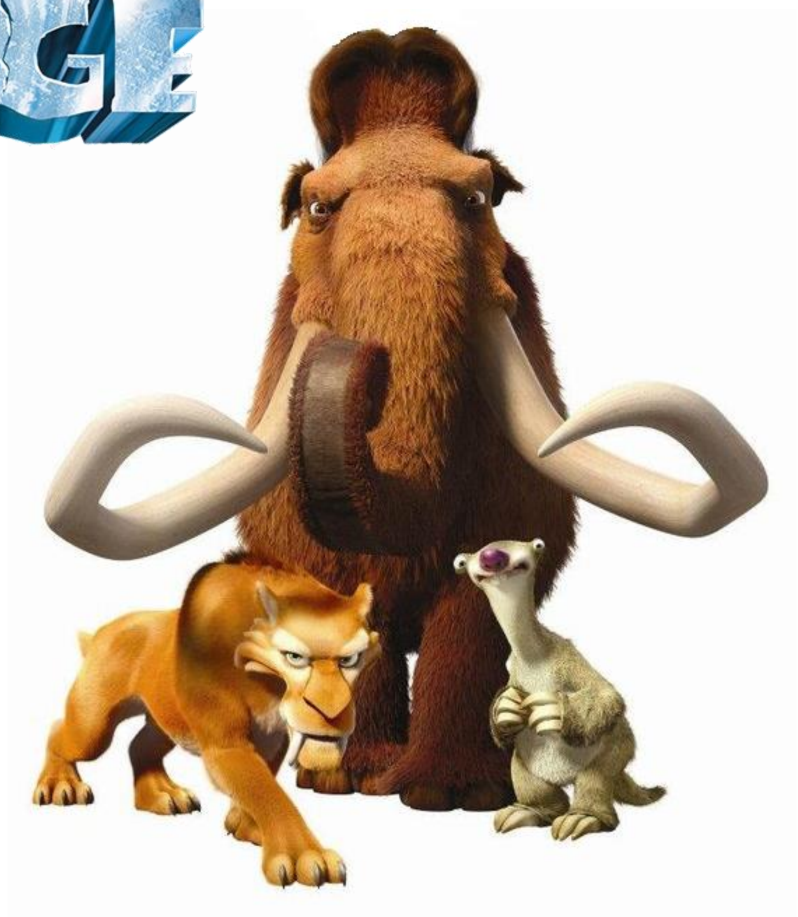
# GARA DI MATEMATICA ON-LINE (23/2/2022)

**Istruzioni Generali**

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x e il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$\sqrt{2} = 1,41$ $\quad$ $\sqrt{3} = 1,73$ $\quad$ $\sqrt{5} = 2,24$ $\quad$ $\pi = 3,14$



Gara scritta da:

Carlo Càssola

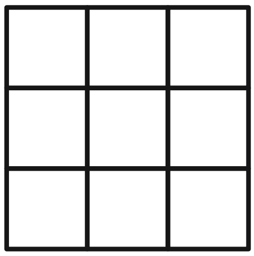
Sandro Campigotto

**SOLUZIONI GARA DI MATEMATICA ON-LINE (23/2/2022)**

**1. IL NUMERO DI SID [5256]**
Per avere un numero pari è necessario utilizzare la cifra $4$ o la cifra $8$ nella posizione delle unità. Il numero più grande è $8734$, mentre quello più piccole è $3478$. La loro differenza è $8734-3478=5256$.

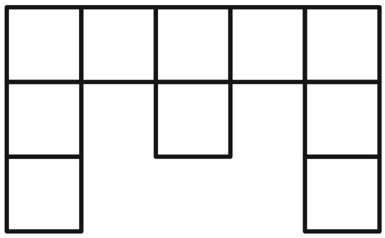
**2. MANFRED GIOCA COI DADI [10]**
Il valore più piccolo possibile è $3$ $(1-1-1)$ mentre quello più grande è $18$ $(6-6-6)$ per un totale di $16$ valori diversi. Da questi dobbiamo togliere tutti i numeri primi che sono sei: $3-5-7-11-13-17$. La risposta richiesta è $10$.

**3. IL PREMIO DI SKRAT [22]**



Contiamo i rettangoli $2\times1$. Ne abbiamo $2$ per ciascuna riga e per ciascuna colonna per un totale di $12$.
Di rettangoli $1\times3$ ce ne sono una per ciascuna riga ed uno per ciascuna colonna, per un totale di $6$.
I rettangoli $2\times3$ sono in tutto $4$.
Abbiamo un totale di $12+6+4=22$ rettangoli.

**4. I QUADRATI [88]**

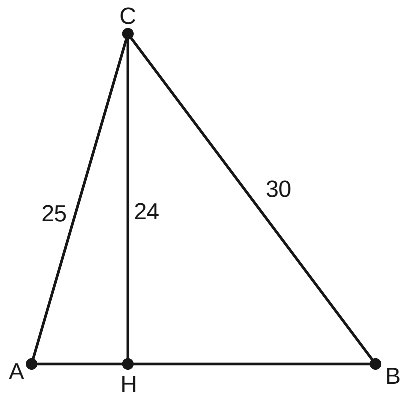


Il perimetro della figura è composto da $22$ segmenti lunghi come il lato del quadrato che misura $4\ \text{cm}$. Il perimetro misura $22\cdot4=88\ \text{cm}$.

**5. IL PROBLEMA DI DIEGO [16]**

$$\sqrt{n}+\sqrt{n}=\sqrt{64}$$
$$2\sqrt{n}=8$$
$$\sqrt{n}=4$$
$$n=16.$$

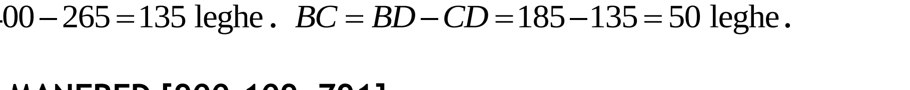
**6. IL DISEGNO DI SID [300]**




Sfruttando il teorema di Pitagora possiamo calcolare $AH=\sqrt{25^2-24^2}=7\ \text{cm}$ e $BH=\sqrt{30^2-24^2}=18\ \text{cm}$.
La base misura $AB=7+18=25\ \text{cm}$ e di conseguenza l'area vale $A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot CH}{2}=\dfrac{25\cdot24}{2}=300\ \text{cm}^2$.

**7. LE CONCHIGLIE DI SID [420]**
Il numero cercato è divisibile per $4$, $5$, $6$ e $7$ e di conseguenza è il $m.c.m.(4,5,6,7)=420$.

**8. I VILLAGGI SUL SENTIERO [50]**




$CD=AD-AC=400-265=135$ leghe. $BC=BD-CD=185-135=50$ leghe.

**9. IL QUESITO DI MANFRED [900-109=791]**
Per minimizzare il numero di tre cifre poniamo $1$ nella cifra delle centinaia e $0$ nella cifra delle decine. Per avere somma delle cifre un numero di due cifre ci basta mettere un $9$ nella posizione delle unità. Il numero cercato è $109$.
Per massimizzare il numero di tre cifre, poniamo $9$ nella cifra delle centinaia. Non possiamo aumentare ulteriormente la somma delle cifre, quindi il numero cercato è $900$.
La fifferenza richiesta vale $900-109=791$.

**10. QUANTO PESA UN DODO? [5]**
Indichiamo il peso di un cerchio con $c$, quello di un triangolo con $t$ e quello di una quadrato con $q$. Dalla figura sappiamo che $5t = 1q + 1c$ e che $1c = 1q + 1t$.
Osserviamo che mettendo assieme le due informazioni si ottiene $5t = 1q + 1c = 1q + 1q + 1t$, cioè $4t = 2q$.
Dobbiamo calcolare quanto pesa in $q$ la somma $1t + 3c = 1t + 3q + 3t = 3q + 4t = 2q + 2q = 5q$.

**11. IL GIARDINO DI DIEGO [28]**
Detti $a$ e $b$ i lati del rettangolo, per il teorema di Pitagora deve accadere che $10 = \sqrt{a^2 + b^2}$.
L'unica soluzione intera di questa equazione è data dalla terna pitagorica $(6,8,10)$ ottenuta moltiplicando per $2$ la terna primitiva $(3,4,5)$.
Il perimetro cercato misura $2(6+8) = 28$ passi di tigre.

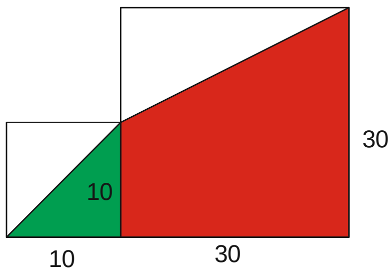
**12. GLI INSEGNAMENTI DI SID [8160]**
Si tratta di sommare $9 + 19 + 29 + \ldots + 399$, somma che possiamo scomporre nel modo seguente:

$$9 + 19 + 29 + \ldots + 399 = 9 + (10+9) + (20+9) + \ldots + (390+9) = (10 + 20 + \ldots + 390) + 40 \cdot 9 =$$

$$10(1 + 2 + \ldots + 39) + 360 = 10 \cdot \frac{39 \cdot 40}{2} + 360 = 8160.$$

**13. IL GIARDINO DI SID [650]**
L'area cercata è la somma di un triangolo rettangolo isoscele di lato $10$ e di un trapezio rettangolo di basi $10$ e $30$ e altezza $30$.

$$A = \frac{10 \cdot 10}{2} + \frac{(30+10) \cdot 30}{2} = 650.$$




**14. LA PASSIONE DEI DODO [90]**
Scelta la cifra delle centinaia in $9$ modi, ci resta la possibilità di scegliere la cifra delle decine in $10$ modi. La cifra delle unità deve essere la stessa delle cifra delle centinaia.
Vi sono in tutto $9 \cdot 10 = 90$ numeri palindromi di tre cifre.

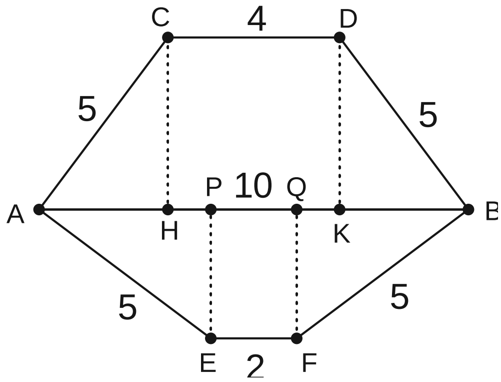
**15. IL GIARDINO DI MANFRED [46]**
Nella figura a fianco è stata rappresentata la situazione descritta dal problema.
Calcoliamo le altezze dei due trapezi:

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB - CD}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{10-4}{2}\right)^2} = 4$$

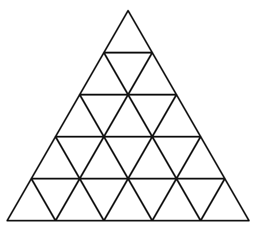
$$EP = \sqrt{AE^2 - AP^2} = \sqrt{AE^2 - \left(\frac{AB - EF}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{10-2}{2}\right)^2} = 3$$

L'area richiesta è data dalla somma delle aree dei due trapezi:

$$A_{ACDBFE} = A_{ABDC} + A_{ABFE} = \frac{(10+4) \cdot 4}{2} + \frac{(10+2) \cdot 3}{2} = 46.$$




**16. IL DEPOSITO SEGRETO DI SKRAT [225]**
Guardano le righe, indipendentemente dall'orientazione dei triangoli, si osserva che il loro numero è dato dalla somma $1 + 3 + 5 + \ldots + 29 = 15^2 = 225$.
(Ricordiamo che la somma dei primi $n$ numeri dispari vale $n^2$.)



**17. SID E LA MOLTIPLICAZIONE DIFFICILE [100]**

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{199}\right)=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{200}{\cancel{199}}=\frac{200}{2}=100.$$

**18. LA COLONNA DEGLI ARMADILLI [334]**

Se il primo è una Armadillo cavaliere (V)… quello che segue è un armadillo furfante (F). L'armadillo successivo può essere sia furfante che cavaliere. Per minimizzare il numero degli armadilli cavalieri supponiamo che sia furfante (F). Per far si che quest'ultimo menta, il successivo dovrà essere un cavaliere. La sequenza continua in maniera forzata VFFVFFVFF… in cui i cavalieri sono uno ogni due.
Se il primo è un Armadillo furfante, il successivo è necessariamente cavaliere (altrimenti il primo direbbe la verità). Da questo momento in poi possiamo ripetere la sequenza del primo caso: FVFFVFFVFF…
In ciascuno dei due casi il 999-esimo armadillo è un furfante. L'affermazione dell'ultimo armadillo lo rende in entrambi a casi un cavaliere.
Il numero minimo di armadilli cavaliere è $334$.

**19. GLI ANIMALI SUPERSTIZIOSI [30]**

Siccome $35=5\cdot 7$, le cifre del numero magico dovranno essere tutte dei $5$. Si tratta di trovare il più piccolo numero formato tutto da $5$ che sia divisibile per $7$. Eseguendo la divisione a partire da $55$ si scopre che il numero cercato è quello con sei cifre $5$ ($555.555:7=79365$).
La somma delle cifre vale $6\cdot 5=30$.

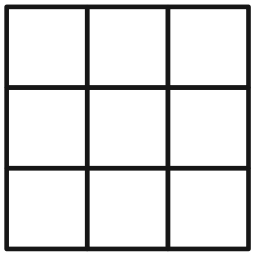
**20. IL BRANCO DEI MAMMUT [61]**

$n=1^7+2^6+3^5+4^4+5^3+6^2+7^1=1+64+243+256+125+36+7=732=2^2\cdot 3\cdot 61$.
Il fattore cercato è $61$.

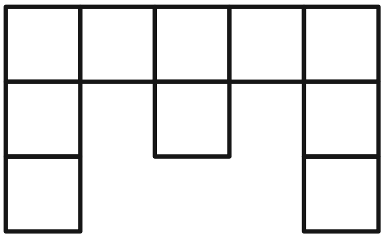
**1. IL NUMERO DI SID**
Sid vuole usare solo le cifre $3$, $4$, $7$, $8$ per scrivere dei numeri pari di quattro cifre. Ogni cifra deve essere usata una sola volta. Qual è la differenza tra il più grande e il più piccolo numero che Sid può scrivere?

**2. MANFRED GIOCA COI DADI**
Manfred ha tre dadi con le facce numerate da $1$ a $6$. Se li tira tutti insieme, e somma i valori ottenuti, quanti risultati diversi, che non siano numeri primi, può ottenere?

**3. IL PREMIO DI SKRAT**
Skrat riceverà una ghianda se riuscirà a risolvere questo problema: nella figura qui a fianco, quanti sono i rettangoli che non siano dei quadrati?



**4. I QUADRATI**
In una grotta Sid ha trovato una strana figura dipinta dagli uomini. La figura è formata da tanti quadrati, tutti uguali. Qual è il perimetro della figura se l'area di ciascuno dei quadrati è $16\ \text{cm}^2$?



**5. IL PROBLEMA DI DIEGO**
Diego è alle prese con un problema che non riesce a risolvere: se $\sqrt{n}+\sqrt{n}=\sqrt{64}$, quanto vale $n$?

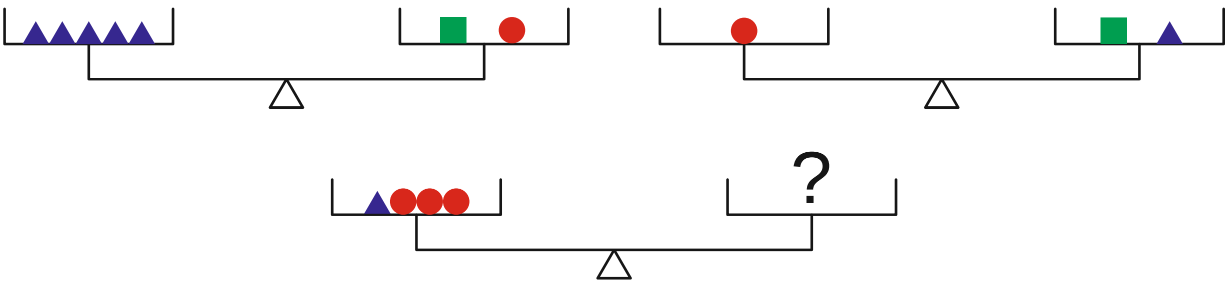
**6. IL DISEGNO DI SID**
Sid ha tracciato un disegno nella sabbia con un bastoncino: un triangolo $ABC$ di base $AB$ e altezza $CH = 24\ \text{cm}$. Se $BC = 25\ \text{cm}$ e $AC = 30\ \text{cm}$, qual è l'area del triangolo disegnato da Sid?

**7. LE CONCHIGLIE DI SID**
Sid ha molte conchiglie che usa per giocare assieme ai suoi amici. L'altro ieri erano in $4$ e quando si sono divisi le conchiglie ognuno ne ha avuto lo stesso numero e non ne è avanzata nessuna. Ieri invece erano in $5$, e ancora ognuno degli amici ne ha avuto lo stesso numero, senza alcun resto. Oggi sono in $6$, e quando Sid ha distribuito le conchiglie, ciascuno ne ha avuto lo stesso numero, senza avanzi. Domani saranno in $7$, e Sid sa già che potrà distribuirle a tutti in ugual numero senza resto. Sapendo che il numero di conchiglie di Sid è il più piccolo che permette di fare queste divisioni, quante sono le conchiglie di Sid?

**8. I VILLAGGI SUL SENTIERO**
Viaggiando su un sentiero Diego incontra, nell'ordine, quattro villaggi degli uomini: $A$, $B$, $C$ e $D$. Se La distanza tra $A$ e $D$ è di $400\ \text{leghe}$, tra $A$ e $C$ è di $265\ \text{leghe}$ e tra $B$ e $D$ è di $185\ \text{leghe}$, quanto distano tra loro $B$ e $C$?

**9. IL QUESITO DI MANFRED**
Manfred si diverte a prendere in giro Sid, perché sa che il bradipo non è bravo in matematica. Oggi gli ha posto questa domanda: sia $a$ il più piccolo numero di tre cifre la cui somma delle sue cifre sia un numero di due cifre. Sia $b$ il più grande numero di tre cifre la cui somma delle sue cifre sia un numero di una sola cifra. Quanto vale $b-a$?

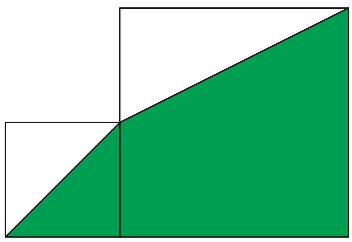
**10. QUANTO PESA UN DODO?**
Sid si è accorto che un dodo pesa quanto tre cerchi e un triangolo. Osserva la figura qua sotto. Quanti quadrati servono per bilanciare tre cerchi ed un triangolo?




**11. IL GIARDINO DI DIEGO**
Diego, in compagnia di Sid e Manfred, sta diventando sempre meno feroce. Il suo nuovo passatempo è il giardinaggio. Il suo nuovo giardino ha la forma di un rettangolo le cui diagonali hanno una lunghezza di $10$ passi di tigre. Sapendo che i lati del rettangolo hanno lunghezza intera (sempre se misurati in passi di tigre), quanti passi farà Diego percorrendo l'intero perimetro del suo giardino?

**12. GLI INSEGNAMENTI DI SID**
Durante il lungo viaggio alla ricerca della tribù degli umani, Sid trascorre il tempo cercando di insegnare un po' di matematica al bambino umano che sta riaccompagnando alla sua famiglia. Oggi il problema è così difficile che nemmeno Sid riesce a risolverlo: quanto vale la somma di tutti i numeri da $1$ a $400$ che hanno $9$ come cifra delle unità?

**13. IL GIARDINO DI SID**
L'incorreggibile Sid, non appena ha saputo che Diego si stava costruendo un giardino, ne ha voluto uno per sé, e naturalmente lo ha costruito più grande. Ma il suo giardino ha una forma un po' sgangherata: Sid è partito da due quadrati: quello più piccolo ha lato $10$ passi di bradipo, quello più grande $30$ passi. Il giardino occupa la parte ombreggiata. Quanto vale la sua area?

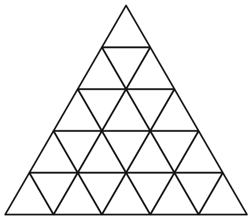


**14. LA PASSIONE DEI DODO**
I dodo sono particolarmente appassionati di numeri palindromi: un numero si dice palindromo se rimane uguale quando è letto da sinistra a destra o da destra a sinistra, come ad esempio il numero $262$. Diego ha incontrato un dodo particolarmente insistente, che non gli darà tregua finché non sarà riuscito a calcolare quanti sono i numeri palindromi compresi fra $100$ e $1000$.

**15. IL GIARDINO DI MANFRED**
Anche Manfred ha voluto coltivare un giardino. Il suo ha la forma di due trapezi isosceli costruiti sulla stessa base maggiore $AB$, che misura $10$ passi di mammut. I due trapezi sono disegnati uno da una parte e l'altro dall'altra della base $AB$; tutti e due i trapezi hanno i lati obliqui di misura $5$ passi, ma le basi minori sono diverse: una misura $2$ passi, l'altra $4$. Quanto vale l'area totale del giardino di Manfred?

### 16. IL DEPOSITO SEGRETO DI SKRAT

Il deposito segreto di Skrat è una vecchia quercia dove Skrat ha nascosto tutte le sue ghiande. Se le disponesse tutte come nella figura a lato (un triangolino = una ghianda) riuscirebbe a realizzare un triangolo che alla base conterebbe $15$ triangolini appoggiati sulla base e $14$ appoggiati su un vertice. Quante ghiande sono contenute nel deposito segreto di Skrat?



### 17. SID E LA MOLTIPLICAZIONE DIFFICILE

Sid non è molto forte con le moltiplicazioni. Chiede allora aiuto a Manfred: "Manfred, quanto vale il prodotto $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{199}\right)$?"

### 18. LA COLONNA DEGLI ARMADILLI

Una colonna di armadilli sta migrando. Manfred gli spiega che gli armadilli si dividono in furfanti (che mentono sempre) e cavalieri (che dicono sempre la verità). Sid comincia a parlare con ciascuno di loro. Il primo dice: "dietro di me c'è un armadillo furfante." A parte l'ultimo, tutti gli altri affermano che "c'è un armadillo furfante davanti a me ed uno dietro di me." L'ultimo sostiene che davanti a lui c'è un armadillo furfante." Alla fine Sid ne conta $1.000$. Quanti sono al minimo gli armadilli cavalieri?

### 19. GLI ANIMALI SUPERSTIZIOSI

Come gli esseri umani, a volte anche gli animali sono molto superstiziosi. Un branco di Brontoteri si sono convinti che l'era glaciale avrà fine se riusciranno a risolvere un quesito magico: quanto vale la somma delle cifre del più piccolo numero multiplo di $35$ e avente tutte le cifre uguali?

### 20. IL BRANCO DEI MAMMUT

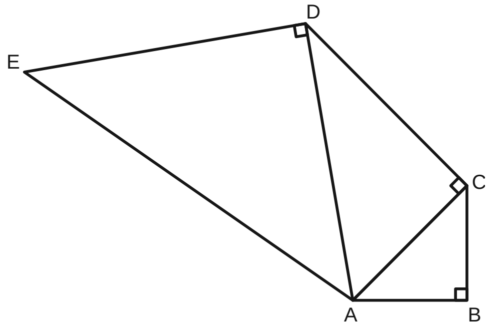
Manfred è convinto di essere l'ultimo mammut sopravvissuto. Sid sta cercando di convincerlo che ha avvistato un grosso branco di mammut, ma Manfred non gli crede. Per stuzzicare l'amico, Sid gli ha proposto un quiz: "sai quanti sono i mammut che ho visto ieri? Lo scoprirai quando avrai calcolato qual è il più grande fattore primo del numero $n = 1^7 + 2^6 + 3^5 + 4^4 + 5^3 + 6^2 + 7^1$".

# ESERCITAZIONE
# TEOREMA DI PITAGORA

**PROBLEMA 1**
20 e 21 sono le misure dei cateti di un triangolo rettangolo. Quanto vale la misura dell'ipotenusa?

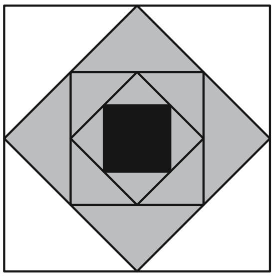
**PROBLEMA 2**
Esistono due sole terne pitagoriche che hanno per ipotenusa 25. Riesci a trovarle? Dai come risposta la somma dei cateti.

**PROBLEMA 3**
Una scala a pioli lunga 6,5m è appoggiata al muro. La base della scala dista 1,6m dal muro. A che altezza (in centimetri) si trova la cima della scala?



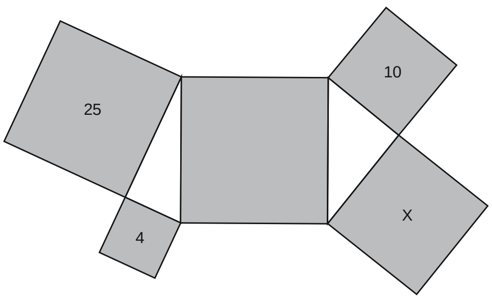

**PROBLEMA 4**
Osserva la figura. Se $AB = BC = 2\ \text{cm}$, $CD = 4\ \text{cm}$ e $DE = 5\ \text{cm}$, quanto misura il segmento $AE$?

**PROBLEMA 5**
Quanto vale il rapporto tra l'area bianca e l'area nera della figura a fianco, dove ogni quadrato è ottenuto unendo i punti medi dei lati del quadrato più grande?



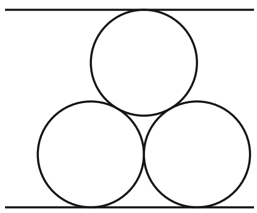
**PROBLEMA 6**
Tarzan vuole tenere il suo leone in una radura di forma circolare avente raggio 12 m e con un alto albero nel centro. Per fare in modo che il leone non scappi, lo lega con una catena all'albero centrale, ma al momento di fissarla si accorge che la catena è lunga 13 m anziché 12. Non potendo in alcuna maniera accorciare la catena, decide di legarla più in alto in modo che il leone possa raggiungere il limite della radura senza uscire. A quanti metri di altezza dal suolo Tarzan lega la catena?

**PROBLEMA 7**



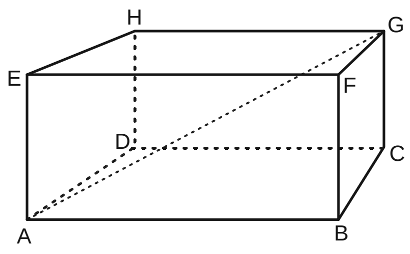

Osserva la figura dove sono disegnati 5 quadrati e due triangoli rettangoli. Quanto vale l'area del quadrato indicato con X?

**PROBLEMA 8**
Osserva la figura: se i raggi delle tre circonferenze sono $1\ \text{m}$, qual è la distanza tra le due rette parallele (in mm approssimata per difetto)?



**PROBLEMA 9**
Un triangolo ha un lato lungo 3 metri ed un altro lungo 2 metri. Se l'area del triangolo vale 3 $\text{m}^2$, quanto vale la misura del terzo lato? Dai la risposta elevando al quadrato la misura trovata.

**PROBLEMA 10**
Quanto misura la diagonale $AG$ della scatola sotto riportata, se $AB = 90\ \text{cm}$, $BC = 60\ \text{cm}$ e $BF = 20\ \text{cm}$?



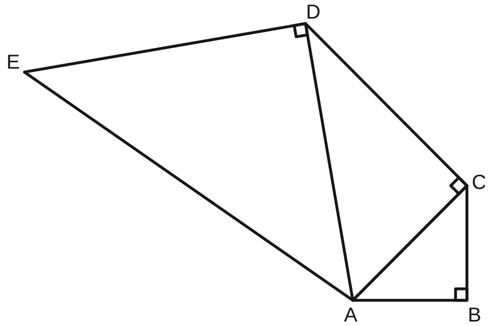
# ESERCITAZIONE
# TEOREMA DI PITAGORA

**PROBLEMA 1 [29]**
20 e 21 sono le misure dei cateti di un triangolo rettangolo. Quanto vale la misura dell'ipotenusa?

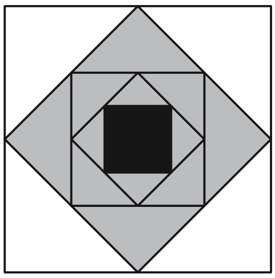
**PROBLEMA 2 [66 -->15-20-25 e 7-24-25]**
Esistono due sole terne pitagoriche che hanno per ipotenusa 25. Riesci a trovarle? Dai come risposta la somma dei cateti.

**PROBLEMA 3 [630]**
Una scala a pioli lunga 6,5m è appoggiata al muro. La base della scala dista 1,6m dal muro. A che altezza (in centimetri) si trova la cima della scala?

**PROBLEMA 4 [7]**
Osserva la figura. Se $AB = BC = 2\text{ cm}$, $CD = 4\text{ cm}$ e $DE = 5\text{ cm}$, quanto misura il segmento $AE$?

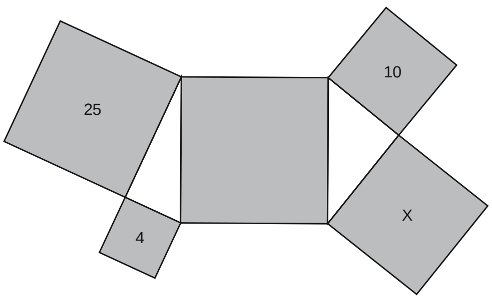



**PROBLEMA 5 [8]**
Quanto vale il rapporto tra l'area bianca e l'area nera della figura a fianco, dove ogni quadrato è ottenuto unendo i punti medi dei lati del quadrato più grande?



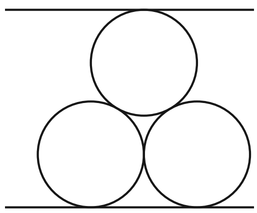
**PROBLEMA 6 [5]**
Tarzan vuole tenere il suo leone in una radura di forma circolare avente raggio 12 m e con un alto albero nel centro. Per fare in modo che il leone non scappi, lo lega con una catena all'albero centrale, ma al momento di fissarla si accorge che la catena è lunga 13 m anziché 12. Non potendo in alcuna maniera accorciare la catena, decide di legarla più in alto in modo che il leone possa raggiungere il limite della radura senza uscire. A quanti metri di altezza dal suolo Tarzan lega la catena?

**PROBLEMA 7 [19]**




Osserva la figura dove sono disegnati 5 quadrati e due triangoli rettangoli. Quanto vale l'area del quadrato indicato con X?

**PROBLEMA 8 [1866]**
Osserva la figura: se i raggi delle tre circonferenze sono $1\text{ m}$, qual è la distanza tra le due rette parallele (in mm approssimata per difetto)?



**PROBLEMA 9 [13]**
Un triangolo ha un lato lungo 3 metri ed un altro lungo 2 metri. Se l'area del triangolo vale 3 $m^2$, quanto vale la misura del terzo lato? Dai la risposta elevando al quadrato la misura trovata.

**PROBLEMA 10 [110]**
Quanto misura la diagonale $AG$ della scatola sotto riportata, se $AB = 90\text{ cm}$, $BC = 60\text{ cm}$ e $BF = 20\text{ cm}$?