pertanto, la curva di von Koch ha dimensione di Hausdorff pari a $\dim_{\mathcal{H}}(K) = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619$.

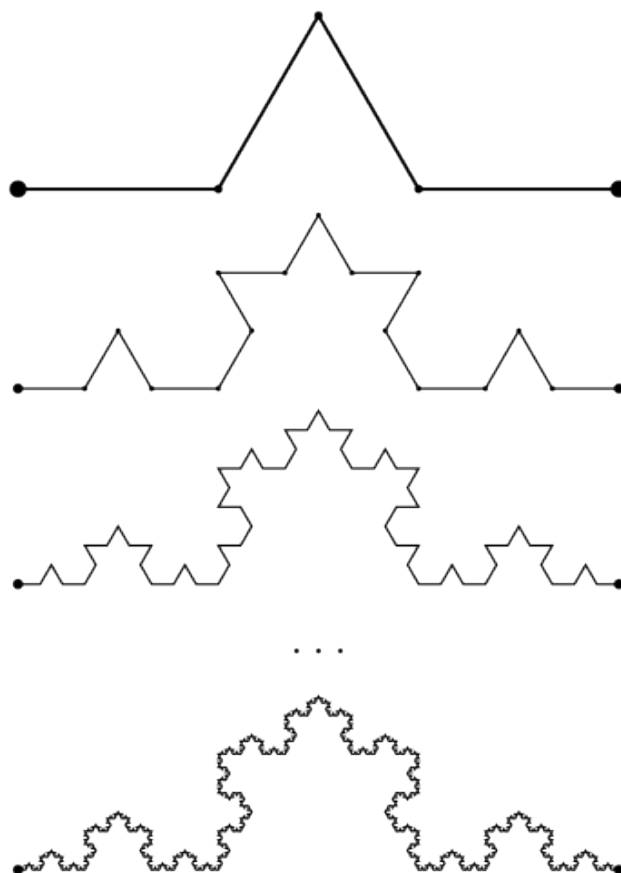


Figura 3.1: Curva di Von Koch ottenuta tramite generatore.

È possibile costruire varianti della curva di von Koch modificando opportunamente il generatore. Ad esempio si possono considerare segmenti lunghi $\frac{2}{5}$ rispetto al segmento originale. Il nuovo sistema di similitudini sarà dunque costituito da quattro trasformazioni con rapporto $\frac{2}{5}$. La dimensione di Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(K') = s$ dell'attrattore corrispondente soddisfa l'equazione:

$$4\left(\frac{2}{5}\right)^s = 1.$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$\dim_{\mathcal{H}}(K') = \frac{\log 4}{\log \frac{5}{2}} \approx 1.5130.$$

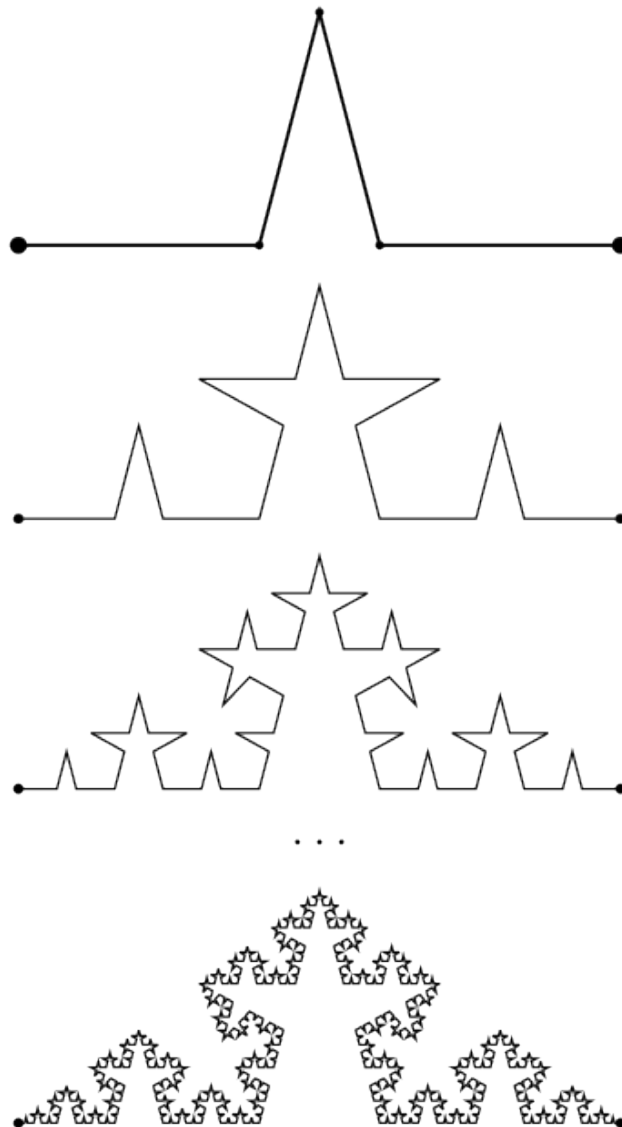


Figura 3.2: Curva di Von Koch modificata.

Capitolo 4

Spazi auto-omeomorfi

In questo capitolo si approfondisce la nozione di spazio auto-omeomorfo, introducendone alcune varianti più restrittive e presentando esempi significativi. Vengono analizzate le condizioni che permettono di dotare tali spazi di una metrica auto-simile, capace di attribuire una dimensione di Hausdorff arbitraria. In particolare, si propone una costruzione ricorsiva di uno spazio compatto, totalmente sconnesso e a dimensione topologica zero, insieme alla definizione della metrica associata alla dimensione desiderata.

4.1 Definizione e proprietà topologiche

In questa sezione vengono fornite definizioni più generali di spazi auto-omeomorfi e di spazi auto-simili. Si studiano le implicazioni tra diverse definizioni che richiedono diversi gradi di regolarità. Infine si analizzano queste ultime in rapporto con i Sistemi di Funzioni Iterate.

- Definizione 4.1.**
1. Sia X spazio topologico, X viene detto *auto-omeomorfo* se per ogni U sottoinsieme aperto di X , esiste V sottoinsieme di U omeomorfo a X .
 2. X viene detto *auto-omeomorfo in senso forte* se per ogni U aperto sottoinsieme di X , esiste V sottoinsieme di U omeomorfo a X , con interno non

vuoto.

3. X viene detto *puntualmente auto-omeomorfo* se per ogni punto x di X , per ogni U intorno di x , esiste V sottoinsieme di U omeomorfo a X .
4. X viene detto *puntualmente auto-omeomorfo in senso forte* se per ogni punto x di X , per ogni U intorno di x , esiste V sottoinsieme di U omeomorfo a X , tale che V è intorno di x .

Teorema 4.2. *Si può facilmente verificare che valgono le seguenti implicazioni:*

1. *Se X è puntualmente auto-omeomorfo in senso forte allora è anche puntualmente auto-omeomorfo e auto-omeomorfo in senso forte.*
2. *Se X è auto-omeomorfo in senso forte allora è anche auto-omeomorfo.*
3. *Se X è puntualmente auto-omeomorfo allora è anche auto-omeomorfo.*

E che ogni altra implicazione non è sempre valida.

Dimostrazione. Le tre implicazioni sono immediate dalle definizioni. Per dimostrare che le altre implicazioni non valgono, vengono proposti dei controesempi [[4], Esempi 2.6, 2.7, 2.8, p.218].

Pseudo-arco Lo pseudo-arco è uno spazio topologico metrico, compatto, connesso ed ereditariamente indecomponibile, cioè ogni suo sottospazio continuo (cioè metrico, compatto e connesso) è indecomponibile. In particolare è possibile dimostrare che tutti gli pseudo-archi sono omeomorfi tra loro, e che ogni sottospazio continuo di uno pseudo-arco è ancora uno pseudo-arco. Grazie a queste proprietà, e al fatto che l'interno di uno pseudo-arco è vuoto, si può dimostrare che: lo pseudo-arco è puntualmente auto-omeomorfo (e quindi anche auto-omeomorfo) ma non auto-omeomorfo in senso forte.

È possibile costruire uno pseudo-arco come intersezione decrescente di catene contorte nel piano: Sia $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_k)$ una catena, ovvero una collezione finita di dischi chiusi nel piano tali che:

- Ogni coppia di dischi consecutivi ha intersezione degli interni non vuota;

- Dischi non consecutivi hanno intersezione vuota.

I dischi che compongono la catena vengono detti *anelli*. L'unione di tutti gli anelli di una catena è un continuo. Una catena \mathcal{D}' *raffina* la catena \mathcal{D} se ogni anello D'_s di \mathcal{D}' è contenuto nell'interno di almeno un anello $D_i \in \mathcal{D}$. La catena \mathcal{D}' è detta *contorta* nella catena \mathcal{D} se:

- \mathcal{D}' raffina \mathcal{D} ;
- Per ogni coppia $D_i, D_j \in \mathcal{D}$ con $j > i + 2$, e per ogni coppia di anelli $D'_s, D'_v \in \mathcal{D}'$ tali che

$$D_i \cap D'_s \neq \emptyset \quad \text{e} \quad D_j \cap D'_v \neq \emptyset,$$

esistono due anelli intermedi $D'_t, D'_u \in \mathcal{D}'$, con $s < t < u < v$ (o viceversa), tali che

$$D'_t \subset D_{j-1}, \quad D'_u \subset D_{i+1}.$$

Ora si considerano due punti nel piano $a, b \in \mathbb{R}^2$ e una successione di catene $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots\}$, tali che:

- Il punto a appartiene al primo anello e b all'ultimo anello di ogni catena \mathcal{D}_n ;
- Il diametro di ogni disco della catena \mathcal{D}_n è minore di $\frac{1}{n}$;
- La catena \mathcal{D}_{n+1} è contorta nella catena \mathcal{D}_n ;

Sia K_n l'unione degli anelli della catena \mathcal{D}_n . Per costruzione, le K_n sono continui con

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

e diametro che tende a zero. Si definisce quindi lo pseudo-arco K come

intersezione dei continui K_n , ovvero:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

È possibile dimostrare che K è un continuo ereditariamente indecomponibile, ed è quindi uno pseudo-arco. Una costruzione analoga si trova nell'articolo di R. H. Bing [1].

Triangolo di Sierpiński Il triangolo di Sierpiński è un esempio di uno spazio puntualmente auto-omeomorfo e auto-omeomorfo in senso forte ma non puntualmente auto-omeomorfo in senso forte. Abbiamo infatti che per ogni punto per ogni intorno esiste una copia sufficientemente piccola contenuta in tale intorno, e per ogni aperto esiste una copia omeomorfa con interno non vuoto. Il triangolo di Sierpiński risulta però non essere puntualmente auto-omeomorfo in senso forte in quanto andando ad analizzare i punti di intersezione tra due triangoli si avrà che la copia omeomorfa al triangolo di Sierpiński non conterrà il punto iniziale nel proprio interno per ogni intorno.

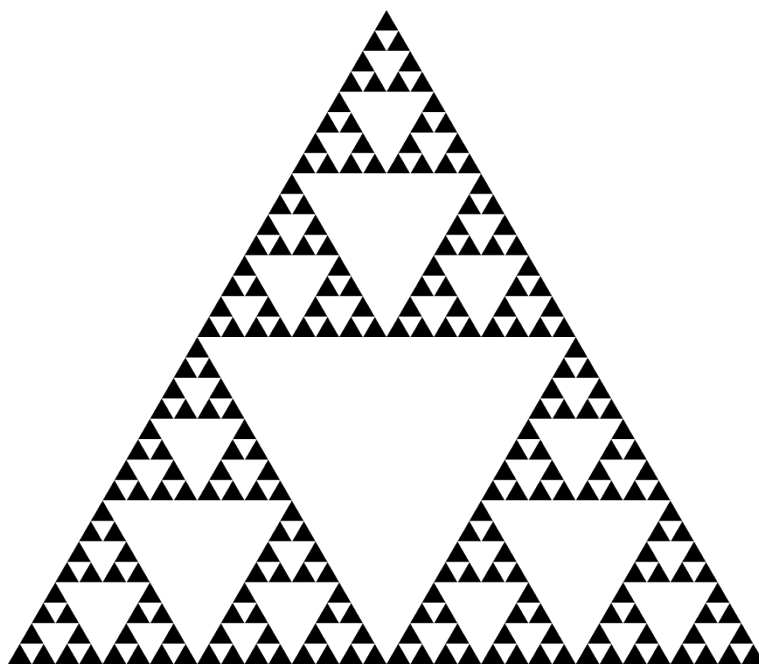


Figura 4.1: Triangolo di Sierpinsky

Ventaglio armonico Infine, tramite il ventaglio armonico è possibile costruire uno spazio auto-omeomorfo in senso forte ma non puntualmente auto-omeomorfo. Il ventaglio armonico è costruito come segue: in un quadrato unitario $[0,1] \times [0,1]$ prendiamo i punti $a_n = (1/n, 0)$, $a_0 = (0, 0)$ e $t = (0, 1)$. Ora prendiamo i segmenti I_n con estremi a_n e t per ogni n , l'unione di questi segmenti prenderà il nome di ventaglio armonico. Per creare lo spazio desiderato basterà considerare una copia di un ventaglio armonico chiamata X_1 , quindi dividere ogni arco I_n per $n > 0$ a metà, il nuovo punto fungerà da vertice per due nuovi ventagli armonici che avranno come arco limite le due metà di I_n . Questo nuovo spazio prende il nome di X_2 . Iterando il processo si ottiene una successione di spazi X_n . Infine viene definito lo spazio $X = cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)$. Si osserva che lo spazio X è auto-omeomorfo in senso forte, in quanto per ogni punto di ramificazione esiste un omeomorfismo tra un suo intorno e lo spazio X , che identifica tale punto con il vertice t . Allo stesso tempo però, lo spazio non risulta essere puntualmente auto-omeomorfo, in quanto intorni sufficientemente piccoli di a_0 sono archi, non omeomorfi allo spazio X .

□

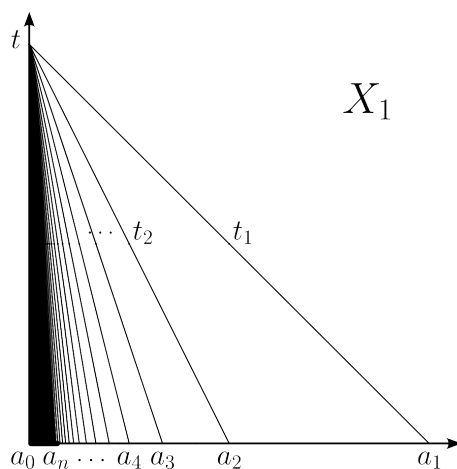
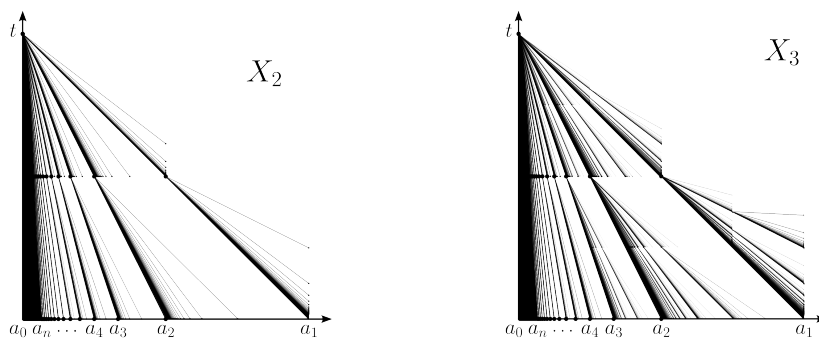


Figura 4.2: Ventaglio armonico

Figura 4.3: X_2 e X_3 generati tramite l'applicazione di diversi ventagli armonici.

Definizione 4.3. Esistono nozioni analoghe a quella di spazi auto-omeomorfi anche nel contesto delle similitudini, che danno luogo agli spazi auto-simili

1. Sia X spazio metrico, X viene detto *auto-simile* se per ogni U sottoinsieme aperto di X , esiste V sottoinsieme di U simile a X .
2. X viene detto *auto-simile in senso forte* se per ogni U aperto sottoinsieme di X , esiste V sottoinsieme di U simile a X , con interno non vuoto.
3. X viene detto *puntualmente auto-simile* se per ogni punto x di X , per ogni U intorno di x , esiste V sottoinsieme di U simile a X .

4. X viene detto *puntualmente auto-simile in senso forte* se per ogni punto x di X , per ogni U intorno di x , esiste V sottoinsieme di U simile a X , tale che V è intorno di x .

Si passa ora allo studio dei rapporti tra la definizione di spazio auto-simile e di un attrattore di un SFI di similitudini.

Proposizione 4.4. *Sia D sottoinsieme di \mathbb{R}^n chiuso, siano S_i similitudini con coefficiente $c_i < 1$ e sia F l'attrattore del sistema di funzioni iterate $\{S_i\}_i$. Allora F è un insieme auto-simile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$. Per dimostrare che F è un insieme auto-simile si dovrà verificare che per ogni aperto U di F , esiste un sottoinsieme V simile a F . Dalle proprietà degli attrattori dei SFI si ha che F è uguale all'unione delle sue immagini rispetto alle similitudini del SFI; e questa proprietà vale anche per le immagini $S_i(F)$. Quindi, iterando n volte, si ha

$$F = \bigcup_{w \in \mathcal{A}^n} S_w(F). \quad (4.1)$$

Ed essendo tutte le S_i contrazioni, si ha anche che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_w(F)| = 0.$$

Sia U un aperto contenuto in F , e sia $u \in F$ tale che $B(u, r) \subset U$. Si sceglie ora m , la lunghezza delle parole considerate, tale che $\sup_{w \in \mathcal{A}^m} |S_w(F)| < r$. Allora, per la (4.1), esiste una parola $\bar{w} \in \mathcal{A}^m$ tale che $u \in S_{\bar{w}}(F)$. E poiché tale insieme ha diametro minore di r , risulta contenuto nella boccia $B(u, r) \subset U$. \square

Osservazione 4.5. Non vale il viceversa. L'attrattore di una SFI è un caso particolare di insieme auto-simile. Alcuni insiemi auto-omeomorfi non possono essere descritti da un sistema di funzioni iterate finito, basta considerare lo spazio \mathbb{R}^n , contenente infinite copie simili a se stesso.

Proposizione 4.6. *Sia F l'attrattore di un SFI definito come prima, se tutte le similitudini hanno immagini con interno non vuoto e le immagini di F hanno interni disgiunti due a due, allora F è auto-simile in senso forte.*

Dimostrazione. F è auto-simile, e, aggiungendo le nuove ipotesi alla dimostrazione precedente, si ottiene che $S_w(F)$ ha interno non vuoto per ogni $w \in \mathcal{A}^*$, e quindi F rispetta la definizione di spazio auto-simile in senso forte. \square

Proposizione 4.7. *Sia F l'attrattore di un SFI definito come prima, se F è compatto, allora è puntualmente auto-simile.*

Dimostrazione. Se F compatto, ogni $x \in F$ può essere identificato come

$$x = x_w = F_w$$

e, poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_w(F)| = 0$ con $w \in \mathcal{A}^n$, per ogni intorno I di x esiste una n sufficientemente grande tale che $x \in S_w(F) \subset I$, per una qualche $w \in \mathcal{A}^n$. \square

4.2 Metriche auto-simili associate

Nella sezione conclusiva si affronta il problema della costruzione di una metrica su alcuni spazi auto-omeomorfi, in modo tale da ottenere strutture auto-simili con dimensione di Hausdorff arbitraria.

Viene inizialmente considerato un caso base, costituito da un insieme auto-omeomorfo di struttura semplice.

Proposizione 4.8. *Sia X spazio di Hausdorff auto-omeomorfo, e si supponga che esistano due sottoinsiemi aperti e chiusi disgiunti $A_1, A_2 \subset X$ entrambi omeomorfi a X e tali che $X = A_1 \cup A_2$. Siano $S_1, S_2 : X \rightarrow X$ due immersioni topologiche di X tali che $S_i(X) = A_i$ per $i = 1, 2$. Si definisce l'alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2\}$. Per ogni parola $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, si consideri l'intersezione nidificata*

$$X_\omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{\omega_1} \circ \cdots \circ S_{\omega_k}(X).$$

Se per ogni $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'insieme X_ω è un singoletto, allora esiste una metrica su X per cui X è uno spazio auto-simile omeomorfo allo spazio di Cantor.

Dimostrazione. Denotiamo $x_\omega = X_\omega$. Si considera l'insieme di Cantor $C \subset [0, 1]$, che può essere descritto come l'insieme dei numeri reali la cui rappresentazione in base 3 non contiene la cifra 1. Più precisamente, ogni elemento $p \in C$ ammette un'unica espansione ternaria del tipo

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \text{ con } a_k \in \{0, 2\} \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Tale unicità è garantita dal fatto che le eventuali rappresentazioni alternative (che potrebbero derivare da espansioni terminanti in cifre 2 ripetute) implicherebbero la presenza della cifra 1 nella rappresentazione, e quindi non appartenerebbero a C . In particolare, per ogni $p \in C$ esiste una e una sola sequenza $\xi \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ che lo rappresenta in base 3, e ciò permette di identificare C in modo naturale con lo spazio simbolico $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$. Sia quindi f una funzione definita sull'insieme di Cantor con valori in X , tale che mandi un numero appartenente all'insieme di Cantor, identificato alla parola $\xi \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, in un punto dello spazio X x_ω con

$$\omega_k = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_k = 0 \\ 2 & \text{se } \xi_k = 2 \end{cases} \quad (4.2)$$

La funzione così descritta è ben definita, per le considerazioni precedenti sull'insieme di Cantor. L'iniettività di f segue dalla Si osserva che la controimmagine di un punto $x_\omega \in X$, identificato da una successione di 0 e 2, corrisponde ad un unico punto nell'insieme di Cantor. Da cui l'iniettività di f . La suriettività si ottiene dal fatto che ogni punto $x \in X$ appartiene a una catena discendente di copie di X , siccome $S_1(X)$ e $S_2(X)$ costituiscono una partizione dell'insieme, per cui esiste $p \in C$ tale che $f(p) = x$. Per concludere la dimostrazione, essendo f una biiezione definita su un compatto, con valori in uno spazio di Hausdorff, sarà sufficiente mostrare la continuità di f , ovvero che

$$\forall p = 0.\xi_1\xi_2\cdots \in C, \forall I \subset X \text{ intorno di } f(p), \exists J \subset C \text{ intorno di } p \text{ t.c. } f(J) \subset I.$$

Sia $x_\omega = f(p)$, allora per ogni intorno I di x_ω esiste un k tale che $S_{\omega_1, \dots, \omega_k}(X) \subset I$, in quanto, per la definizione di spazio auto-omeomorfo, le copie omeomorfe a X compongono una base di aperti. Sia $w' \in \mathcal{A}^k$ tale che $w_1 = \omega_1, \dots, w_k = \omega_k$. Infine si osserva che, chiamando a, b i due numeri con rappresentazione decimale

$$\begin{aligned} a &= 0.\xi_1 \dots \xi_k, \\ b &= 0.\xi_1 \dots \xi_k + 3^{-k}, \end{aligned}$$

indicando con $\delta = 3^{-k}/2$, si ha

$$f^{-1}(S_{w'}(X)) = [a, b] \cap C = (a - \delta, b + \delta) \cap C.$$

Questo vale in quanto gli intervalli $[a - \delta, a)$ e $(b, b + \delta]$ non appartengono all'insieme di Cantor. In particolare è evidente che il terzo termine sia un aperto nella topologia indotta sull'insieme di Cantor. Si ha così trovato un intorno di p la cui immagine è contenuta in I . \square

Osservazione 4.9. Si osserva che vale la seguente catena di omeomorfismi:

$$C \cong \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \cong \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \cong X,$$

dove:

- C è l'insieme di Cantor inteso come sottoinsieme di $[0, 1]$;
- $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ è lo spazio simbolico che rappresenta C tramite la rappresentazione ternaria priva della cifra 1;
- $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ è uno spazio simbolico, ottenuto da quello precedente tramite rinumerazione dei simboli;
- X è uno spazio auto-omeomorfo, costruito come unione di due sottoinsiemi aperti disgiunti, ciascuno omeomorfo a X stesso.

Proposizione 4.10. Sia $C \subset [0, 1]$ l'insieme di Cantor classico. Per ogni $\lambda \in$

$(0, 1)$, si considera il Sistema di Funzioni Iterate $\{S_1^*, S_2^*\}$ definito su $[0, 1] \subset \mathbb{R}$:

$$S_1^*(x) = 2^{-\frac{1}{\lambda}}x, \quad S_2^*(x) = (1 - 2^{-\frac{1}{\lambda}}) + 2^{-\frac{1}{\lambda}}x. \quad (4.3)$$

L'attrattore C^λ è uno spazio auto-similare, di dimensione di Hausdorff λ , omeomorfo a C

$$\dim_{\mathcal{H}} C^\lambda = \lambda, \quad C^\lambda \cong C$$

Dimostrazione. L'insieme di Cantor può essere realizzato come attrattore di un Sistema di Funzioni Iterate costituito da due similitudini:

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad S_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x.$$

Dal teorema 3.14, sappiamo che se un SFI è costituito da similitudini con lo stesso rapporto di contrazione ρ , allora la dimensione di Hausdorff s del suo attrattore è l'unico valore che soddisfa:

$$\sum_{i=1}^N \rho^s = 1.$$

Nel caso classico dell'insieme di Cantor, abbiamo due contrazioni con $\rho = \frac{1}{3}$, e la dimensione risulta:

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s \Rightarrow s = \frac{\log(2)}{\log(3)}.$$

Si considera ora, per ogni $\lambda \in (0, 1)$, il sistema $\{S_1^*, S_2^*\}$. Le due funzioni sono similitudini con lo stesso fattore di contrazione $\rho = 2^{-\frac{1}{\lambda}}$. Applicando nuovamente il teorema, la dimensione s dell'attrattore C^λ sarà:

$$2\rho^s = 1 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\log(2)}{\log(2^{\frac{1}{\lambda}})} = \lambda.$$

Per dimostrare che l'insieme C^λ così costruito è omeomorfo all'insieme di Cantor C , si osserva che C^λ soddisfa le ipotesi della proposizione 4.8. Pertanto esiste un omeomorfismo $h : C \rightarrow C^\lambda$. □

Teorema 4.11. *Si può quindi costruire un omeomorfismo*

$$g : X \rightarrow C^\lambda,$$

tra uno spazio X che soddisfa le ipotesi della proposizione 4.8, e uno spazio auto-simile $C^\lambda \subset [0, 1]$, di dimensione di Hausdorff $\lambda \in (0, 1)$.

Dimostrazione. Poiché X è omeomorfo all'insieme di Cantor C , esiste un omeomorfismo $f : C \rightarrow X$. D'altra parte, C^λ è costruito come attrattore di un SFI su $[0, 1]$ con due similitudini, e anch'esso è omeomorfo a C , quindi esiste un omeomorfismo $h : C \rightarrow C^\lambda$. Componendo f e h , si ottiene un omeomorfismo

$$g = h \circ f^{-1} : X \rightarrow C^\lambda.$$

Tale applicazione può essere esplicitata come:

$$g(x_\omega) = S_\omega^*(1),$$

dove $\omega \in \{1, 2\}^\mathbb{N}$, e $\{S_1^*, S_2^*\}$ è il sistema di funzioni iterate definito in (4.3).

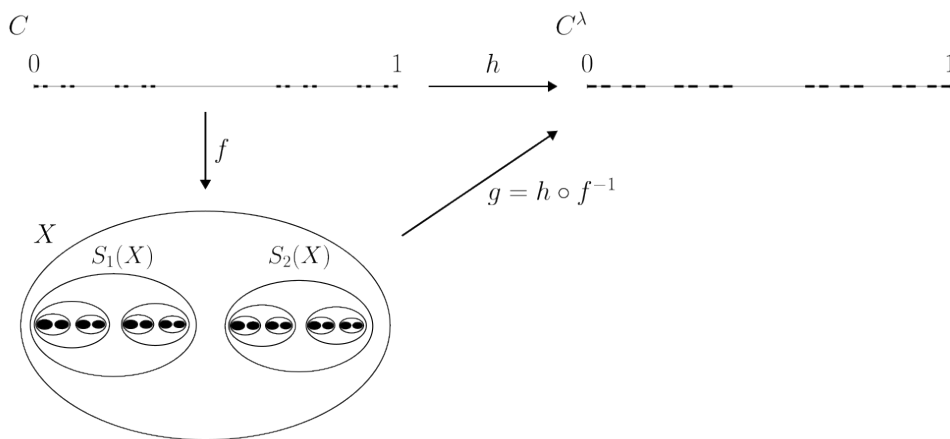


Figura 4.4: Composizione degli omeomorfismi.

□

È possibile estendere il teorema a spazi auto-omeomorfi composti da più copie omeomorfe disgiunte.

Proposizione 4.12. *Sia X spazio di Hausdorff auto-omeomorfo, e si supponga che esistano n sottoinsiemi aperti e chiusi disgiunti $A_1, \dots, A_n \subset X$ tali da costituire una partizione di X , ciascuno omeomorfo a X . Siano $S_1, \dots, S_n : X \rightarrow X$ le immersioni topologiche di X tali che $S_i(X) = A_i$ per $i = 1, \dots, n$. Si definisce l'alfabeto $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$. Se per ogni $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'insieme X_ω è un singoletto, allora esiste una metrica su X che lo rende uno spazio auto-simile di dimensione di Hausdorff arbitraria $\lambda \in (0, 1)$.*

Dimostrazione. Analogamente al caso precedente $n = 2$, si possono definire due omeomorfismi che collegano lo spazio X e l'attrattore C_n^λ a uno spazio simbolico. Si definisce innanzitutto l'applicazione

$$f : \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}} \rightarrow X, \quad f(\omega) = x_\omega,$$

dove x_ω è definito come l'unico elemento dell'insieme X_ω . In questo caso, f è un omeomorfismo tra lo spazio simbolico e X , grazie alla compattezza dello spazio simbolico e alla struttura auto-omeomorfa di X . Si considera ora il sistema di funzione iterate $\{S_1^*, \dots, S_n^*\}$ su $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, definito da

$$S_i^*(x) = \frac{i-1}{n} + \rho x, \quad \text{con } \rho = n^{-\frac{1}{\lambda}},$$

per $i = 1, \dots, n$. Ogni S_i^* è una similitudine con rapporto di contrazione ρ , e le immagini sono disgiunte, quindi il sistema ha attrattore $C_n^\lambda \subset [0, 1]$, auto-simile e con dimensione di Hausdorff λ . È quindi possibile definire un secondo omeomorfismo:

$$g : \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C_n^\lambda,$$

che identifica punti appartenenti a C_n^λ tramite sequenze infinite di iterate, ovvero:

$$g(\omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{\omega_1}^* \circ \dots \circ S_{\omega_k}^*(1) = x_\omega \in C_n^\lambda.$$

Componendo i due omeomorfismi si ottiene infine:

$$h = g \circ f^{-1} : X \rightarrow C_n^\lambda,$$

che è un omeomorfismo tra lo spazio auto-omeomorfo X e l'attrattore auto-simile C_n^λ , di dimensione arbitraria $\lambda \in (0, 1)$. □

Bibliografia

- [1] R. H. Bing. American mathematical society. *A Homogeneous Indecomposable Plane Continuum*, vol 15:p 729–742, 1948.
- [2] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications, Second Edition*. University of St Andrews, 2003.
- [3] Henry Wallman Witold Hurewicz. *Dimension Theory*. Princeton University, 1948.
- [4] A. Dilks W.J. Charatonik. Topology and its applications. *On self-homeomorphic spaces*, vol 55:p 215–238, 1994.