

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA

# Configurazioni ottimali di punti sul toro

Tesi Sperimentale di Laurea in Geometria

Relatore

*Prof. R. Piergallini*

Laureando

*Augusto Vagnoni*

---

Anno Accademico 1999 – 2000

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Esposizione del problema</b>	<b>5</b>
1.1 Il concetto di $\alpha$ -energia . . . . .	5
1.1.1 $\alpha$ -Energia di sistemi di $N$ punti su una superficie di $\mathbb{R}^3$	5
1.1.2 $\alpha$ -Energia ottimale di un sistema di $N$ cariche su una sfera . . . . .	6
1.1.3 $\alpha$ -Energia di configurazioni di punti su un toro piatto .	7
1.2 Configurazioni speciali . . . . .	10
1.2.1 Geodetiche sul Toro . . . . .	10
1.2.2 Gruppi di simmetria (unicità delle soluzioni) . . . . .	13
1.2.3 Configurazioni allineate lungo geodetiche $\mathcal{C}_{p,q,N}$ . . . . .	15
1.2.4 Configurazioni allineate lungo geodetiche $\mathcal{C}_{1,\bar{p},N}$ . . . . .	16
1.3 Proprietà delle configurazioni ottimali . . . . .	18
<b>2 Stima asintotica di <math>\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)</math></b>	<b>20</b>
2.1 Ottimizzazione nel caso $0 <  \alpha  < 2$ . . . . .	20
2.1.1 Costante di distribuzione continua . . . . .	20
2.1.2 Partizione regolare del toro . . . . .	23
2.2 Stima asintotica di $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$ . . . . .	23
<b>3 Ricerca di configurazioni ottimali con metodi numerici</b>	<b>30</b>
3.1 Metodo del gradiente . . . . .	30
3.2 Descrizione del programma . . . . .	31
3.2.1 Minimizzazione . . . . .	31
3.2.2 Ricerca degli allineamenti . . . . .	36

Indice	2
3.2.3 Visualizzazione . . . . .	38
<b>4 Risultati numerici</b>	<b>42</b>
4.1 Valori ottimali dell'energia . . . . .	42
4.2 Configurazioni ottimali . . . . .	44
4.3 Confronto con la stima asintotica . . . . .	47
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>52</b>

# Introduzione

Lo studio delle configurazioni "ottimali" di un numero finito di punti sulla superficie della sfera  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  ha avuto negli ultimi anni un notevole sviluppo, sia per l'interesse matematico del problema in sé (cfr. [1] e [2]), che per le numerose applicazioni in diversi campi, come la biologia molecolare, la cristallografia e la chimica dei polimeri. L'ottimalità è intesa rispetto alla  $\alpha$ -energia della configurazione, ottenuta assumendo che ogni punto generi un campo conservativo con un'energia potenziale del tipo  $r^\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  (per  $\alpha = -1$  si ha il caso coulombiano).

In questa tesi affronteremo il problema analogo per configurazioni di punti nel toro  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ . La scelta della metrica indotta dall'inclusione canonica in  $\mathbb{R}^4$  piuttosto che dall'usuale immersione del toro in  $\mathbb{R}^3$  come superficie di rotazione, è dovuta al fatto che tale metrica risulta localmente equivalente a quella piatta del piano euclideo  $\mathbb{R}^2$ , infatti coincide con la metrica indotta dal quoziente  $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ .

In base a quest'ultima osservazione, possiamo rappresentare il toro come un quadrato unitario avente i lati opposti identificati, vista la similitudine esistente tra le due superfici.

Il primo capitolo della tesi è dedicato alla definizione del problema e ad una prima discussione generale dei suoi vari aspetti. Inoltre, introduciamo qui tutte le nozioni e i risultati preliminari di cui avremo bisogno nel seguito. Particolare attenzione è riservata alle geodetiche del toro, che, come vedremo, giocano un ruolo essenziale nello studio delle configurazioni ottimali.

Nel secondo capitolo diamo una stima asintotica dell' $\alpha$ -energia ottimale, con  $0 < |\alpha| < 2$ , al variare del numero  $N$  dei punti della configurazione, che costituisce il risultato principale della tesi (teorema 2.2.4). Tale stima si

ottiene a partire da speciali configurazioni di punti distribuiti lungo geodetiche, adattando al nostro caso le tecniche utilizzate in [4].

Gli esperimenti numerici che abbiamo svolto, confermano che l'allineamento dei punti lungo geodetiche non deve essere considerato soltanto un artificio di calcolo, ma ricorre sistematicamente anche quando si applicano procedure di ottimizzazione a partire da configurazioni iniziali casuali.

Nel terzo capitolo esponiamo l'algoritmo utilizzato per la ricerca numerica dei valori dell'energia e lo studio delle corrispondenti configurazioni ottimali, con particolare riferimento alla ricerca degli allineamenti.

Infine, nel quarto capitolo, elenchiamo i risultati numerici ottenuti, confrontandoli con la stima calcolata nel secondo capitolo per  $\alpha = \pm 1$ . Tale confronto mostra che, almeno per questi valori di  $\alpha$ , l'errore relativo tra la stima dell'energia ottimale ottenuta per via analitica e il corrispondente valore ottenuto per via numerica è veramente trascurabile ed ha un andamento sorprendentemente stabile al variare di  $N$  (cfr. figure 4.4 e 4.5).

# Capitolo 1

## Esposizione del problema

### 1.1. Il concetto di $\alpha$ -energia

#### 1.1.1. $\alpha$ -Energia di sistemi di $N$ punti su una superficie di $\mathbb{R}^3$

Denotiamo con  $\mathbf{M}$  una superficie compatta di  $\mathbb{R}^3$ . Indichiamo con  $|x - y|$  la distanza euclidea tra due punti  $x, y \in \mathbb{R}^3$  (talvolta indicheremo la distanza euclidea tra due punti con  $r$ , quando questa è intesa in senso generico). Sia  $N$  un numero intero positivo,  $N \geq 2$ , e  $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$  un sottoinsieme finito di  $\mathbf{M}$ . Chiameremo  $\omega_N$  una *configurazione* di  $N$  punti sulla superficie  $\mathbf{M}$ .

Definiamo quindi la seguente funzione:

$$E(\alpha, \omega_N) = \begin{cases} \sum_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^\alpha & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq N} \ln \frac{1}{|x_i - x_j|} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

L'espressione (1.1) rappresenta la  $\alpha$ -energia associata alla configurazione  $\omega_N$ .

**Osservazione 1.1.1.** *Data una configurazione  $\omega_N$ , il numero degli addendi che contribuiscono ad ognuna delle somme in (1.1) è uguale a  $N(N - 1)/2$ , cioè il numero delle coppie non ordinate di  $N$  elementi; talvolta chiameremo separazioni le distanze tra i punti di  $\omega_N$ .*

Il nostro obiettivo è, fissati  $\alpha$  e  $N$ , *ottimizzare* la funzione  $E(\alpha, \omega_N)$ , cioè determinare i valori estremi che può assumere la  $\alpha$ -energia al variare di  $\omega_N \subset \mathbf{M}$ . In altre parole, *definita la funzione*

$$\mathcal{E}(\alpha, N) = \begin{cases} \inf_{\omega_N \in \mathbf{M}} E(\alpha, \omega_N) & \text{se } \alpha \leq 0 \\ \sup_{\omega_N \in \mathbf{M}} E(\alpha, \omega_N) & \text{se } \alpha > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

vogliamo, data una coppia  $(\alpha, N)$ , determinare il valore di  $\mathcal{E}(\alpha, N)$  e conoscere le configurazioni che determinano questo valore.

**Osservazione 1.1.2.** *La definizione di  $\mathcal{E}$  come funzione a valori in  $\mathbb{R}$  è ben posta. Infatti, se fissiamo  $\alpha > 0$ , allora l'insieme di esistenza di  $E$  è  $(\mathbf{M})^N$  che è un insieme compatto, quindi, essendo la funzione  $E$  continua, è chiaro che la funzione ammette massimo. Se invece prendiamo  $\alpha \leq 0$ , l'insieme di esistenza è  $(\mathbf{M})^N - \Delta$ , dove  $\Delta = \{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbf{M})^N : \exists i \neq j, x_i = x_j\}$ , ma in questo caso l'estremo inferiore di  $E$  è comunque un minimo perché in prossimità dei punti di  $\Delta$  la funzione tende a  $-\infty$ . Per quanto riguarda l'unicità della soluzione, verrà affrontato un discorso a parte.*

**Osservazione 1.1.3.** *Abbiamo definito  $\mathcal{E}$  in questo modo perché siamo orientati alla ricerca di configurazioni stabili. Infatti, una configurazione stabile si ha, per  $\alpha \leq 0$ , nei punti dove l'energia associata è minima; se invece  $\alpha > 0$ , la funzione inverte il suo andamento e quindi una configurazione stabile si ha quando l'energia raggiunge il suo massimo.*

### 1.1.2. $\alpha$ -Energia ottimale di un sistema di $N$ cariche su una sfera

Immaginiamo di avere la nostra configurazione  $\omega_N$  sulla sfera unitaria  $\mathbf{S}^2$  immersa in  $\mathbb{R}^3$ ; se disponiamo una carica positiva unitaria su ciascun punto di questa configurazione, la forza coulombiana totale che agisce sulla  $i$ -esima particella per effetto delle altre particelle è di tipo repulsivo, e risulta (sistema CGS di Gauss):

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3},$$

mentre l'energia potenziale associata ad ogni particella risulta:

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{|x_i - x_j|}.$$

Possiamo, quindi, generalizzare il discorso [6] e considerare potenziali non solo di tipo coulombiano  $V = 1/r$  ma anche di tipo  $V = r^\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tenendo presente che, se  $\alpha = 0$ , il potenziale diventa di tipo  $V = \ln 1/r$ .

L'espressione (1.1) rappresenta la  $\alpha$ -energia totale del sistema di  $N$  cariche positive unitarie poste su  $\mathbf{S}^2$  nei punti della configurazione  $\omega_N$ , che interagi-

scono con un potenziale  $V = r^\alpha$  ovvero, nel caso logaritmico, con il potenziale  $V = \ln 1/r$ ; in questo caso possiamo considerare la  $\alpha$ -energia associata alla configurazione  $\omega_N$ .

Lo studio di  $\mathcal{E}$  al variare di  $\alpha$  assume diversi significati, ad esempio:

- Il caso  $\alpha = -1$  è il *problema di Thompson*: i punti che minimizzano la (-1)-energia (configurazione di equilibrio stabile) si chiamano *punti di Fekete*[7].
- Per  $\alpha = 0$  un problema relativo alla complessità computazionale è riconducibile a questo; precisamente il problema della determinazione, per  $N \geq 2$ , di insiemi di punti  $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbf{S}^2$  tali che, per una certa costante  $C_0$ , si abbia

$$E(0, \omega_N) - \mathcal{E}(0, N) \leq C_0 \ln N.$$

- Per  $\alpha = 1$  lo studio della funzione  $\mathcal{E}(1, N)$ , fissato  $N$ , è equivalente a questo problema geometrico: per quale insieme di  $N$  punti su una sfera la somma delle distanze euclidee dei punti stessi è massima? Qual è il massimo? Questo caso rappresenta, eccetto alcuni valori particolari di  $N$ , uno dei problemi ancora aperti della matematica iniziato da L. Fejes [7].
- Il caso  $\alpha \rightarrow \infty$  tende al problema del "Best Packing", poiché la  $\alpha$ -energia, fissato  $N$ , dipende dalla più piccola distanza tra i punti.

Nel caso in cui  $\mathbf{M} = \mathbf{S}^2$ , è stato verificato che l'unicità della soluzione, a meno di isometrie, in generale non sussiste.

### 1.1.3. $\alpha$ -Energia di configurazioni di punti su un toro piatto

Denotiamo con  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  il toro unitario centrato nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^4$ . È importante sottolineare che la metrica che utilizzeremo non è la metrica indotta dall'usuale immersione del toro in  $\mathbb{R}^3$  come superficie di rotazione, ma quella piatta indotta dall'inclusione  $\mathbf{T}^2 \subset \mathbb{R}^4$ .

Per studiare caratteristiche e proprietà geometriche delle configurazioni di punti sul toro, sfruttiamo la similitudine esistente tra il toro unitario  $\mathbf{T}^2 \subset \mathbb{R}^4$  e lo spazio  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  cioè il quadrato unitario in cui sono identificati i due lati opposti. Ogni disposizione di punti sul quadrato corrisponde ad una configu-

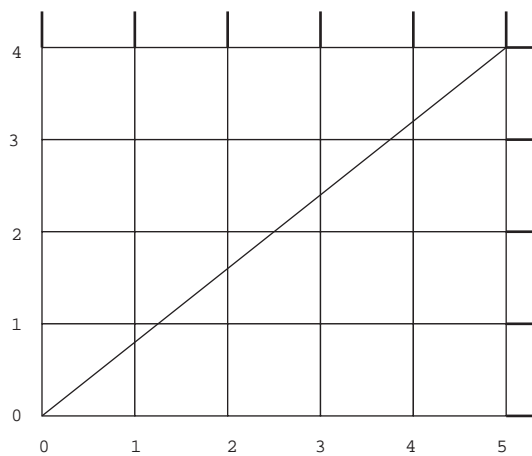


razione sul toro tramite il quoziente

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{T}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$$

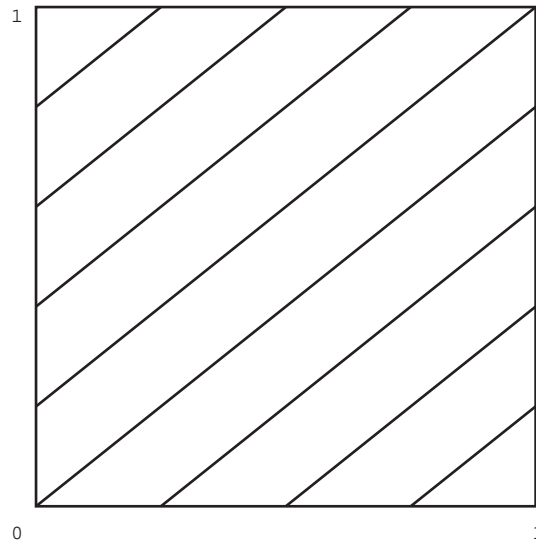
$$f(x, y) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y). \quad (1.3)$$

Consideriamo l'insieme di tutte le rette passanti per l'origine di  $\mathbb{R}^2$ . Proviamo a fare una prima distinzione tra di esse: quelle che sulla loro strada incontrano un punto  $P \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$  e quelle che con  $\mathbb{Z}^2$  hanno intersezione uguale a  $\{(0, 0)\}$ .



**Figura 1.1.**

In figura 1.1 è illustrata una parte del piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  con il reticolo  $\mathbb{Z}^2$ , ed una retta passante per l'origine e per il punto di componenti intere (5, 4). Quozientando tutto sul quadrato in basso a sinistra si ottiene la figura 1.2: nel caso descritto la retta ha incontrato lungo il suo cammino un punto  $P \in \mathbb{Z}^2$ . Ciò è necessario affinché l'insieme dei segmenti quozientati sul quadrato unitario  $Q$  corrisponda ad una curva chiusa sul toro. Altrimenti il cammino illustrato in figura 1.2 non si chiuderebbe mai e la corrispondente curva in  $\mathbf{T}^2$  sarebbe *densa* in  $\mathbf{T}^2$  stesso. Un insieme  $X$  si dice *denso* in  $Y$  quando la sua chiusura  $\overline{X} = Y$ . Durante lo studio delle configurazioni  $\omega_N$  si è notato che la disposizione dei punti appartenenti a configurazioni ottimali è molto vicina, se non, per certi  $N$ , interamente contenuta, in una o più rette sopra descritte. La caratteristica principale delle configurazioni ottimali, quindi, è proprio l'allineamento dei suoi punti.

**Figura 1.2.**

Una delle problematiche incontrate è stata proprio quella della determinazione delle configurazioni ottimali  $\omega_N$ . A tale scopo utilizziamo il software Mathematica programmato per minimizzare, nel caso in cui  $\alpha \leq 0$  (massimizzare, nel caso  $\alpha > 0$ ), la nostra  $\alpha$ -energia. Daremo nel cap.3 una descrizione dettagliata del programma.

Lo stesso programma è stato utilizzato per calcolare, data la configurazione  $\omega_N$ , il valore dell' $\alpha$ -energia ottima  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$ . Nel caso del toro, come pure della sfera  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , non è possibile determinare un'ottimizzazione per via analitica. In generale, in questi casi, vengono utilizzati degli algoritmi di ottimizzazione per poter risolvere il problema per via computazionale. Il problema in esame è un tipico problema non risolvibile analiticamente (esclusi alcuni valori particolari dei parametri), pertanto descriveremo nel capitolo 3 un algoritmo utilizzato per elaborare numericamente delle soluzioni. Tuttavia, non sempre l'algoritmo fornisce "buoni" risultati. La causa di ciò è data dall'esistenza, al crescere di  $N$ , di molte soluzioni *locali* che, inoltre, presentano valori di energia molto simili tra loro. Questo fatto rende molto difficile la determinazione della soluzione *globale* poiché, in generale, non è possibile confrontare tutte le soluzioni locali, per cui le configurazioni trovate sono in realtà delle probabili soluzioni.

La ricerca delle configurazioni ottimali è, quindi, un problema che nella maggior parte dei casi, è risolvibile solo tramite l'analisi numerica. Tuttavia, una delle proprietà delle configurazioni ottimali può essere stabilita a priori, come la separazione dei punti; altre possono essere congetturate analizzando i risultati numerici.

Diremo che i punti di una configurazione ottimale sono *ben separati* sul toro se la distanza di ogni coppia di punti è limitata inferiormente da una quantità dipendente da  $N$ . E' stato già dimostrato, nel caso in cui la superficie in esame sia una sfera, che, per  $\alpha < 2$ , tutte le configurazioni ottimali soddisfano questa proprietà; per  $\alpha \geq 2$ , invece, i punti di una configurazione ottimale possono coincidere. Sperimentalmente, ciò è vero anche per il toro: questo suggerisce l'ipotesi di lavorare per trovare una dimostrazione valida anche per questo caso.

## 1.2. Configurazioni speciali

Abbiamo accennato a possibili allineamenti dei punti appartenenti alle configurazioni ottimali  $\omega_N$ . Proviamo a scendere più nei particolari.

### 1.2.1. Geodetiche sul Toro

Consideriamo una superficie geometrica  $\mathbf{M}$  in  $\mathbb{R}^4$  con una metrica indotta  $m$ . Le curve giacenti su questa superficie, parametrizzate secondo la lunghezza d'arco, e che localmente sono il percorso più corto tra due punti, sono le curve ad accelerazione normale (componente tangenziale nulla). Sia  $\mathcal{C} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^4$  una curva e sia  $D$  la derivata covariante associata ad  $m$ .

**Definizione 1.2.1.** *Una curva  $\mathcal{C}$  su una superficie geometrica  $\mathbf{M}$  è una geodetica di  $\mathbf{M}$  se e solo se la sua accelerazione è zero; cioè se  $D_{\alpha'}\alpha' = 0$ .*

**Teorema 1.2.2.** *Sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$ . Esiste un insieme aperto  $U$  ed un  $\epsilon > 0$  tali che, se  $\mathbf{p} \in U \subset \mathbf{M}$  e  $\mathbf{v}$  è un versore tangente ad  $\mathbf{M}$  nel punto  $\mathbf{p}$ , c'è un'unica geodetica massimale  $\mathcal{C} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbf{M}$  tale che*

$$\mathcal{C}(0) = \mathbf{p}, \quad \mathcal{C}'(0) = \mathbf{v}.$$

La dimostrazione si basa sul teorema di esistenza ed unicità di equazioni differenziali che asserisce che l'unicità di tali geodetiche vale su intervalli  $I$  piccoli.

Cerchiamo di allargare questi  $I$ . Siano  $\mathcal{C}_1 : I_1 \rightarrow M$  e  $\mathcal{C}_2 : I_2 \rightarrow M$  due geodetiche soddisfacenti le condizioni iniziali in  $t = 0$ . Usando la proprietà di unicità, possiamo dedurre che  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$  sulle parti comuni di  $I_1$  e  $I_2$ . Applicando questo risultato a tutte le geodetiche, otteniamo una singola geodetica *massimale*  $\mathcal{C} : I \rightarrow M$  soddisfacente le condizioni iniziali.

**Definizione 1.2.3.** *Una geodetica  $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow M$  la diremo chiusa se e solo se è periodica o, equivalentemente,  $\mathcal{C}(I) \cong \mathbf{S}^1$ .*

Analizziamo le caratteristiche delle geodetiche chiuse giacenti sulla superficie di un toro. A tal fine estendiamo la funzione  $f$  definita in (1.3) a tutto  $\mathbb{R}^2$ :

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$F(x, y) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y).$$

Ad ogni geodetica su  $\mathbf{T}^2$  corrisponde, tramite la similitudine locale  $F$ , una retta in  $\mathbb{R}^2$ .  $F$  manda geodetiche in geodetiche. Consideriamo, quindi, tutto  $\mathbb{R}^2$  e lo spazio di tutti i punti a componenti intere,  $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$ .

Per fare in modo di avere una geodetica chiusa sul toro, la retta corrispondente deve formare con l'asse  $x$  un angolo  $\gamma$  tale che, prima o poi, la retta incontri sul suo cammino un punto  $P \in \mathbb{Z}^2$ . Tale punto avrà coordinate  $(q, p)$ , con  $q$  e  $p$  primi tra loro. L'insieme delle rette aventi tale caratteristica è dato da quelle rette a tangente razionale. Sarà, quindi, questo l'insieme che andremo a considerare.

Una retta  $r$  che incontra un punto  $(q, p)$  formerà, quindi, con l'asse  $x$ , un angolo  $\gamma$  tale che

$$\tan \gamma = p/q,$$

con  $p$  e  $q$  primi tra loro.

Di seguito è riportata una rappresentazione di una geodetica chiusa giacente sulla superficie di un toro immerso in  $\mathbb{R}^3$ . Tale rappresentazione non è fedele dato che l'applicazione che manda  $\mathbf{T}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  nel toro contenuto in  $\mathbb{R}^4$  non è un'isometria.

Da questo momento in poi, per semplificare i problemi legati alle metriche utilizzate, considereremo l'isometria locale esistente tra  $\mathbb{R}^2$  ed il toro  $\mathbf{T}^2$

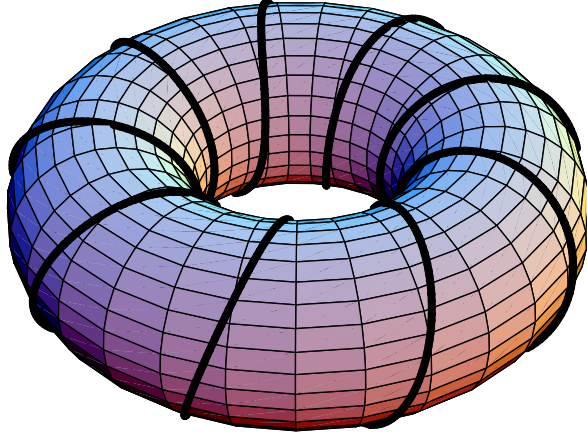


Figura 1.3.

immerso in  $\mathbb{R}^4$ , cioè  $\mathbf{T}^2 = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] / \sim$ . Consideriamo, quindi, l'applicazione

$$\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\bar{F}(x, y) = (\cos x, \sin x, \cos y, \sin y).$$

Sappiamo che  $\mathbf{T}^2$  può essere visto come  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  con ognuna delle circonferenze unitarie immerse in  $\mathbb{R}^2$ . In questo modo la distanza tra due punti  $P, Q \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] / \sim$ , sarà la stessa tra le immagini di tali punti su  $\mathbf{T}^2$ .

Indichiamo ora con  $\mathcal{C}_{p,q}$  la *geodetica corrispondente alla retta  $r$  con coefficiente angolare  $p/q$* , quando  $p$  e  $q$  sono primi tra loro, ed uscente da  $(0, 0)$ . Siamo in grado, a questo punto, di dare una rappresentazione parametrica di tale geodetica:

$$\mathcal{C}_{p,q} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 = \mathbf{T}^2 \subset \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{C}_{p,q}(t) = (\cos pt, \sin pt, \cos qt, \sin qt)$$

La caratteristica principale delle configurazioni ottimali  $\omega_N$  è la distribuzione dei suoi punti lungo tali geodetiche in modo tale che la distanza tra un punto ed il punto successivo giacente sulla geodetica sia costante. Dato che

è possibile calcolare la lunghezza di una geodetica a partire dal coefficiente angolare  $p/q$  della retta in  $\mathbb{R}^2$  che la rappresenta, sappiamo qual è questa distanza. La lunghezza di  $\mathcal{C}_{p,q}$  è data da  $2\pi\sqrt{p^2 + q^2}$ . Di conseguenza la distanza tra due punti consecutivi sulla geodetica è

$$\frac{2\pi\sqrt{p^2 + q^2}}{N}$$

dove  $N$  rappresenta il numero totale dei punti distribuiti sul toro.

Vedremo più avanti che non sempre le configurazioni  $\omega_N$  giacciono su un'unica geodetica, ma i punti potrebbero essere disposti su più geodetiche parallele e tra loro equidistanti. In questo caso  $\mathcal{C}_{p,q}$ , con  $p$  e  $q$  non primi tra loro, rappresenterà  $g$  geodetiche  $\mathcal{C}_{p,q}^k$ , con  $g = (p, q)$  aventi coefficiente angolare  $p/q$  e poste a distanza

$$d = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

le une dalle altre. Quindi:

$$\mathcal{C}_{p,q} = \bigcup_{k=0}^{g-1} \mathcal{C}_{p,q}^k$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p,q}^k(t) &= (\cos pt, \sin pt, \cos qt, \sin qt) + \\ &+ \frac{k}{d} \frac{(-\sin pt, \cos pt, -\sin qt, \cos qt)}{2} \end{aligned}$$

con  $k = 0, \dots, g - 1$

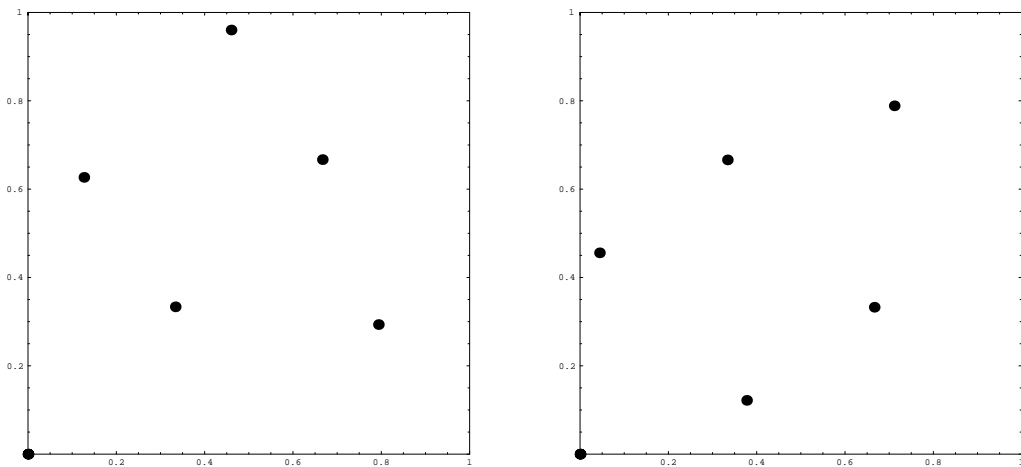
### 1.2.2. Gruppi di simmetria (unicità delle soluzioni)

Consideriamo una configurazione  $\omega_N$ . Effettuare una traslazione dell'intera configurazione lungo una delle due circonferenze unitarie  $\mathbf{S}^1$  corrisponde a muovere l'insieme di tutti i punti lungo direzioni parallele ad uno dei lati del quadrato. Una combinazione di traslazioni lungo le due  $\mathbf{S}^1$  fa rimanere invariata la distanza tra ogni coppia di punti di  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . A tal proposito, per semplicità, si è scelto di far coincidere un punto qualsiasi di ogni configurazione  $\omega_N$  con l'origine  $(0, 0)$  tramite una traslazione generale di tutta la configurazione. In questo modo possiamo considerare identiche tutte quelle configurazioni che possono essere sovrapposte tramite una traslazione, visto che il valore di  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$  resta lo stesso.

Inoltre c'è da considerare che, essendo i lati opposti del quadrato  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  identificati, il punto  $(0, 0)$  può essere visto anche sugli altri vertici. Questo ci suggerisce che anche ruotando di  $\pi/2$  la configurazione attorno al centro del quadrato, si ottiene la stessa  $\alpha$ -energia. Non solo: anche effettuando una riflessione rispetto alle diagonali si otterrebbe lo stesso valore della funzione obiettivo.

Concludendo, quindi,  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$  è invariante per traslazioni e rispetto all'azione del gruppo diedrale  $\Delta_4$ , il gruppo delle isometrie del toro immerso in  $\mathbb{R}^4$ . Identifico allora tutte le configurazioni che differiscono a meno di una di queste isometrie.

In figura 1.4 e 1.5 sono rappresentate tre configurazioni  $\omega_6$  apparentemente diverse: in realtà, la prima è ottenuta dalla seconda tramite una rotazione di  $\pi/2$ , mentre la terza si ottiene dalla prima tramite una riflessione rispetto ad una diagonale.



**Figura 1.4.**

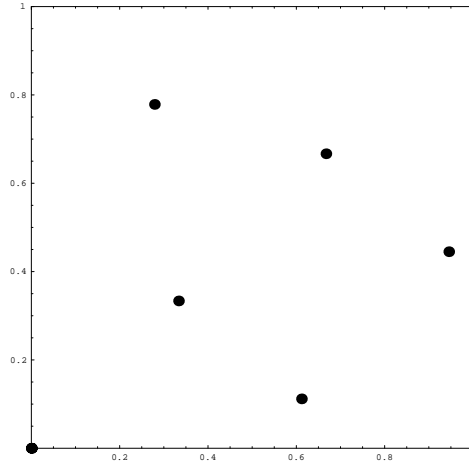


Figura 1.5.

### 1.2.3. Configurazioni allineate lungo geodetiche $\mathcal{C}_{p,q,N}$

Data una configurazione  $\omega_N$  giacente su una geodetica  $\mathcal{C}_{p,q}$  è possibile trovare altre geodetiche contenenti tutti i punti della configurazione. Chiameremo  $\mathcal{C}_{p,q,N}$  la geodetica  $\mathcal{C}_{p,q}$  contenente la configurazione  $\omega_N$ . Come abbiamo già visto nella sezione 1.2.2 due o più configurazioni apparentemente distinte potrebbero rappresentare la stessa  $\omega_N$ : questo ci suggerisce che possiamo stabilire a priori per quali coppie  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  due geodetiche sono uguali a meno di azioni del gruppo diedrale  $\Delta_4$ .

Effettuando una rotazione di  $\pi/2$  attorno al centro del quadrato si ottiene:

$$(p', q') = (-q, p) \Rightarrow \mathcal{C}_{p,q} = \mathcal{C}_{p',q'}$$

Consideriamo ora le riflessioni rispetto alle diagonali. Prendiamo quella corrispondente alla geodetica  $\mathcal{C}_{1,1}$ : indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo (acuto) compreso tra le geodetiche  $\mathcal{C}_{p,q}$  e  $\mathcal{C}_{1,1}$  e con  $\gamma$  quello tra  $\mathcal{C}_{p',q'}$  e  $\mathcal{C}_{1,1}$ . Si ha:

$$\vartheta = -\gamma \Rightarrow \mathcal{C}_{p,q} = \mathcal{C}_{p',q'}.$$

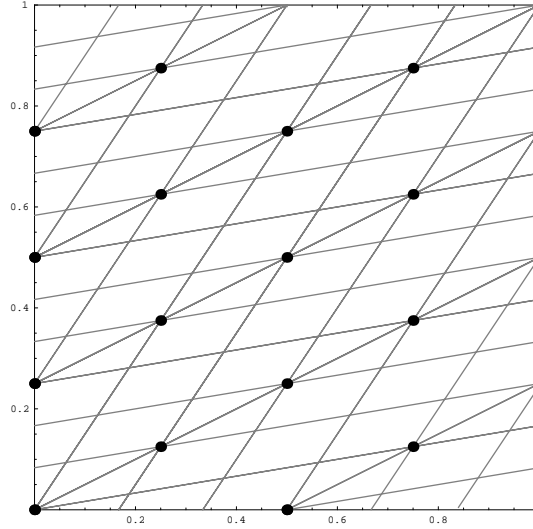
Le implicazioni sopra stabilite sono valide per ogni  $N$ .

Andiamo ora ad esaminare alcuni casi in cui, fissata una configurazione  $\omega_N$  con un punto nell'origine e definita a meno di azioni delle isometrie del toro, esistono altre geodetiche contenenti l'intera configurazione.



In figura 1.6 è rappresentata la configurazione  $\omega_{16}$  allineata su tre diverse geodetiche:  $\mathcal{C}_{2,4}$ ,  $\mathcal{C}_{6,4}$  e  $\mathcal{C}_{2,12}$ . Da ciò possiamo dedurre l'uguaglianza

$$\mathcal{C}_{2,4,16} = \mathcal{C}_{6,4,16} = \mathcal{C}_{2,12,16}$$



**Figura 1.6.**

In questo caso non è stato possibile individuare una geodetica  $\mathcal{C}_{p,q}$  con  $p$  e  $q$  primi tra loro, che contenesse l'intera configurazione  $\omega_{16}$ .

Nella figura successiva (1.7) sono visibili due geodetiche contenenti  $\omega_8$ : in questo caso le due curve sono  $\mathcal{C}_{2,4,8}$  e  $\mathcal{C}_{3,2,8}$ ; la prima è formata da due rami mentre la seconda è unica e ciò è confermato dal fatto che  $(3, 2) = 1$

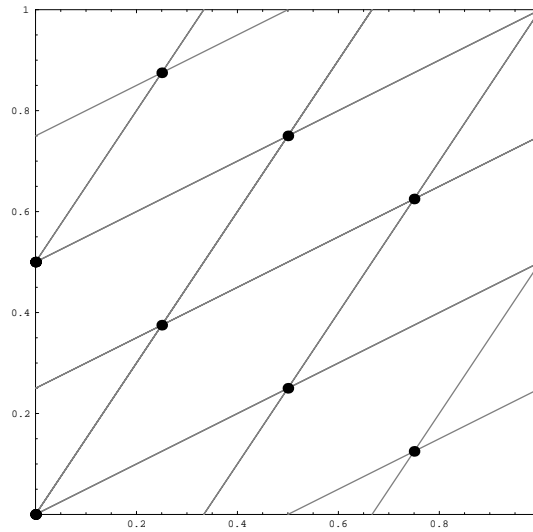
Nella tabella 4.5 del capitolo 4 verranno specificate, per ogni  $N$ , tutte le geodetiche  $\mathcal{C}_{p,q,N}$  contenenti la configurazione  $\omega_N$ .

#### 1.2.4. Configurazioni allineate lungo geodetiche $\mathcal{C}_{1,\bar{p},N}$

Consideriamo una configurazione  $\omega_N$  allineata lungo una geodetica  $\mathcal{C}_{p,q,N}$ . Vogliamo far vedere che è sempre possibile, a partire da un  $N$  non troppo piccolo, trovare un  $\bar{p}$  tale che

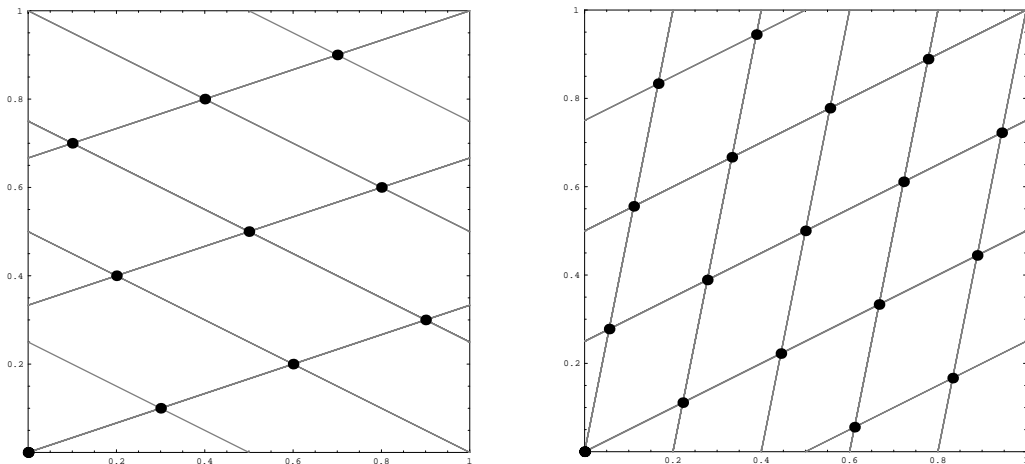
$$\mathcal{C}_{p,q,N} = \mathcal{C}_{1,\bar{p},N}$$

Partiamo da due esempi in cui l'allineamento voluto corrisponde a configurazioni che ottimizzano  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$ . Nelle figure seguenti (1.8) sono rappresentate



**Figura 1.7.**

le configurazioni  $\omega_{10}$  e  $\omega_{18}$ : la prima è disposta su due geodetiche  $\mathcal{C}_{-2,4,10}$  a due rami e l'altra  $\mathcal{C}_{1,3,10}$  a ramo unico; la seconda è contenuta su  $\mathcal{C}_{2,4,18}$  e su  $\mathcal{C}_{5,1,10}$ . Possiamo quindi concludere che nel primo caso  $\bar{p} = 3$ , mentre nel secondo caso  $\bar{p} = 5$ .



**Figura 1.8.**

Questi allineamenti non avvengono per ogni  $N$  ma esistono delle configurazioni corrispondenti a minimi locali molto vicini a  $\mathcal{E}$ . Il problema consiste nel cercare il  $\bar{p}$  tale che la configurazione  $\omega_N$  contenuta nella geodetica  $\mathcal{C}_{1,\bar{p},N}$  sia quella che approssima meglio l' $\alpha$ -energia. Nelle figure che seguono (1.9) sono illustrate le configurazioni  $\omega_4$ ,  $\omega_7$  e  $\omega_9$  che non corrispondono ai rispettivi va-

lori ottimi  $\mathcal{E}(1, \omega_4)$ ,  $\mathcal{E}(1, \omega_7)$  e  $\mathcal{E}(1, \omega_9)$ . Nonostante ciò, i valori associati a tali configurazioni si avvicinano molto all'ottimo. Nel capitolo 4 daremo il valore numerico dell'errore.

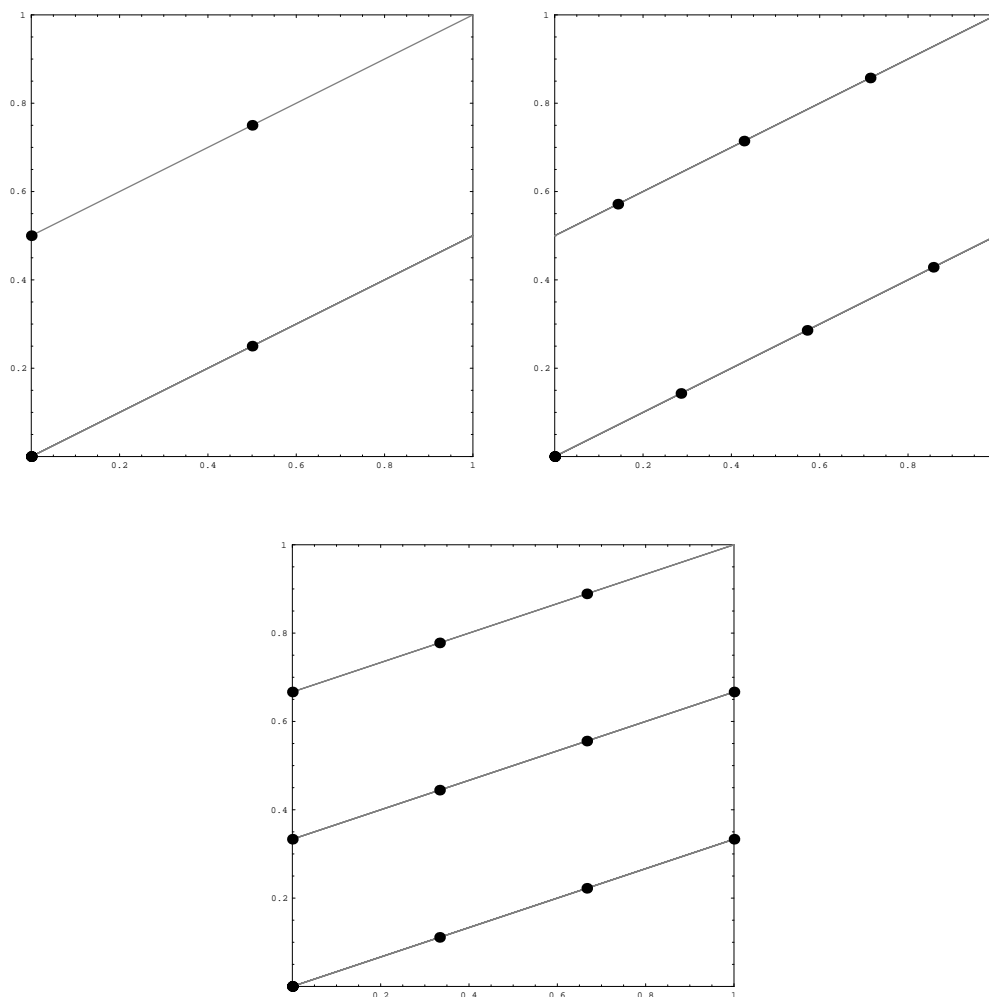


Figura 1.9.

### 1.3. Proprietà delle configurazioni ottimali

La ricerca delle configurazioni ottimali è, quindi, un problema che nella maggior parte dei casi, è risolvibile solo tramite metodi numerici. Tuttavia, una delle proprietà delle configurazioni ottimali può essere stabilita a priori, come la separazione dei punti.

Diremo che i punti di una configurazione ottimale sono *ben separati* sul toro se la distanza di ogni coppia di punti è limitata inferiormente da una quantità dipendente da  $N$ . E' stato già dimostrato [8], nel caso in cui la superficie in

esame sia una sfera, che, per  $\alpha < 2$ , tutte le configurazioni ottimali soddisfano questa proprietà; per  $\alpha \geq 2$ , invece, i punti di una configurazione ottimale possono coincidere. Sperimentalmente, ciò è vero anche per il toro: questo suggerisce l'ipotesi di lavorare per trovare una dimostrazione valida anche per questo caso.

# Capitolo 2

## Stima asintotica di $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$

### 2.1. Ottimizzazione nel caso $0 < |\alpha| < 2$

L'obiettivo è ottenere dei limiti di  $\mathcal{E}$  utilizzando una opportuna *partizione regolare* del toro (sezione 2.1.2). Per poter dare una stima asintotica di  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$  abbiamo bisogno di qualche definizione.

#### 2.1.1. Costante di distribuzione continua

In modo analogo alla definizione (1.1) del cap. 1, si può definire la  $\alpha$ -energia associata ad una distribuzione continua di cariche sul toro. Per ottenere questa quantità introduciamo le seguenti nozioni generali.

**Definizione 2.1.1.** *Una famiglia  $\mathcal{M}$  di sottoinsiemi di un insieme  $X$  si chiama  $\sigma$ -algebra in  $X$  se soddisfa i seguenti assiomi:*

1.  $X \in \mathcal{M}$ .
2. Se  $A \in \mathcal{M}$ , allora  $A^c \in \mathcal{M}$ , indicando con  $A^c$  il complementare di  $A$  rispetto a  $X$ .
3. Se  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  e  $A_i \in \mathcal{M}$  per ogni  $i \geq 1$ , allora  $A \in \mathcal{M}$ .

Se  $\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra in  $X$ , allora la coppia  $(X, \mathcal{M})$  o, semplicemente,  $X$  si chiama *spazio misurabile*, e gli elementi di  $\mathcal{M}$  si chiamano *insiemi misurabili* in  $X$ . Una funzione  $f$  da uno spazio misurabile  $X$  ad uno spazio topologico  $Y$  è misurabile se per ogni aperto  $U$  di  $Y$  si ha  $f^{-1}(U)$  misurabile.

**Osservazione 2.1.2.** *Si dimostra in [3] che se  $X$  è uno spazio topologico, esiste una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  che è la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente gli insiemi aperti di  $X$ . Gli elementi di  $\mathcal{B}$  si chiamano gli insiemi di Borel di  $X$ .*

**Definizione 2.1.3.** Una misura positiva è una funzione  $\mu$  definita su una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}$ , a valori in  $[0, +\infty]$  e tale che, se  $\{A_i\}$  è una famiglia numerabile di elementi di  $\mathcal{M}$  a due a due disgiunti, allora

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

**Osservazione 2.1.4.** In [3] si dimostra l'esistenza di una misura positiva (misura di Lebesgue)  $\sigma$  definita su una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}$  in  $\mathbb{R}^4$  con le proprietà:

1. per ogni plurintervallo  $P$  in  $\mathbb{R}^4$ ,  $\sigma(P)$  è uguale al "volume" di  $P$ ;
2.  $\mathcal{M}$  contiene tutti gli insiemi di Borel in  $\mathbb{R}^4$
3.  $\sigma$  è invariante per traslazioni.

**Definizione 2.1.5.** Se  $X$  è uno spazio misurabile, chiamiamo semplici le funzioni  $s : X \rightarrow [0, \infty)$  che hanno come immagine un numero finito di punti.

Data una funzione misurabile semplice  $s$  su  $X$  che assume i valori  $a_1, \dots, a_m$  rispettivamente sui sottoinsiemi del dominio  $A_1, \dots, A_m$ , possiamo rappresentare  $s$  in questo modo:

$$s = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i},$$

dove  $\chi_{A_i}$  è la *funzione caratteristica* dell'insieme  $A_i$ , cioè la funzione che vale 1 sui punti di  $A_i$  e 0 sui punti di  $X - A_i$ .

**Osservazione 2.1.6.** Una funzione semplice è misurabile se e solo se sono misurabili tutti gli insiemi  $A_i$ .

**Definizione 2.1.7.** Data una funzione misurabile semplice  $s$  nella forma

$$s = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i},$$

ed un sottoinsieme  $D \subset X$ , poniamo:

$$\int_D s d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i \cap D).$$

Data una funzione misurabile  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  ed un sottoinsieme  $D \subset X$ , definiamo *integrale di Lebesgue* di  $f$  su  $D$  rispetto alla misura  $\mu$ :

$$\int_D f d\mu = \sup \int_D s d\mu,$$

dove il sup è relativo a tutte le funzioni misurabili semplici  $s$  tali che  $0 \leq s \leq f$ .

Definiamo quindi la *costante di distribuzione continua*:

$$I_\sigma(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{(\sigma(\mathbf{T}^2))^2} \iint_{\mathbf{T}^2 \times \mathbf{T}^2} |x - y|^\alpha d\sigma(x) d\sigma(y) & \text{per } \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{(\sigma(\mathbf{T}^2))^2} \iint_{\mathbf{T}^2 \times \mathbf{T}^2} \ln \frac{1}{|x - y|} d\sigma(x) d\sigma(y) & \text{per } \alpha = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dove  $\sigma$  è la misura di Lebesgue su  $\mathbf{T}^2$ .

Vedremo in sez.2.2 che, per la determinazione di  $\mathcal{E}(\alpha, N)$ , è di fondamentale importanza conoscere la costante di distribuzione continua poiché per certi valori di  $\alpha$  l'energia ottimale dipende da questa quantità [5]. Nel nostro caso, considerando la metrica euclidea in  $\mathbb{R}^4$ , e ricordando che stiamo analizzando il problema per  $0 < |\alpha| < 2$ , ci basta risolvere l'equazione (2.1) tenendo conto che:

•

$$\sigma(\mathbf{T}^2) = 4\pi^2,$$

•

$$\begin{aligned} |x - y| &= [(\cos 2\pi x_1 - \cos 2\pi x_2)^2 + (\sin 2\pi x_1 - \sin 2\pi x_2)^2 + \\ &+ (\cos 2\pi y_1 - \cos 2\pi y_2)^2 + (\sin 2\pi y_1 - \sin 2\pi y_2)^2]^{1/2} = \\ &= (4 - 2 \cos 2\pi(x_1 - x_2) - 2 \cos 2\pi(y_1 - y_2))^{1/2}. \end{aligned}$$

dove  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1)$  e rappresentano le coordinate cartesiane di due punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  disposti sul quadrato unitario  $Q \subset \mathbb{R}^2$ .

Alla fine dei calcoli si ottiene, per  $0 < |\alpha| < 2$ :

$$\begin{aligned} I_\sigma(\alpha) &= 2^{\alpha/2} \iint_{[0,1] \times [0,1]} (2 - \cos 2\pi x - \cos 2\pi y)^{\alpha/2} dx dy = \\ &= \frac{2^{\alpha/2}}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi] \times [0,2\pi]} (2 - \cos x - \cos y)^{\alpha/2} dx dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{2^\alpha}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi] \times [0,2\pi]} (\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{y}{2})^{\alpha/2} dx dy.$$

Il risultato numerico di questo integrale è stato trovato utilizzando il software Mathematica, visto che, analiticamente, il calcolo è impossibile. Per ora ci basti sapere che, per  $0 < |\alpha| < 2$ , l'integrale sopra descritto è convergente. Infatti la funzione integranda ha una singolarità in  $(0,0)$ : nell'intorno dell'origine,  $(\sin^2 x + \sin^2 y)^{\alpha/2}$  è un infinitesimo pari a  $(x^2 + y^2)^{\alpha/2} = \rho^\alpha$ . In un insieme limitato e misurabile di  $\mathbb{R}^2$  contenente l'origine, la funzione  $1/\rho^\alpha$  è integrabile quando  $0 < |\alpha| < 2$ .

### 2.1.2. Partizione regolare del toro

Per poter applicare il prossimo teorema è utile introdurre la seguente nozione:

**Definizione 2.1.8.** *Si definisce partizione regolare di  $\mathbf{T}^2$  in  $N$  parti una collezione  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \leq N}$  di sottoinsiemi chiusi di  $\mathbf{T}^2$  tali che:*

1.  $\bigcup_{i=1}^N D_i = \mathbf{T}^2$ ,
2.  $D_i \cap D_j$  ha interno vuoto per ogni  $i \neq j$ ,
3.  $\sigma(D_i^\circ) = 4\pi^2/N \quad \forall i \leq N$ ,

indicando, in generale, con  $D^\circ$  l'interno dell'insieme  $D$  e con  $\sigma(D) = \int_D d\sigma$  l'area di  $D$ .

## 2.2. Stima asintotica di $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$

Il problema della stima asintotica dell' $\alpha$ -energia è stato già affrontato nel caso della sfera  $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  da E.A. Rakhmanov, E.Saff, Y.M. Zhou in [4]. L'utilità della costruzione effettuata nelle sezioni precedenti si può dedurre dal seguente teorema che è una generalizzazione del lavoro svolto da questi tre studiosi.

Diremo che una funzione reale  $f$  definita su uno spazio topologico è *semi-continua inferiormente* se, per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $\{x : f(x) > a\}$  è aperto; se invece, per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , è aperto l'insieme  $\{x : f(x) < a\}$ , diremo che  $f$  è *semicontinua superiormente*. Indicheremo inoltre con  $diam(D)$  il *diametro* dell'insieme  $D$ , definito  $diam(D) = \sup\{|x - y| : x, y \in D\}$ .



**Teorema 2.2.1.** *Sia  $K(r)$ ,  $0 < r \leq 2$ , una funzione decrescente semicontinua inferiormente e supponiamo che*

$$\beta(K) := \frac{1}{(\sigma(T^2))^2} \iint_{T^2 \times T^2} K(|x - y|) d\sigma(x) d\sigma(y) < \infty. \quad (2.2)$$

Se  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^N$  è una partizione regolare di  $\mathbf{T}^2$  in  $N$  parti, allora esistono punti  $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N\}$ , con  $\hat{x}_i \in D_i$  per ogni  $i \leq N$ , tali che

$$\sum_{i \neq j} K(|\hat{x}_i - \hat{x}_j|) \leq N^2 \beta(K) - \sum_{i=1}^N K(\text{diam}(D_i^\circ)). \quad (2.3)$$

*Dimostrazione.* Definiamo:

$$h(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} K(|x_i - x_j|),$$

$$J = \inf\{h(x_1, \dots, x_N) : x_i \in D_i^\circ, \text{ per } i = 1, \dots, N\}$$

$$d\tilde{\sigma} = \frac{N}{4\pi^2} d\sigma, \quad d\tilde{\sigma}_i = d\tilde{\sigma}|_{D_i^\circ}, \quad \text{per } i = 1, \dots, N,$$

pertanto  $\tilde{\sigma}_i(D_j^\circ) = \delta_{ij}$ . Integrando la disuguaglianza  $J \leq h(x_1, \dots, x_N)$  rispetto a  $d\tilde{\sigma}_i(x_1) \dots d\tilde{\sigma}_i(x_N)$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} J &\leq \int \dots \int \sum_{i \neq j} K(|x_i - x_j|) d\tilde{\sigma}_i(x_1) \dots d\tilde{\sigma}_i(x_N) \\ &= \sum_{i \neq j} \int_{D_i^\circ} \int_{D_j^\circ} K(|x - y|) d\tilde{\sigma}_i(x) d\tilde{\sigma}_j(y) \\ &= \iint K(|x - y|) d\tilde{\sigma}(x) d\tilde{\sigma}(y) + \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \iint_{D_i^\circ \times D_i^\circ} K(|x - y|) d\tilde{\sigma}_i(x) d\tilde{\sigma}_i(y), \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che il bordo di ogni  $D_i$  ha misura zero. Poiché  $K$  è decrescente, otteniamo dalle espressioni (2.2) e (2.4) la disuguaglianza

$$J \leq N^2 \beta(K) - \sum_{i=1}^N K(\text{diam}(D_i^\circ)),$$

da cui segue il teorema per opportune  $\hat{x}_i \in D_i$ .  $\square$

**Osservazione 2.2.2.** *Se  $K$  è una funzione crescente semicontinua superiormente, allora la (2.3) è vera con il segno di disuguaglianza invertito.*

**Osservazione 2.2.3.** Per  $0 < |\alpha| < 2$  e nucleo  $K = r^\alpha$ , la funzione  $\beta(K)$  è la costante di distribuzione continua.

Nel caso del toro si ha:

$$K(|x - y|) = |x - y|^\alpha$$

dove, considerando la metrica piatta,

$$|x - y| = (4 - 2 \cos 2\pi(x_1 - x_2) - 2 \cos 2\pi(y_1 - y_2))^{1/2}$$

La quantità  $|x - y|$  è un numero  $r \in \mathbb{R}$  tale che  $0 < r \leq 2$  e di conseguenza la funzione  $K(|x - y|) = r^\alpha$  è decrescente e semicontinua inferiormente per ogni  $\alpha < 0$ , mentre per  $\alpha \geq 0$  è crescente e semicontinua superiormente.

Una volta data una stima numerica all'integrale (2.1) che, come abbiamo già osservato, è convergente per  $0 < |\alpha| < 2$ , ci basta trovare una opportuna partizione regolare  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^N$  di  $\mathbf{T}^2$  per dare una stima asintotica dell' $\alpha$ -energia  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$ .

In questa sezione ci occuperemo di trovare la partizione regolare  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^N$  di  $\mathbf{T}^2$  tale che  $\text{diam}(D_i^\circ)$  sia minimo; per la stima numerica dell'integrale (2.1) rimandiamo al capitolo 4.

Abbiamo già visto in sezione 1.2.1 che i punti di ogni configurazione  $\omega_N$  tendono a disporsi su una o più geodetiche. Analizziamo separatamente i due casi:

caso 1 *Disposizione su un'unica geodetica*  $\mathcal{C}_{p,q}$  ( $MCD(p, q) = 1$ ): proviamo a costruire dei rettangoli tali che il loro vertice in basso a sinistra coincida con un punto della configurazione e quello a destra con il successivo di tale punto, posto a distanza

$$\frac{2\pi\sqrt{p^2 + q^2}}{N}$$

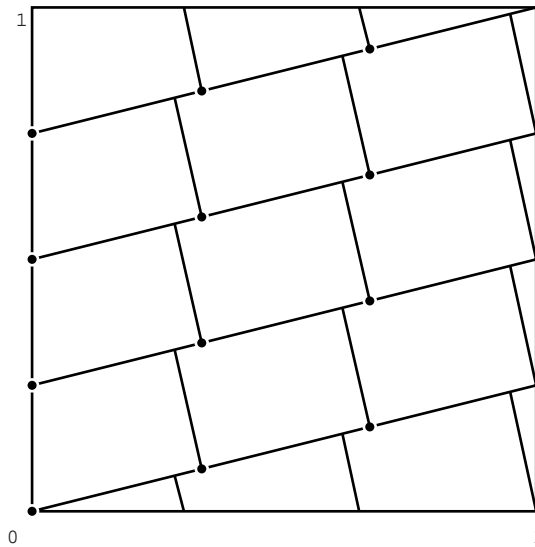
da esso. L'altezza del rettangolo è tale che l'area di ogni rettangolo sia uguale a  $4\pi^2/N$  visto che l'area totale del toro è  $4\pi^2$ . Quindi:

$$\frac{2\pi\sqrt{p^2 + q^2}}{N} h = \frac{4\pi^2}{N}$$

da cui

$$h = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

In figura 2.1 è illustrata una configurazione di 12 punti giacenti sulla geodetica  $\mathcal{C}_{1,4}$ : basterebbe collocare all'interno di ogni rettangolo ben visibile in figura ogni punto di  $\omega_{12}$  per ottenere una partizione regolare del quadrato formata da tutti rettangoli.



**Figura 2.1.**

caso 2 *Disposizione su più geodetiche  $\mathcal{C}_{p,q}$  ( $MCD(p, q) = g$ ):* in questo caso

$$\exists p', q' \in \mathbb{N} : p = gp', q = gq', MCD(p', q') = 1.$$

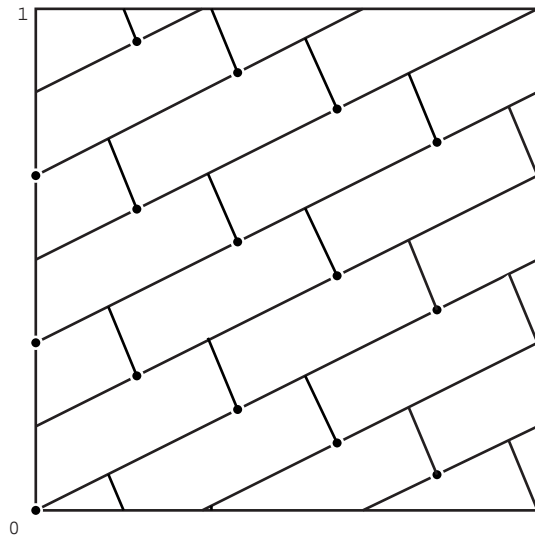
Anche qui costruiamo i rettangoli allo stesso modo. La loro base sarà

$$\frac{2\pi\sqrt{p^2 + q^2}}{N} = \frac{2\pi g\sqrt{p'^2 + q'^2}}{N}$$

e altezza uguale a

$$h = \frac{2\pi}{g\sqrt{p'^2 + q'^2}}.$$

In figura 2.2 è illustrata una configurazione di 15 punti giacenti sulle tre geodetiche parallele  $\mathcal{C}_{3,6}$ .

**Figura 2.2.**

A questo punto possiamo effettuare una traslazione di tutti i rettangoli in modo che ogni punto della configurazione diventi il centro di ognuno di essi. É chiaro che in questo modo si otterrà una partizione regolare del toro.

Per minimizzare  $\text{diam}(D_i^\circ)$  tutti i rettangoli costruiti sopra devono, ovviamente, diventare dei quadrati. Basta quindi eguagliare base ed altezza:

caso 1

$$\frac{2\pi\sqrt{p^2 + q^2}}{N} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$$\implies N = p^2 + q^2.$$

caso 2

$$\frac{2\pi g\sqrt{p'^2 + q'^2}}{N} = \frac{2\pi}{g\sqrt{p'^2 + q'^2}}$$

$$\implies N = g^2(p'^2 + q'^2) = p^2 + q^2.$$

In figura 2.3 sono rappresentate le configurazioni  $\omega_5$  e  $\omega_{45}$  e le partizioni regolari del toro in cui ogni  $D_i^\circ$  è un quadrato.

In entrambi i casi abbiamo avuto lo stesso risultato: le configurazioni  $\omega_N$  che meglio si adattano sulle geodetiche  $\mathcal{C}_{p,q}$  sono quelle tali che  $N$  è somma di due quadrati di numeri naturali. Vedremo, infatti, che proprio queste configurazioni saranno quelle con  $\alpha$ -energia molto vicina a  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$ .

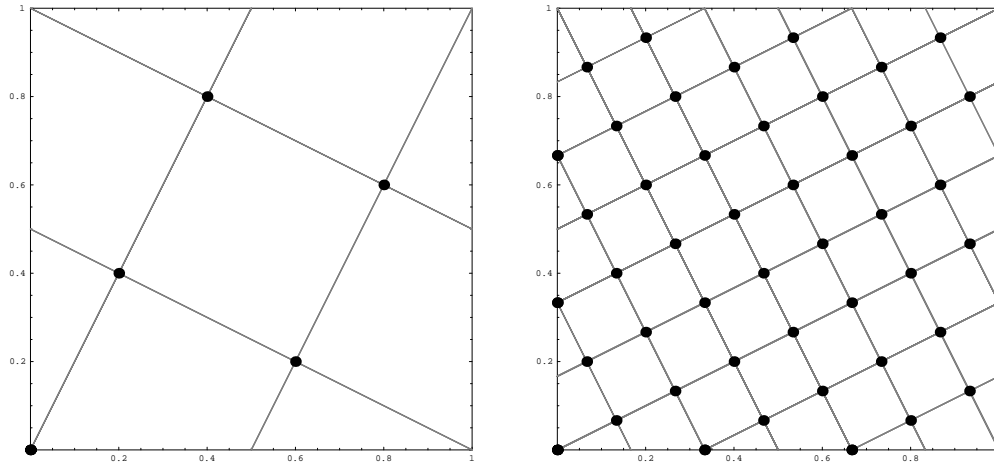


Figura 2.3.

A questo punto, essendo  $D_i^\circ$  dei quadrati di lato

$$l = \frac{2\pi}{\sqrt{N}}$$

diventa semplice trovare il loro diametro che coincide con la diagonale:

$$\text{diam}(D_i^\circ) = l\sqrt{2} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{N}}$$

Enunciamo quindi il seguente

**Teorema 2.2.4.** *Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 < |\alpha| < 2$ , valgono le seguenti relazioni:*

$$\mathcal{E}(\alpha, \omega_N) \leq \frac{1}{2}[N^2 \cdot \beta(r^\alpha) - N \cdot (2\pi\sqrt{\frac{2}{N}})^\alpha], \quad \text{per } \alpha < 0;$$

$$\mathcal{E}(\alpha, \omega_N) \geq \frac{1}{2}[N^2 \cdot \beta(r^\alpha) - N \cdot (2\pi\sqrt{\frac{2}{N}})^\alpha], \quad \text{per } \alpha > 0.$$

*Dimostrazione.* Segue dal teorema 2.2.1 e dall'osservazione 2.2.3  $\square$

In base a questo teorema, siamo in grado di dare una stima asintotica inferiore di  $\mathcal{E}(1, \omega_N)$  ed una stima asintotica superiore di  $\mathcal{E}(-1, \omega_N)$  essendo  $r^\alpha$  una funzione decrescente semicontinua inferiormente per  $\alpha = -1$  e crescente semicontinua superiormente per  $\alpha = 1$ : saranno questi i casi presi in considerazione nella stima asintotica dell' $\alpha$ -energia.

Quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(-1, \omega_N) &\leq \frac{1}{2}[N^2\beta(r^{-1}) - N(2\pi\sqrt{\frac{2}{N}})^{-1}] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}(-1, \omega_N) &\leq \frac{1}{2}[N^2\beta(r^{-1}) - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{N^3}{2}}]\end{aligned}\quad (2.5)$$

mentre:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(1, \omega_N) &\geq \frac{1}{2}[N^2\beta(r) - N(2\pi\sqrt{\frac{2}{N}})] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}(1, \omega_N) &\geq \frac{1}{2}[N^2\beta(r) - 2\pi\sqrt{2N}]\end{aligned}\quad (2.6)$$

Nel capitolo 4 stimeremo numericamente il valore di  $\beta(r^{-1})$  e di  $\beta(r)$  facendo così un confronto tra  $\mathcal{E}$  e la sua stima asintotica.

# Capitolo 3

## Ricerca di configurazioni ottimali con metodi numerici

Nel capitolo precedente è stata formulata una stima su una formula generale per  $\mathcal{E}$  in base al teorema 2.2.4; vogliamo ora adattare tale formula ai risultati ottenuti con metodi computazionali. A questo proposito, daremo una descrizione dettagliata del programma utilizzato per l'ottimizzazione e, successivamente, commenteremo e valuteremo i risultati fino ad ottenere delle espressioni per  $\mathcal{E}$  con una buona approssimazione e delle rappresentazioni di alcune delle più significative configurazioni ottimali con relative proprietà geometriche.

### 3.1. Metodo del gradiente

Per calcolare  $\mathcal{E}$  e le rispettive configurazioni abbiamo utilizzato il software Mathematica ed, in particolare, un programma di cui presenteremo il listato nella successiva sezione. Tale algoritmo, nella ricerca numerica di configurazioni di equilibrio, utilizza il *Metodo del Gradiente*:

Data una configurazione casuale  $\omega_N$  sul toro, si calcola la  $\alpha$ -forza totale agente su ogni punto per effetto degli altri. Definiamo tale  $\alpha$ -forza nel modo seguente:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^{2-\alpha}}$$

Una volta calcolata tale grandezza si spostano i punti in modo tale da ottenere, nel calcolo successivo, un valore più piccolo di quello trovato. Il processo viene quindi ripetuto fino a quando l'energia non si stabilizza con la precisione desiderata. L'iterazione è data quindi da questa espressione:

$$x_i \rightarrow x'_i = \frac{x_i + \lambda \mathbf{F}_i}{|x_i + \lambda \mathbf{F}_i|},$$

e  $\lambda$  è scelta in modo da rendere massima la convergenza; se il passaggio fornisce un valore di energia per  $x'_i$  più alto di quello per  $x_i$ , allora  $\lambda$  viene automaticamente modificata per far decrescere l'energia.

Tale algoritmo, pur non fornendo eccellenti risultati in quanto la sua convergenza è lineare, è molto semplice e quindi di facile applicazione.

## 3.2. Descrizione del programma

Presentiamo ora un listato del programma in Mathematica. Divideremo questa sezione in tre parti: la prima dedicata al listato del programma riferito alla ricerca delle configurazioni ottimali; la seconda, che determina tutti i possibili allineamenti dei punti di tale configurazione e la terza, riferita alla visualizzazione generale di configurazioni e allineamenti.

### 3.2.1. Minimizzazione

```
Clear [Normalizza]
Normalizza[punti:{{_,_}...}] :=
Module[{q=Map[{-#punti[[1]]}&,punti]},Map[Normalizza,q]]
Normalizza[{x_,y_}] := {x-Floor[x],y-Floor[y]}
```

Questa parte di programma ha due funzioni: la prima, fondamentale, è quella di quotizzare  $\mathbb{R}^2$  su  $[0,1] \times [0,1]$ . Ogni punto, infatti, viene riportato nel quadrato unitario prendendo solo la sua parte decimale ("normalizzato"):

```
Normalizza[{x_,y_}] := {x-Floor[x],y-Floor[y]}.
```

La seconda è quella di traslare uno dei punti in  $(0,0)$  e, di conseguenza, traslare anche tutti gli altri senza perdita di generalità per la soluzione:

```
Module[{q=Map[{-#punti[[1]]}&,punti]},Map[Normalizza,q]].
```

Passiamo ora ad analizzare la parte più importante di tutto il programma.

```
Clear [Ottimizza]
Ottimizza[n_Integer,energia_,goal:(Min|Max):Min,
opts___?OptionQ] :=
```



```

Ottimizza[Table[{Random[],Random[]},{n}],energia,goal,opts]
Ottimizza[punti_list,energia_,goal:(Min|Max):Min,
  opts___?OptionQ]:=
Module[{sgn=If[goal===Min,1,-1],m=Length[punti],
  x=N[Flatten[punti]]},
Module[{X=Table[{ToExpression[StringJoin
  ["x",ToString[i]]],
  ToExpression[StringJoin
  ["y",ToString[i]]]},{i,m}]},
Module[{F=FindMinimum[Evaluate[sgn energia[X]],
  Evaluate[Apply[Sequence,
    Thread[{Flatten[X],x}]]],opts]},
Module[{V=sgn F[[1]],Y=Normalizza[X/.F[[2]]]},
  ListPlot[Y,AspectRatio->Automatic,
  Frame->True,Axes->False,
  PlotStyle->AbsolutePointSize[4],
  PlotRange->{{0,1},{0,1}};{V,Y}]]]]]

Clear[Disponi]
Disponi[n_,a_,b_]:=Module[{g=GCD[a,b]},
  Module[{p=a/g,q=b/g},
  Module[{m=a^2+b^2},
  Module[{l=If[g==1,n,m/g]},
  Normalizza[Take[Flatten[
    Table[i/l{q,p}+jg/m{-p,q},
    {i,1,1},{j,0,g-1}],1],n]]]]]]]

EnergiaR4[p_][x_list]:=Module[{n=length[x]},
  Sum[(((Cos[2 Pi x[[i,1]]]-Cos[2 Pi x[[j,1]]]^2+
  (Sin[2 Pi x[[i,1]]]-Sin[2 Pi x[[j,1]]]^2+
  (Cos[2 Pi x[[i,2]]]-Cos[2 Pi x[[j,2]]]^2+
  (Sin[2 Pi x[[i,2]]]-Sin[2 Pi x[[j,2]]]^2)^(p/2),

```

$$\{i,1,n\},\{j,i+1,n\}\}$$

```
EnergiaR4[0][x_list]:=Module[{n=length[x]},
  Sum[Log[(Cos[2 Pi x[[i,1]]]- Cos[2 Pi x[[j,1]]]^2+
    (Sin[2 Pi x[[i,1]])- Sin[2 Pi x[[j,1]]]^2+
    (Cos[2 Pi x[[i,2]])- Cos[2 Pi x[[j,2]]]^2+
    (Sin[2 Pi x[[i,2]])- Sin[2 Pi x[[j,2]]]^2)],
    {i,1,n},{j,i+1,n}]]
```

In questa parte di programma viene definita la funzione *OTTIMIZZA* dipendente da vari parametri:

- il numero di punti da ottimizzare o una lista predefinita di essi;
- il tipo di energia da utilizzare per l'ottimizzazione;
- l'indicazione al programma circa il tipo di ottimizzazione: massimizzazione o minimizzazione
- una o più opzioni riguardanti, ad esempio, il numero massimo di iterate da compiere per trovare l'ottimo.

Per quanto riguarda l'input principale, facciamo tre distinzioni: possiamo, infatti, immettere direttamente al programma il numero  $N$  dei punti. In questo caso l'algoritmo inizierebbe ad applicare il metodo del gradiente a partire da una lista completamente casuale di  $N$  punti (`Table[Random[ ],Random[ ],n]`). Un altro modo consiste nel dare in pasto al programma una lista di punti esplicita che, magari, è stata ottenuta da una elaborazione precedente. Infine, si può utilizzare il sottoprogramma *DISPONI*: questo è applicabile ogni qualvolta  $\exists a, b \in \mathbb{N} : N = a^2 + b^2$  oppure quando  $(a, b) = 1$ . In questo modo l'input del programma consiste di una configurazione  $\omega_N$  di punti che sono già allineati lungo particolari geodetiche o una sola di esse: ciò dipende dal massimo comun divisore di  $a$  e  $b$ . Se esso è uguale ad 1 la disposizione dei punti avverrà su un'unica geodetica, altrimenti ciò sarà effettuato su  $g = (a, b)$  geodetiche tra loro parallele ed equidistanti. Quest'ultimo modo di immissione dei dati è stato preso in considerazione visto che, nei casi in cui  $N$  soddisfa certe ipotesi (vedi sezione 1.2), la configurazione immessa ci dà un valore di minimo locale

di  $\mathcal{E}$  e viene quindi riproposta come output dal programma. Inoltre la differenza tra i valori di minimo trovati in maniera randomica e quelli ottenuti con quest'ultimo metodo è trascurabile.

Il secondo argomento della funzione *OTTIMIZZA* è dato dalla funzione *ENERGIAR4*. Il nostro obiettivo è quello di ottimizzare l' $\alpha$ -energia considerando la metrica piatta indotta dall'immersione del toro in  $\mathbb{R}^4$ . Il parametro  $p$  di *EnergiaR4* rappresenta proprio il nostro  $\alpha$ .

Il terzo parametro dipende in realtà proprio da  $p$ . Se infatti  $\alpha < 0$  il mio obiettivo è quello di minimizzare  $\mathcal{E}(\alpha, N)$ , mentre devo massimizzare quando  $0 \leq \alpha$ . Tuttavia questo parametro è stato lasciato indipendente da  $p$  e, in caso di mancata immissione, il programma minimizzerà la funzione obiettivo (goal:(Min|Max):Min).

L'ultimo argomento di *OTTIMIZZA* riguarda le opzioni della funzione *FINDMINIMUM*, che possono essere di vario tipo: accuratezza e precisione del valore trovato, massimo numero di iterazioni da effettuare, il numero di cifre da utilizzare nella computazione, etc.

Nella costruzione di questa parte di programma sono state usate alcune indispensabili variabili: non esistendo una funzione del tipo *FINDMAXIMUM* in Mathematica, si è dovuto definire la variabile *sgn* che vale 1 se dobbiamo minimizzare, -1 altrimenti; di conseguenza, la funzione di cui trovare il minimo sarà *sgn*×energia[X] in cui energia è l'argomento immesso e X è un vettore lungo  $2m$  ( $m$  è il numero di punti immessi) formato dalle coordinate  $x$  e  $y$  dei punti stessi ( $X=Table[\dots, \{i, m\}]$ ).

Il risultato della funzione *FINDMINIMUM* consta di due parti: la prima, in cui è contenuto il valore ottimo, e la seconda, contenente le coordinate del punto di minimo (qualcosa del tipo  $\{\mathcal{E}, \{\{x_1 \rightarrow x_1^\circ\}, \dots, \{x_{2m} \rightarrow x_{2m}^\circ\}\}\}$ ). Alla variabile F verrà assegnato il risultato della funzione suddetta. A questo punto verrà assegnato alla variabile V la prima parte di F, cioè il valore ottimo ( $V=sgn F[[1]]$ ), e ad Y la lista degli  $m$  punti facenti parte della configurazione ottima; detti punti sono già normalizzati ( $Y=Normalizza[X/.F[[2]]$ ); qui viene utilizzato l'operatore di assegnazione  $"/.$ : ciò è necessario poichè il secondo

argomento di  $F$  contiene le coordinate del punto di minimo nella forma di regole di sostituzione ( $x_i \rightarrow x_i^\circ$ ).

Tramite la funzione `ListPlot` vengono visualizzati il valore  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$  e la configurazione ottima  $\omega_N$ . Le opzioni riguardano il grafico in output: rapporto tra lunghezze verticali e orizzontali, tipo di grafico da visualizzare (quadrato unitario), larghezza dei punti della configurazione, etc. Un esempio di risultato è visualizzato nella figura seguente (3.1).

```
Ottimizza[33,EnergiaR4[-1],Min,MaxIterations->200]
```

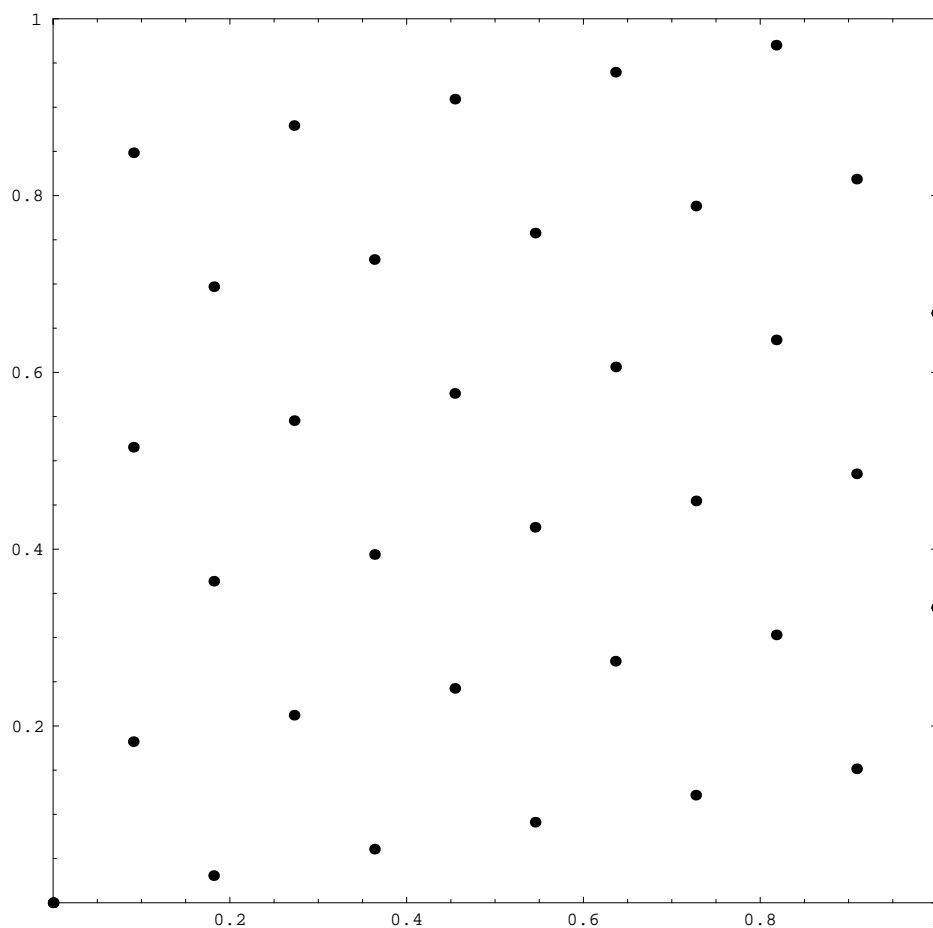


Figura 3.1.

```
{290.852,{{0.,0.},{0.818172,0.303028},{0.545249,0.424778},...
...,{0.636408,0.606162},{0.454479,0.242539},{0.181793,0.696918}}}
```

### 3.2.2. Ricerca degli allineamenti

In questa sezione è listato il programma per la ricerca degli allineamenti, che si traduce anche nella ricerca delle geodetiche contenenti l'intera configurazione.

```
Clear [Allineamenti]
Allineamenti[_Real,punti_List,param___]:=
  Allineamenti[punti,param]
Allineamenti[punti_List,k:(_?NumberQ):1,m:(_?NumberQ):20,
  e:(_?NumberQ):-5,opts___?OptionQ]:=
Module[{n=Length[punti],t},Module[{v=Map[(#-Round[#]&,
  Flatten[Table[punti[[i]]-punti[[j]],{i,1,n},{j,i+1,n}],1]]},
  Module[{a=Map[If[#>=0,#,#+Pi]&,Map[Apply[ArcTan,#]&,v]],
    b=Map[Sqrt#[[1]]^2+#[[2]]^2&,v]},
Module[{f=-Apply[Plus,MapThread[(E^(-(kn(t-#1))^2)/#2)&,{a,b}]]},
  Module[{l=t/.Map[Last,Sort[Table[FindMinimum[f,{t,i/m Pi},opts],
    {i,0,m}]]]}],
  1//.{x1____,x2_,x3____,x4_,x5____}/;Abs[x4-x2]<10^e->
  {x1,x2,x3,x5}}]]]]
```

L'output di *OTTIMIZZA* costituisce l'input di questo programma insieme ad alcuni parametri che analizzeremo nel corso del commento. In effetti il valore ottimo della funzione obiettivo viene ignorato da *ALLINEAMENTI* che elabora solo le configurazioni.

Vengono definite alcune variabili quali  $n$  (numero dei punti della configurazione),  $t$  (variabile locale non inizializzata),  $v$  (lista di vettori congiungenti ogni coppia di punti della configurazione),  $a$  (lista di angoli compresi tra 0 e

$2\pi$ , angoli individuati dall'arco la cui tangente è  $v$ ),  $b$  (lista delle norme dei vettori  $v$ ).

A questo punto viene definita la funzione  $f$  che dovrà minimizzare:

$$f = - \sum_i e^{-\frac{(kn(t - a_i))^2}{b_i}}.$$

Questa funzione rappresenta la sommatoria negativa di campane di Gauss aventi una circonferenza centrata nell'origine come dominio: il parametro  $k$  ci dice quanto è stretta ognuna di queste (più  $k$  è grande più la campana è stretta); ogni campana è centrata in  $a$  e l'altezza di ogni campana dipende da  $b$  (più  $b$  è grande, più è bassa la campana).

Il problema consiste nello scegliere, tra tutte le direzioni possibili a partire dal punto  $(0,0)$ , quelle che vanno verso la direzione in cui la somma delle campane è massima. Ovviamente il peso di ogni campana centrata in  $a$  sarà più grande quanto più vicino si trova il punto individuato dall'angolo  $a$ . Il parametro  $k$  è stato scelto uguale ad 1: aumentando troppo il valore di  $k$  le campane saranno molto strette ed un maggior numero di direzioni privilegiate farà parte dell'output del programma, anche quelle che, in effetti, allineano ben poco. A questo punto viene applicata la funzione FindMinimum alla  $f$ . Ciò avviene a partire (prima iterata) da  $m$  punti equidistanti posti sulla circonferenza unitaria: maggiore è  $m$ , maggiore sarà il numero di allineamenti trovati. La variabile  $m$  è stata inizializzata a 20. Una volta trovato il minimo ci sbarazziamo del valore della funzione obiettivo (comando Last) non dopo aver ordinato in modo crescente (Sort) tutte le direzioni corrispondenti ai valori stessi; chiameremo  $l$  tale lista.

A questo punto vogliamo sbarazzarci di tutte quelle direzioni che sono "quasi" uguali ad un'altra direzione: questo lo decidiamo tramite un controllo iterativo che ad ogni passo scarta una direzione molto vicina ad un'altra e si blocca nel momento in cui nessuna coppia di direzioni abbia una differenza minore di  $10^e$ : ecco quindi un altro parametro che all'inizio di *ALLINEAMENTI* abbiamo posto uguale a -5. Maggiore è il valore di  $e$ , maggiore sarà il numero di allineamenti "quasi" uguali. Output del programma sarà, quindi, una lista di angoli privilegiati espressi in radianti.

```
Allineamenti [%]
{2.11122,0.165151,.....,0.825377,2.39066}
```

Il simbolo % nell'argomento di *ALLINEAMENTI* indica che l'input del programma corrisponde all'ultimo risultato ottenuto precedentemente.

### 3.2.3. Visualizzazione

Passiamo ad esaminare l'ultima parte del programma: *VISUALIZZA*. L'output richiesto è dato dal grafico della configurazione (già dato come input), e degli allineamenti (quindi delle geodetiche) passanti per tutti i punti di  $\omega_N$  giacenti sulle direzioni privilegiate trovate con *ALLINEAMENTI*.

```
Clear[Visualizza]
Visualizza[[_Real,punti_List],direzioni_:{},opts___?OptionQ]:=
Visualizza[punti,direzioni,opts]
Visualizza[punti_List,direzioni_:{},opts___?OptionQ]:=
Module[{P=ListPlot[punti,opts,PlotStyle->AbsolutePointSize[4],
  DisplayFunction->Identity],L=Graphics[{GrayLevel[.5],
  Outer[Line[{-#1-10{Cos[#2],Sin[#2]},#1+10{Cos[#2],Sin[#2]}]}]&,
  punti,Flatten[{direzioni}],1]}]},
  Show[{L,P},AspectRatio->Automatic,Frame->True,
  Axes->False,PlotRange->{{0,1},{0,1}},
  DisplayFunction->${DisplayFunction}]
```

In realtà, per motivi pratici, anche  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$  è parte integrante degli input del programma (Real), ma è evidente che nell'elaborazione dei dati questa informazione non viene utilizzata. Le parentesi graffe dopo l'input *Direzioni*, stanno a significare che in caso di mancata immissione di quell'argomento, si intenderà vuota la lista delle direzioni e quindi, in uscita, sarà visualizzata la sola configurazione  $\omega_N$ . La lista degli argomenti di input termina con delle opzioni utili alla funzione grafica *ListPlot* che saranno aggiunte alla specificazione della larghezza dei punti di  $\omega_N$  (*AbsolutePointSize*), ed all'intensità delle linee che rappresentano le geodetiche in uscita (*GrayLevel*).

Vengono creati due grafici senza essere visualizzati, P e L, tramite la funzione `DisplayFunction→Identity`: il primo rappresenta  $\omega_N$ ; il secondo viene costruito nel semplice modo seguente: tramite il comando `Outer`, viene applicata una particolare funzione ai punti ed agli angoli immessi. Per ogni punto della configurazione vengono creati due segmenti (`Line`) abbastanza lunghi (10) da essere visualizzati completamente nel quadrato unitario e giacenti sui versori individuati da ognuno degli angoli privilegiati.

```
Outer[Line[{{#1-10{Cos[#2],Sin[#2]},#1+10{Cos[#2],Sin[#2]}}]&,
      punti,Flatten[{direzioni}]
```

I cancelletti seguiti da indice 1 o 2 indicano che la costruzione di tali segmenti avviene sui due argomenti di `Outer` successivi alla funzione `Line`: sui punti e sulle direzioni. In definitiva viene creata una matrice del tipo `Line(punti,angoli)` formata da tutti i segmenti che compariranno in uscita.

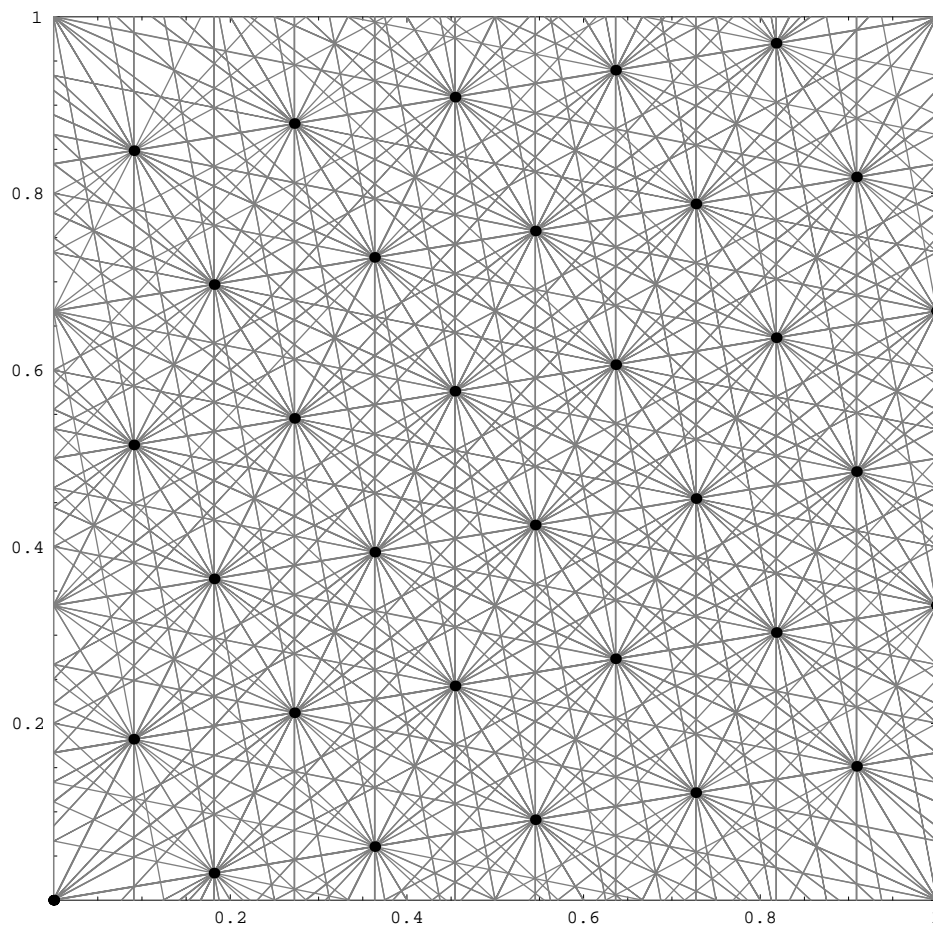
Tramite il comando `Show`, vengono visualizzati i due grafici costruiti (P e L). La sovrapposizione dei due avviene tramite l'utilizzo dell'opzione `DisplayFunction→$DisplayFunction`. Con l'utilizzo di un'altra opzione, `PlotRange→{{0,1},{0,1}}`, si evita di visualizzare le parti di segmenti costruiti con `Outer` che in realtà uscirebbero abbondantemente dal quadrato unitario.



Ecco tutti i possibili allineamenti della configurazione fin'ora considerata:

$\omega_{33}$ .

Visualizza[%,%]



**Figura 3.2.**

Volendo possiamo visualizzare solo una o più geodetiche: basta specificare nel secondo argomento quale direzione vogliamo. Ad esempio la prima data da *ALLINEAMENTI*.

```
Visualizza[%%,%%[[1]]]
```

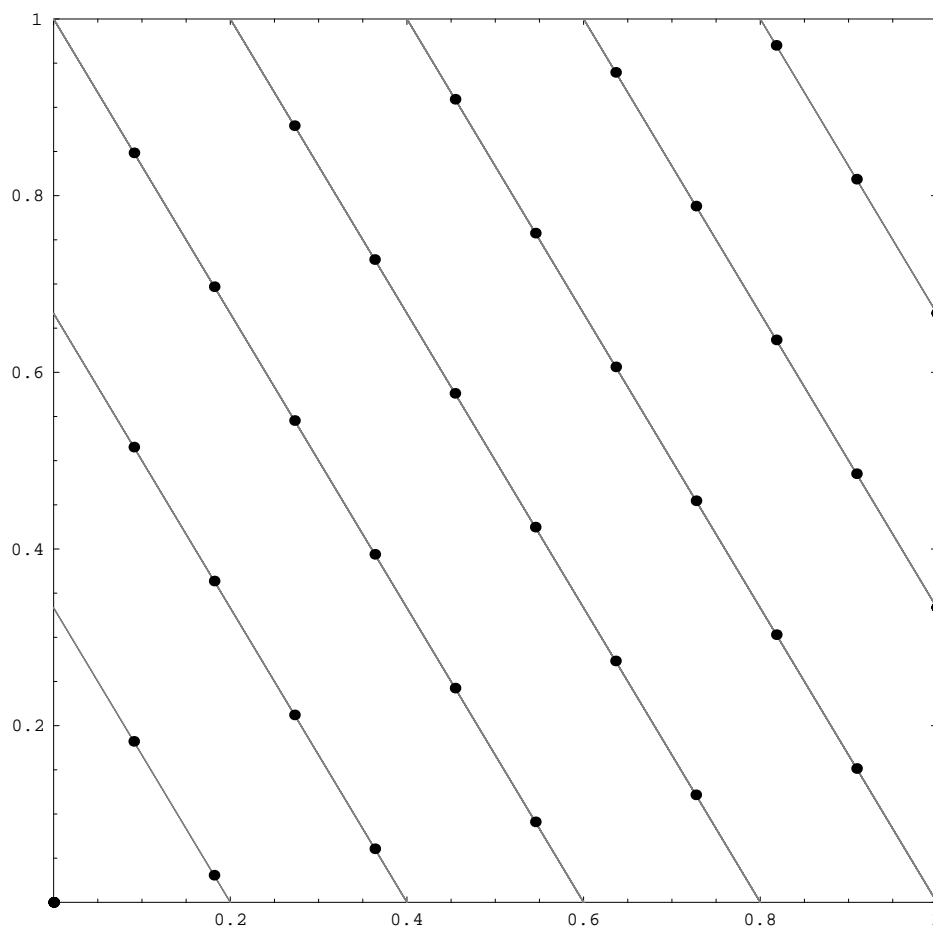


Figura 3.3.

# Capitolo 4

## Risultati numerici

L'algoritmo di ottimizzazione descritto nel capitolo precedente è stato utilizzato nei casi più significativi  $\alpha = -2, -1, 0, +1$  sia per il calcolo di  $\mathcal{E}(\alpha_N)$  per  $N$  fino a 49 ( per  $\alpha = 0$  fino a 55) sia per la ricerca delle rispettive configurazioni che la determinano.

### 4.1. Valori ottimali dell'energia

Mostriamo ora i risultati dell'ottimizzazione di  $E(\alpha, N)$  nelle tabelle 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

$N$	$\mathcal{E}(-2, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(-2, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(-2, \omega_N)$
2	0.125	18	44.2905	34	188.478
3	0.5	19	50.3345	35	201.315
4	1.125	20	56.5401	36	214.538
5	2	21	63.3266	37	228.144
6	3.25	22	70.4156	38	242.052
7	4.75	23	77.7297	39	256.294
8	6.5	24	85.6421	40	271.607
9	8.75	25	94.1434	41	287.136
10	11.25	26	102.933	42	302.694
11	14.1158	27	112.266	43	319.435
12	17.2143	28	121.591	44	336.293
13	20.8	29	131.895	45	352.922
14	24.7912	30	142.013	46	371.070
15	29.0909	31	153.218	47	389.628
16	33.8605	32	164.353	48	408.369
17	38.936	33	176.347	49	427.305

**Tabella 4.1.** Risultati della minimizzazione della  $-2$ -energia

$N$	$\mathcal{E}(-1, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(-1, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(-1, \omega_N)$
2	0.353553	18	80.2054	34	309.643
3	1.22474	19	90.1636	35	329.112
4	2.59808	20	100.6	36	349.178
5	4.47214	21	111.703	37	369.819
6	6.94949	22	123.354	38	391.009
7	9.93185	23	135.517	39	412.772
8	13.4142	24	148.349	40	435.332
9	17.5734	25	161.847	41	458.452
10	22.2325	26	175.885	42	481.993
11	27.477	27	190.52	43	506.379
12	33.2192	28	205.684	44	531.275
13	39.6051	29	221.554	45	556.552
14	46.5895	30	237.893	46	582.734
15	54.1208	31	255.006	47	609.546
16	62.2772	32	272.557	48	636.89
17	70.9768	33	290.852	49	664.742

**Tabella 4.2.** Risultati della minimizzazione della  $-1$ -energia

$N$	$\mathcal{E}(0, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(0, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(0, \omega_N)$
2	2.07944	20	252.828	38	891.431
3	5.37528	21	278.165	39	938.226
4	10.0439	22	304.754	40	986.005
5	16.0944	23	332.649	41	1035.02
6	23.2272	24	361.629	42	1085.37
7	31.7149	25	391.701	43	1136.68
8	41.5888	26	423.031	44	1189.26
9	52.4084	27	455.548	45	1243.24
10	64.6146	28	489.327	46	1298.08
11	77.9858	29	524.160	47	1354.11
12	92.7198	30	560.339	48	1411.39
13	108.534	31	597.481	49	1469.98
14	125.513	32	636.030	50	1529.68
15	143.749	33	675.570	51	1590.42
16	163.115	34	716.415	52	1652.48
17	183.751	35	758.370	53	1715.81
18	205.681	36	801.496	54	1780.07
19	228.570	37	845.841	55	1845.51

**Tabella 4.3.** Risultati della minimizzazione nel caso logaritmico

$N$	$\mathcal{E}(1, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(1, \omega_N)$	$N$	$\mathcal{E}(1, \omega_N)$
2	2.82843	18	307.403	34	1103.40
3	7.34847	19	342.738	35	1169.42
4	13.8564	20	380.036	36	1237.40
5	22.3607	21	419.227	37	1307.27
6	32.6969	22	460.348	38	1379.09
7	45.0053	23	503.416	39	1452.82
8	59.3137	24	548.376	40	1528.44
9	75.4195	25	595.235	41	1605.98
10	93.5249	26	644.025	42	1685.45
11	113.524	27	694.734	43	1766.83
12	135.497	28	747.375	44	1850.12
13	159.348	29	801.889	45	1935.33
14	185.106	30	858.390	46	2022.50
15	212.799	31	916.748	47	2111.53
16	242.363	32	977.065	48	2202.49
17	273.926	33	1039.25	49	2295.39

**Tabella 4.4.** Risultati della massimizzazione delle distanze

## 4.2. Configurazioni ottimali

Nella tabella 4.5 sono elencate alcune delle geodetiche contenenti le corrispondenti configurazioni. Alcune di esse sono asteriscate: ciò sta a significare che la geodetica non contiene esattamente la configurazione ottima ma la approssima soltanto. Tuttavia, la disposizione forzata di tali punti su dette geodetiche, è una soluzione di ottimo locale che si avvicina molto a  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$ .

L'assenza di geodetiche non asteriscate nella casella corrispondente a  $N$  indica che la configurazione  $\omega_N$  non si allinea su nessuna geodetica e, quindi, che c'è un seppur piccolo divario tra  $\mathcal{E}(\alpha, \omega_N)$  ed il valore  $E(\alpha, N)$  corrispondente alla configurazione allineata sulla geodetica che meglio approssima  $\mathcal{E}$ .

Nella tabella 4.6 sono indicati, per le configurazioni ottime non allineate e per quelle non allineate su geodetiche  $\mathcal{C}_{p,q}$  con  $(p, q) = 1$ , i valori corrispondenti delle configurazioni che giacciono sulla geodetica migliore ed il corrispondente errore relativo.

$N$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$N$	$\mathcal{C}_{p,q}$
2	$\mathcal{C}_{1,1}$	26	$\mathcal{C}_{3,4} \mathcal{C}_{2,5} \mathcal{C}_{2,6}$
3	$\mathcal{C}_{1,1}$	27	$\mathcal{C}_{3,4} \mathcal{C}_{1,6}$
4	$\mathcal{C}_{1,2}^*$	28	$\mathcal{C}_{2,5} \mathcal{C}_{1,5} \mathcal{C}_{4,4}$
5	$\mathcal{C}_{1,2}$	29	$\mathcal{C}_{4,4}^* \mathcal{C}_{2,5}^*$
6	$\mathcal{C}_{1,2}$	30	$\mathcal{C}_{3,5} \mathcal{C}_{0,6} \mathcal{C}_{0,10}$
7	$\mathcal{C}_{2,2}$	31	$\mathcal{C}_{3,5}^*$
8	$\mathcal{C}_{2,2} \mathcal{C}_{2,4}^* \mathcal{C}_{2,3}^*$	32	$\mathcal{C}_{3,5} \mathcal{C}_{4,4}$
9	$\mathcal{C}_{2,2} \mathcal{C}_{1,3}^*$	33	$\mathcal{C}_{3,5} \mathcal{C}_{1,6} \mathcal{C}_{3,6}$
10	$\mathcal{C}_{2,2} \mathcal{C}_{1,3}^* \mathcal{C}_{2,4}^*$	34	$\mathcal{C}_{4,5} \mathcal{C}_{1,3} \mathcal{C}_{1,6}$
11	$\mathcal{C}_{1,3} \mathcal{C}_{2,5} \mathcal{C}_{4,5}$	35	$\mathcal{C}_{3,5} \mathcal{C}_{5,15} \mathcal{C}_{0,7}$
12	$\mathcal{C}_{2,3} \mathcal{C}_{3,6}$	36	$\mathcal{C}_{4,5}^*$
13	$\mathcal{C}_{1,5} \mathcal{C}_{2,3}$	37	$\mathcal{C}_{4,5}^*$
14	$\mathcal{C}_{2,3} \mathcal{C}_{1,4} \mathcal{C}_{2,4}$	38	$\mathcal{C}_{4,5} \mathcal{C}_{2,7} \mathcal{C}_{2,6}$
15	$\mathcal{C}_{1,4} \mathcal{C}_{5,5}$	39	$\mathcal{C}_{4,5} \mathcal{C}_{1,7} \mathcal{C}_{3,6}$
16	$\mathcal{C}_{2,4} \mathcal{C}_{6,4} \mathcal{C}_{3,3}^*$	40	$\mathcal{C}_{4,5}$
17	$\mathcal{C}_{3,3}$	41	$\mathcal{C}_{4,5}^* \mathcal{C}_{1,9}^*$
18	$\mathcal{C}_{3,3} \mathcal{C}_{1,5} \mathcal{C}_{2,4}$	42	$\mathcal{C}_{4,6} \mathcal{C}_{3,6} \mathcal{C}_{0,7}$
19	$\mathcal{C}_{2,4}^*$	43	$\mathcal{C}_{4,5} \mathcal{C}_{2,7} \mathcal{C}_{1,12}$
20	$\mathcal{C}_{3,4} \mathcal{C}_{1,8} \mathcal{C}_{0,5} \mathcal{C}_{4,8}$	44	$\mathcal{C}_{4,5} \mathcal{C}_{1,8}$
21	$\mathcal{C}_{1,4}^*$	45	$\mathcal{C}_{2,7} \mathcal{C}_{5,5} \mathcal{C}_{3,6}$
22	$\mathcal{C}_{2,4}^* \mathcal{C}_{1,6}^* \mathcal{C}_{0,11}^*$	46	$\mathcal{C}_{1,7}^* \mathcal{C}_{2,22}^*$
23	$\mathcal{C}_{3,4} \mathcal{C}_{1,4} \mathcal{C}_{1,5}$	47	$\mathcal{C}_{1,7}$
24	$\mathcal{C}_{3,4} \mathcal{C}_{0,6} \mathcal{C}_{0,8}$	48	$\mathcal{C}_{2,7}^*$
25	$\mathcal{C}_{3,4}$	49	$\mathcal{C}_{4,6}^* \mathcal{C}_{0,8}^* \mathcal{C}_{1,7}^*$

**Tabella 4.5.** Tabella delle geodetiche associate alle configurazioni  $\omega_N$

$N$	$\mathcal{C}$	$E(1, N)$	ERR	$N$	$\mathcal{C}$	$E(1, N)$	ERR
4	$\mathcal{C}_{1,2}$	13.798	0.00423	22	$\mathcal{C}_{1,6}$	460.342	0.00001
7	$\mathcal{C}_{1,2}$	44.953	0.00115	29	$\mathcal{C}_{2,5}$	801.867	0.00003
8	$\mathcal{C}_{2,3}$	59.075	0.04041	31	$\mathcal{C}_{3,5}$	916.715	0.00004
9	$\mathcal{C}_{1,3}$	75.3647	0.00072	36	$\mathcal{C}_{4,5}$	1237.37	0.00002
10	$\mathcal{C}_{1,3}$	93,5045	0.00022	37	$\mathcal{C}_{4,5}$	1307.26	0.00001
17	$\mathcal{C}_{1,4}$	273.869	0.00021	41	$\mathcal{C}_{4,5}$	1605.97	0.00001
19	$\mathcal{C}_{1,4}$	342.691	0.00013	48	$\mathcal{C}_{2,7}$	2202.45	0.00002
21	$\mathcal{C}_{1,4}$	419.09	0.00033	49	$\mathcal{C}_{1,7}$	2295.30	0.00004

**Tabella 4.6.** Errore relativo a  $\mathcal{E}$  tra configurazioni allineate e non

Confrontiamo nelle figure seguenti tre configurazioni ottime non allineate, con le configurazioni che meglio approssimano  $\mathcal{E}$  poste su una geodetica (nel terzo caso su tutte) (figure 4.1, 4.2 e 4.3).

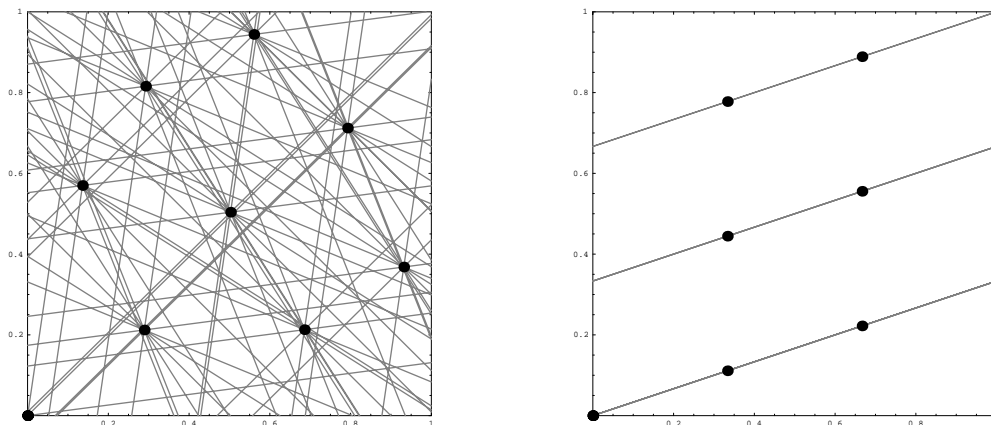


Figura 4.1.

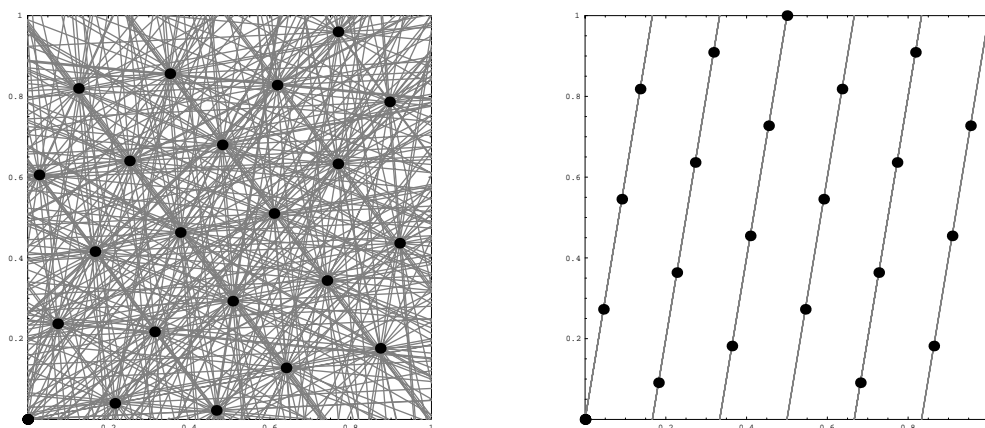


Figura 4.2.

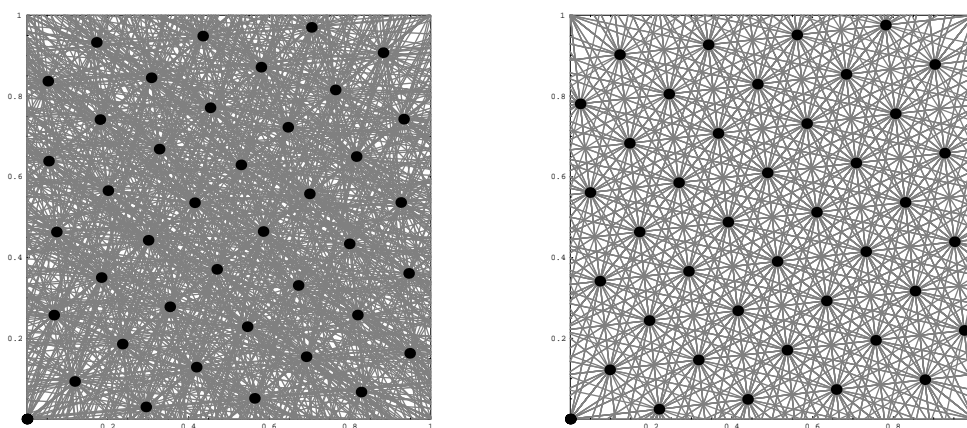


Figura 4.3.

### 4.3. Confronto con la stima asintotica

Utilizzando il teorema 2.2.1 della sezione 2.2 possiamo sostituire i coefficienti delle espressioni 2.5 e 2.6 in modo da ottenere una stima numerica per  $\mathcal{E}$  che si adatti ai risultati numerici ottenuti con il minimo errore possibile. La stima di  $\mathcal{E}(-1, \omega_N)$  sarà una stima asintotica dall'alto, mentre quella per  $\mathcal{E}(1, \omega_N)$  sarà una stima asintotica dal basso.

Tramite l'utilizzo del Mathematica abbiamo stimato numericamente il valore dell'integrale 2.2 per  $\alpha = \pm 1$ :

$$\beta(r^{-1}) = 0.634232$$

$$\beta(r) = 1.91618$$

I risultati numerici determinano le seguenti stime:

$$f(-1, N) = 0.317116 \cdot N^2 - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{N^3}{2}};$$

$$f(1, N) = 0.95809 \cdot N^2 - \pi \sqrt{2N}.$$

Di seguito mostriamo le tabelle 4.7 e 4.8 in cui mettiamo a confronto i valori ottimali con la stima asintotica.

Per vedere graficamente la sua tendenza, osserviamo nelle figure 4.4 e 4.5 i grafici che rappresentano l'andamento di

$$\frac{\mathcal{E}(\alpha, \omega_N) - f(\alpha, N)}{f(\alpha, N)};$$

sono stati calcolati gli errori relativi alla stima per  $N$  fino a 50.



$N$	$\mathcal{E}(-1, \omega_N)$	$f(-1, N)$	-Err	$N$	$\mathcal{E}(-1, \omega_N)$	$f(-1, N)$	-Err
2	0.35355	1.10931	0.5219	26	175.885	206.910	0.1467
3	1.22474	2.56166	0.4381	27	190.520	223.283	0.1440
4	2.59808	4.62370	0.3873	28	205.684	240.282	0.1409
5	4.47214	7.29878	0.3437	29	221.554	257.907	0.1386
6	6.94949	10.5892	0.3149	30	237.893	276.158	0.1357
7	9.93185	14.4966	0.2948	31	255.006	295.036	0.1335
8	13.4142	19.0222	0.2728	32	272.557	314.541	0.1309
9	17.5734	24.1671	0.2572	33	290.852	334.672	0.1288
10	22.2325	29.9322	0.2434	34	309.643	355.430	0.1266
11	27.4770	36.3182	0.2333	35	329.112	376.816	0.1245
12	33.2192	43.3256	0.2227	36	349.178	398.828	0.1225
13	39.6051	50.9551	0.2131	37	369.819	421.468	0.1208
14	46.5895	59.2071	0.2051	38	391.009	444.734	0.1192
15	54.1208	68.0821	0.1972	39	412.772	468.629	0.1172
16	62.2772	77.5804	0.1907	40	435.332	493.150	0.1155
17	70.9768	87.7024	0.1853	41	458.452	518.300	0.1141
18	80.2054	98.4484	0.1790	42	481.993	544.076	0.1124
19	90.1636	109.819	0.1741	43	506.379	570.481	0.1108
20	100.600	121.813	0.1691	44	531.275	597.514	0.1097
21	111.703	134.433	0.1647	45	556.552	625.174	0.1082
22	123.354	147.678	0.1611	46	582.734	653.462	0.1067
23	135.517	161.548	0.1573	47	609.546	682.378	0.1054
24	148.349	176.043	0.1533	48	636.890	711.923	0.1042
25	161.847	191.164	0.1500	49	664.742	742.095	0.1030

**Tabella 4.7.** Valori ottimali e stime di  $\mathcal{E}(-1, \omega_N)$  a confronto

$N$	$\mathcal{E}(1, \omega_N)$	$f(1, N)$	Err	$N$	$\mathcal{E}(1, \omega_N)$	$f(1, N)$	Err
2	2.82843	-2.4508	6.922	26	644.025	625.014	0.0287
3	7.34847	0.92751	1.1504	27	694.734	675.362	0.0271
4	13.8564	6.44367	0.5952	28	747.375	727.633	0.0256
5	22.3607	14.0177	0.3850	29	801.889	781.828	0.0244
6	32.6969	23.6084	0.2789	30	858.390	837.946	0.0231
7	45.0053	35.1916	0.2166	31	916.748	895.988	0.0221
8	59.3137	48.7514	0.1734	32	977.065	955.951	0.0210
9	75.4195	64.2766	0.1439	33	1039.25	1017.84	0.0201
10	93.5249	81.7594	0.1218	34	1103.40	1081.65	0.0192
11	113.524	101.194	0.1054	35	1169.42	1147.38	0.0184
12	135.497	122.574	0.0922	36	1237.40	1215.03	0.0176
13	159.348	145.898	0.0815	37	1307.27	1284.60	0.0169
14	185.106	171.162	0.0728	38	1379.09	1356.09	0.0163
15	212.799	198.363	0.0653	39	1452.82	1429.51	0.0157
16	242.363	227.500	0.0594	40	1528.44	1504.84	0.0151
17	273.926	258.570	0.0543	41	1605.98	1582.10	0.0146
18	307.403	291.572	0.0497	42	1685.45	1661.28	0.0140
19	342.738	326.504	0.0459	43	1766.83	1742.37	0.0135
20	380.036	363.367	0.0424	44	1850.12	1825.39	0.0131
21	419.227	402.158	0.0394	45	1935.33	1910.33	0.0127
22	460.348	442.877	0.0368	46	2022.50	1997.19	0.0122
23	503.416	485.522	0.0345	47	2111.53	2085.96	0.0119
24	548.376	530.094	0.0323	48	2202.49	2176.66	0.0115
25	595.235	576.592	0.0304	49	2295.39	2269.27	0.0112

**Tabella 4.8.** Valori ottimali e stime di  $\mathcal{E}(1, \omega_N)$  a confronto

$$\frac{\mathcal{E}(-1, \omega_N) - f(-1, N)}{f(-1, N)}$$

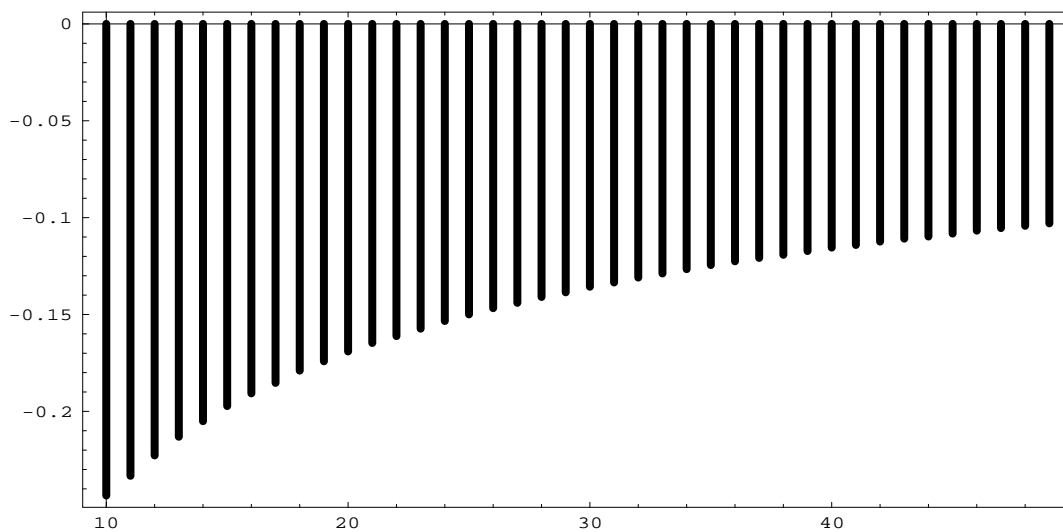


Figura 4.4. Errore nell'approssimazione di  $\mathcal{E}(-1, \omega_N)$

$$\frac{\mathcal{E}(1, \omega_N) - f(1, N)}{f(1, N)}$$

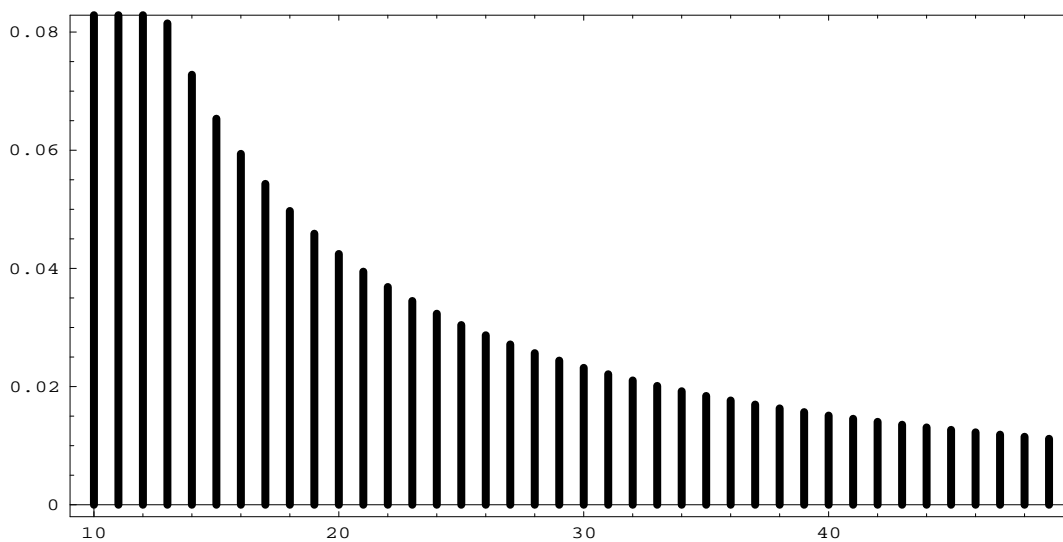


Figura 4.5. Errore nell'approssimazione di  $\mathcal{E}(1, \omega_N)$

## Elenco delle tabelle

4.1	Risultati della minimizzazione della $-2$ -energia . . . . .	42
4.2	Risultati della minimizzazione della $-1$ -energia . . . . .	43
4.3	Risultati della minimizzazione nel caso logaritmico . . . . .	43
4.4	Risultati della massimizzazione delle distanze . . . . .	44
4.5	Tabella delle geodetiche associate alle configurazioni $\omega_N$ . . . . .	45
4.6	Errore relativo a $\mathcal{E}$ tra configurazioni allineate e non . . . . .	45
4.7	Valori ottimali e stime di $\mathcal{E}(-1, \omega_N)$ a confronto . . . . .	48
4.8	Valori ottimali e stime di $\mathcal{E}(1, \omega_N)$ a confronto . . . . .	49

## Bibliografia

- [1] A.B.J. Kuijlaars, E.B. Saff: *Distributing many points on a sphere*, The Mathematical Intelligencer, No.19 (1997), pp.5-11.
- [2] S. Smale: *Mathematical problems for the next century*, The Mathematical Intelligencer, No.2 (1998), pp.7-15.
- [3] W. Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [4] E.A. Rakhmanov, E.Saff, Y.M. Zhou: *Minimal discrete energy on the sphere*, Math. Res. Lett., No. 1 (1994), pp. 647-662
- [5] J. Beck: *Sum of distances between points on a sphere*, Mathematika, No. 31 (1984), pp. 33-41.
- [6] T. Erber, G.M. Hockney: *Equilibrium configurations of  $N$  equal charges on a sphere*, J. Phys. A:Math. Gen., No. 24 (1991), pp. L1369-L1377.
- [7] L. Fejes Tóth: *On the sum of distances determined by a pointset*, Acta Math. Sci. Hungar., No. 7 (1956), pp. 397-401.
- [8] K.B. Stalarsky: *Spherical distributions of  $N$  points with maximal distance sum are well spaced*, Proc. Amer. Math. Soc., No. 48 (1975), pp. 203-206.