

## NAVIGATORE SATELLITARE E CAMMINI MINIMI

**Area di Matematica usata:** Ricerca Operativa

### Descrizione

L'attività è composta da un tabellone con rappresentata la penisola italiana e su di essa posizionati i maggiori centri abitati con opportuni collegamenti. Il numero di città e collegamenti può essere aumentato o diminuito a seconda della complessità e accuratezza che si vogliono dare al modello.

Ai fini della riuscita dell'attività è importante che l'intera rete di strade e poli possa essere staccata dal tabellone senza che vengano modificate le distanze tra le città direttamente collegate. Infatti, se si vuole partire da una città e conoscere il cammino di minima distanza per raggiungere una destinazione, basta prendere in mano i due poli d'interesse e dopo aver staccato dalla cartina tutta la rete stradale (linea spezzata), cercare di allontanarli il più possibile finché non diventerà teso un unico cammino, quello ottimale.

### Formalizzazione matematica:

Quello che si vede rappresentato sulla cartina italiana è un grafo  $G=(N,A)$ , dove  $N$  è l'insieme dei nodi (città) ed  $A$  l'insieme degli archi (strade).

Chiamiamo  $s$  il nodo origine e  $d$  il nodo destinazione: si vuole trovare il cammino da  $s$  a  $d$  la cui lunghezza (= somma delle lunghezze dei singoli archi) sia minima.

La questione può quindi essere formalizzata con un problema di programmazione lineare a costo minimo in cui le variabili selezionano l'insieme di archi desiderato rispettando però determinati vincoli:

- si può selezionare un solo arco uscente dall'origine;
- si può selezionare un solo arco entrante nella destinazione;
- per gli altri nodi, il numero di archi entranti selezionati deve essere uguale al numero di archi uscenti.

## Quale strada è la più breve? Quale strada mi conviene?

Ogni anno migliaia di famiglie si ritrovano ad attraversare la nostra bella Italia per raggiungere mete turistiche sparse da nord a sud. L'avvento del navigatore satellitare ci ha senz'altro semplificato le cose, ma, supponendo per un istante di non poterlo utilizzare, quale strada scegliereste per arrivare da Ancona ad Aosta?

### La matematica ci può aiutare?

**In pratica:** Se si vuole partire da una città e conoscere il cammino di minima distanza per raggiungere una destinazione, basta prendere in mano i due poli d'interesse e, dopo aver staccato dalla cartina tutta la rete stradale (linea spezzata), cercare di allontanarli il più possibile finché non diventerà teso un unico cammino, quello ottimale.



### In teoria:

Quello che vedete rappresentato sulla cartina italiana è un **grafo**  $G=(N,A)$ , dove  $N$  è l'insieme dei nodi (città) ed  $A$  l'insieme degli archi (strade). Chiamiamo  $s$  il nodo origine e  $d$  il nodo destinazione: si vuole trovare il cammino da  $s$  a  $d$  la cui lunghezza (= somma delle lunghezze dei singoli archi) sia minima.

La questione può quindi essere formalizzata con un **problema di programmazione lineare a costo minimo** in cui le **variabili** selezionano l'insieme di archi desiderato rispettando però determinati **vincoli**:

- si può selezionare un solo arco uscente dall'origine;
- si può selezionare un solo arco entrante nella destinazione;
- per gli altri nodi, il numero di archi entranti selezionati deve essere uguale al numero di archi uscenti.

(Per ridurre la complessità si può ricorrere al problema duale.)