

# Problemi di Massimo e Minimo e Applicazioni

Fabio Giannoni, Valentina Girolimetti

**Materiale per gli insegnanti**

# Indice

<b>1</b>	<b>Il principio di Fermat in ottica classica</b>	<b>3</b>
1.1	La riflessione . . . . .	4
1.1.1	Risoluzione analitica . . . . .	5
1.1.2	Risoluzione geometrica . . . . .	6
1.1.3	Conseguenze geometriche del risultato di Erone . . . . .	6
1.1.4	Riflessione su specchi curvi . . . . .	8
1.1.5	Il problema dell'illuminazione . . . . .	9
1.2	La rifrazione . . . . .	10
1.3	Complementi. Una curiosità matematica sulla riflessione . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Il problema della brachistocrona</b>	<b>17</b>
2.1	Il metodo di Bernoulli . . . . .	18
2.2	Caratterizzazione della Brachistocrona . . . . .	20
2.3	Il problema della brachistocrona dal punto di vista del calcolo delle variazioni . . . . .	21
2.3.1	Formalizzazione del problema della brachistocrona . . . . .	23
2.3.2	Unicità della soluzione . . . . .	24
	<b>Conclusioni</b>	<b>26</b>
	<b>A Minima lunghezza</b>	<b>27</b>
	<b>Minima lunghezza</b>	<b>27</b>
A.1	Definizione di lunghezza di una curva . . . . .	27
A.2	Proprietà fondamentali . . . . .	28

# Capitolo 1

## Il principio di Fermat in ottica classica

Sin dall'antichità è noto che spesso i fenomeni naturali possono seguire schemi di massimo e minimo.

Erone di Alessandria, già nel I secolo dopo Cristo, riconobbe che la riflessione di un raggio luminoso in uno specchio piano può essere descritta da un principio di minimo.

Fermat, nel XVII secolo, compì il passo successivo osservando che anche la legge della rifrazione di Snell può essere formulata nei termini di un principio di minimo. Egli generalizzò l'enunciato di questa legge comprendendo anche superfici curve di discontinuità tra due mezzi - nella legge di Snell la superficie di discontinuità è, infatti, un piano - come le superfici usate nella costruzione delle lenti. La discontinuità dipende dal fatto che la velocità della luce in un mezzo è caratteristica del mezzo stesso.

Fermat considerò, infine, ogni altro sistema ottico in cui la velocità della luce vari in maniera prefissata da punto a punto, come accade nell'atmosfera. Egli divise il mezzo non omogeneo in strati sottili, in ciascuno dei quali la velocità della luce fosse approssimativamente costante, e immaginò questo mezzo costituito da un altro in cui la velocità fosse effettivamente costante in ciascuno strato: nel passaggio da uno strato all'altro poteva applicare la legge di Snell. Facendo tendere a zero lo spessore degli strati egli poté arrivare al seguente principio che porta il suo nome.

**Principio di Fermat in ottica geometrica:** per andare da  $A$  (sorgente) a  $B$  (osservatore), la luce sceglie i cammini continui che minimizzano il tempo di percorrenza.

Questo principio si è rivelato di grande importanza nell'ottica geometrica, non solo da un punto di vista teorico, ma anche operativo: su tale principio, ad esempio,

si basano i calcoli per la costruzione di sistemi di lenti e la sua generalizzazione all'ottica relativistica ha avuto importantissime applicazioni nello studio delle lenti gravitazionali.

In ciò che segue ci occuperemo della trasmissione della luce in mezzi omogenei isotropi. Ricordiamo che parliamo di mezzo isotropo intendendo che il modulo del vettore velocità di ogni singolo fotone dipende solo dal punto in cui esso si trova, mentre per omogeneo intendiamo un mezzo in cui il modulo del vettore velocità di ogni singolo fotone è costante. Vedremo come effettivamente la legge della riflessione e la legge di Snell in mezzi isotropi possono essere ricavate a partire dal Principio di Fermat.

Consideriamo, allora, lo spazio reale  $\mathbb{R}^3$  e ricaviamo il tempo di percorrenza di un raggio luminoso per andare dalla sorgente  $A$  all'osservatore  $B$ . Indichiamo con  $d\vec{s} = (ds_1, ds_2, ds_3)$  lo spostamento corrispondente ad un intervallo di tempo infinitesimo  $dt$  e con  $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = (v_1, v_2, v_3)$  il vettore velocità. Il suo modulo sarà  $|\vec{v}| = \frac{|d\vec{s}|}{dt}$ , con  $|d\vec{s}| = \sqrt{(ds_1)^2 + (ds_2)^2 + (ds_3)^2}$  per il teorema di Pitagora.

Nei mezzi omogenei isotropi  $|\vec{v}| = v$  è costante ed è una caratteristica fisica del mezzo. Il tempo di percorrenza da  $A$  a  $B$  è dunque dato da

$$T(B) - T(A) = \int dt = \int \frac{d\vec{s}}{v} = \frac{1}{v} \int d\vec{s} = \frac{l(\gamma)}{v},$$

ove  $\gamma$  è la traiettoria percorsa dal raggio di luce. Si osservi che il minimo è realizzato dal segmento  $AB$  con tempo di percorrenza  $\frac{\|B-A\|}{v}$ .

## 1.1 La riflessione

Occupiamoci ora di come un raggio di luce che si propaga nell'aria viene riflesso da uno specchio omogeneo isotropo piano. Per motivi di simmetria esso si muove in un piano, e la situazione può essere schematizzata come in Figura 1.1 dove abbiamo indicato con  $X$  il primo punto di contatto con lo specchio. Siano  $v_a$  e  $v_s$  rispettivamente le velocità della luce nell'aria e nello specchio.

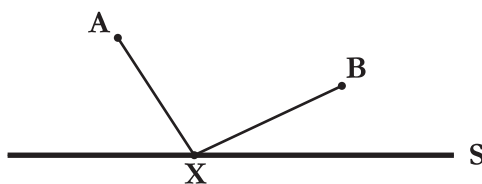


Figura 1.1: Percorso di un raggio di luce

*Ci possono essere altri punti di contatto?*

Tipicamente  $v_s \leq v_a$  (in realtà l'aria si oppone assai meno dello specchio nel farsi

attraversare dalla luce, cioè  $v_s < v_a$ ). Ora, se ci fossero altri punti di contatto, detto  $X_1$  l'ultimo di essi, si avrebbe la situazione mostrata nella Figura 1.2:

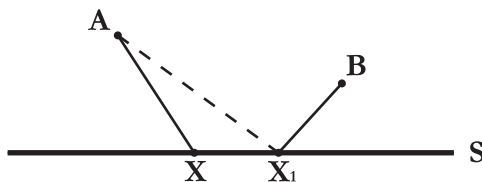


Figura 1.2: Percorso di un raggio di luce con più punti di contatto

In tale situazione:

$$\begin{aligned} T(X_1) - T(A) &= T(X_1) - T(X) + T(X) - T(A) = \frac{\|X_1 - X\|}{v_s} + \frac{\|X - A\|}{v_a} \geq \\ &\geq \frac{\|X_1 - X\|}{v_a} + \frac{\|X - A\|}{v_a} = \frac{1}{v_a} (\|X_1 - X\| + \|X - A\|) > \frac{1}{v_a} \|X_1 - A\|. \end{aligned}$$

I candidati cammini minimizzanti sono, quindi, quelli con unico punto di contatto.

### 1.1.1 Risoluzione analitica

Vediamo ora la situazione dal punto di vista analitico. Poichè la traiettoria del cammino minimizzante giace in un piano, siamo di fronte a un problema ad una sola variabile: si tratta di trovare  $x \in \mathbb{R}$  tale che, posto  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$ , la funzione  $f(x) = \sqrt{(a_1 - x)^2 + a_2^2} + \sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}$  sia minima. *La prima questione da porsi, e che fino ad ora abbiamo dato per scontata, è l'esistenza del minimo che cerchiamo.* Tale esistenza ci è assicurata, nelle nostre ipotesi, dal potente Teorema di Weierstrass. Data l'importanza che esso riveste in analisi, vogliamo spendere alcune righe per la sua dimostrazione.

**Teorema 1.1.1 (di Weierstrass).** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Allora  $f$  ammette minimo su  $\mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\{x_n\}$  una successione minimizzante per la funzione  $f$ , ovvero una successione tale che  $f(x_n) \rightarrow \inf f$ . Osserviamo che una successione siffatta esiste sempre, pur costruendosi in maniera differente a seconda che l'inf sia finito o infinito, ma non è necessariamente convergente. D'altra parte sappiamo che la funzione  $f$  diverge per  $x_n \rightarrow +\infty$ , per cui  $\{x_n\}$  è una successione limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, dunque, esiste una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  convergente ad un elemento  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ . Allora, per la continuità di  $f$ ,  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x})$  ma, poichè  $f(x_{n_k}) \rightarrow \inf f$ , si ha

$$f(\bar{x}) = \inf f,$$

cioè  $\bar{x}$  è il punto di minimo cercato. □

**Osservazione 1.1.1.** La nostra funzione verifica le ipotesi del teorema precedente. Inoltre, anche nel caso della brachistocrona che studieremo più avanti, si dovrà studiare la convergenza di opportune successioni minimizzanti per funzioni divergenti all'infinito.

**Osservazione 1.1.2.** Poichè la nostra funzione è derivabile in  $\mathbb{R}$ , per il teorema di Fermat i punti di minimo vanno cercati tra quelli per cui  $f' = 0$ .

### 1.1.2 Risoluzione geometrica

Vediamo, ora, come si possa ricavare geometricamente la legge di Snell per la riflessione. Vogliamo dunque, riferendoci alla Figura 1.3, mostrare che l'angolo 1 di incidenza è uguale all'angolo 3 di riflessione.

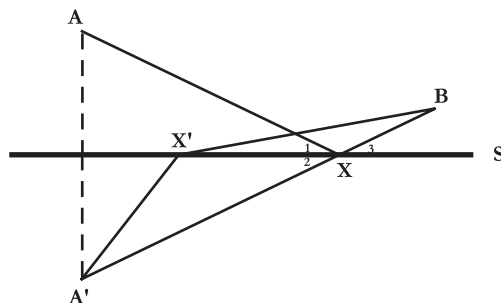


Figura 1.3: La legge della riflessione

Sia  $A'$  il simmetrico di  $A$  rispetto allo specchio  $S$ . Osserviamo intanto che il punto  $X$  di intersezione tra  $A'B$  ed  $S$  è il punto richiesto a causa della disuguaglianza triangolare. Inoltre  $\widehat{1} = \widehat{2}$  poichè  $S$  è asse di simmetria, mentre  $\widehat{3} = \widehat{2}$  perchè angoli opposti al vertice. Allora  $\widehat{1} = \widehat{3}$ , ossia l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

### 1.1.3 Conseguenze geometriche del risultato di Erone

Quanto appena dimostrato geometricamente sulla riflessione, come detto nell'introduzione a questo capitolo, era noto già ad Erone. Possiamo riassumere il suo risultato affermando che se  $R$  è un punto della retta  $r$  tale che il valore della somma  $PR + QR$  (con  $P$  e  $Q$  punti assegnati) è minimo,  $PR$  e  $QR$  formano con la retta  $r$  angoli uguali. Vediamo ora alcune conseguenze di questo fatto nella soluzione dei seguenti problemi:

- 1) Tra tutti i triangoli per cui sono assegnati l'area  $\mathcal{A}$  ed un lato di lunghezza  $c$ , determinare quello per cui è minima la somma degli altri due lati di lunghezza  $a$  e  $b$ .

*Soluzione (Cenni).* Assegnare l'area e la lunghezza  $c$  di un lato di un triangolo equivale ad assegnare il lato  $c$  e l'altezza  $h$ . Allora il problema consiste nel trovare  $R$  tale che la distanza dalla retta  $PQ$  (Figura 1.4) sia uguale all'altezza  $h$  e la somma  $a + b$  sia minima. La risposta è che il minimo è assunto se e solo se il triangolo  $PRQ$  è isoscele.

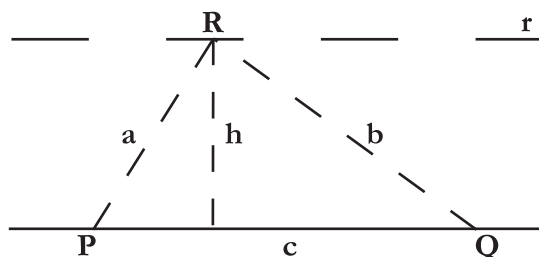


Figura 1.4: Possibile interpretazione del risultato di Erone

2) **Proprietà tangenziali dell'ellisse.** Sia  $2a$  il valore minimo della somma  $PR+QR$  garantito dal risultato di Erone, con  $R$  appartenente alla retta assegnata  $r$ , come mostrato in Figura 1.4. Indichiamo, inoltre, con  $p$  e  $q$  le distanze di un punto  $T$  del piano da  $P$  e  $Q$  rispettivamente (Figura 1.5). Consideriamo il luogo di tutti i punti del piano per cui  $p + q = 2a$ , cioè l'ellisse di fuochi  $P$  e  $Q$  e passante per il punto  $R$  della retta  $r$ .

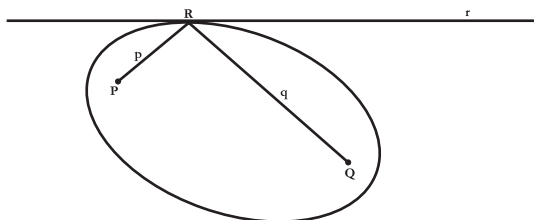


Figura 1.5: Ellisse

Allora la retta  $r$  è tangente all'ellisse in  $R$ . Infatti, se  $r$  intersecasse l'ellisse in un altro punto  $R' \neq R$ , vi sarebbe un segmento di  $r$  interno all'ellisse con  $p + q < 2a$ , contrariamente al fatto che il valore minimo di  $p+q$  lungo  $r$  è  $2a$ . Osserviamo, infine, che poichè  $PR$  e  $RQ$  formano angoli uguali con la retta, abbiamo incidentalmente dimostrato il seguente:

**Teorema 1.1.2.** *Una tangente ad un'ellisse forma angoli uguali con i segmenti che congiungono i fuochi con il punto di tangenza.*

(Si osservi che sulla retta tangente, in punti distinti dal punto di contatto, si ha  $p + q > 2a$  perchè siamo fuori dall'ellisse).



### 1.1.4 Riflessione su specchi curvi

Il principio di Fermat vale anche nel caso di specchio nello spazio  $\mathbb{R}^3$  liscio ma curvo. Siano, allora,  $A$  e  $B$  dalla stessa parte rispetto ad una superficie liscia  $S$ , come mostrato nella Figura 1.6. Indicata con  $v_a$  la velocità della luce nel mezzo

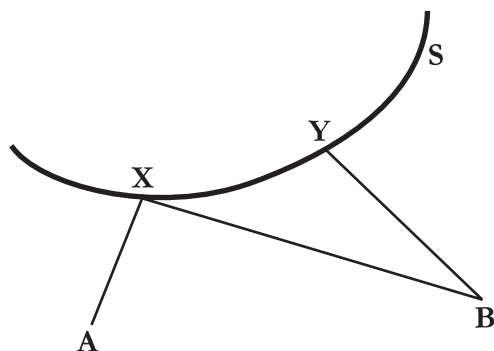


Figura 1.6: Specchio curvo

omogeneo isotropo in cui si trovano  $A$  e  $B$ , si ha ancora  $v_s \leq v_a$ . Supponiamo che un raggio di luce che parte dalla superficie  $S$  e passa per  $B$ , non incontri altri punti di  $S$  prima di aver raggiunto  $B$ . Sia  $X$  il primo punto di contatto del raggio luminoso (partito da  $A$ ) ed  $Y$  l'ultimo. Poichè  $v_s \leq v_a$  come nel caso della riflessione su uno specchio piano, il segmento che congiunge  $X$  con  $B$  ha lunghezza minore del cammino che congiunge prima  $X$  con  $Y$  e poi  $Y$  con  $B$ . Ne consegue allora che il minimo, se esiste, incontra la superficie  $S$  in un solo punto.

**Osservazione 1.1.3.** Nel caso in cui  $S$  sia una superficie topologicamente chiusa, cioè che contiene tutti i suoi punti di accumulazione, si può ottenere l'esistenza del minimo adattando a questo caso la dimostrazione del teorema 1.1.1.

Come si caratterizza la traiettoria di minimo? Sia  $X$  il punto che realizza il minimo. Intersecando  $S$  con il piano che passa per  $A, B$  ed  $X$ , si individua una curva regolare che passa per  $X$ . Il punto  $X$ , allora, minimizza la funzione

$$z \mapsto \|A - z\| + \|B - z\|$$

anche lungo tale curva e dunque possiamo caratterizzare  $X$  supponendo di avere una curva  $\gamma$  come oggetto riflettente. Per fissare le idee supponiamo di avere i punti  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$  e la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ ,  $\gamma$  regolare, (cioè  $\forall s \in \mathbb{R}, \dot{\gamma}(s) = \frac{d\gamma}{dt} = (\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(s)) \neq 0$ ). Dobbiamo minimizzare la funzione

$$f(s) = \sqrt{(\gamma_1(s) - a_1)^2 + (\gamma_2(s) - a_2)^2} + \sqrt{(\gamma_1(s) - b_1)^2 + (\gamma_2(s) - b_2)^2}.$$

Poichè  $f$  è differenziabile, se con  $s_0$  indichiamo un punto di minimo, deve essere  $f'(s_0) = 0$  ossia, per  $s = s_0$ :

$$\frac{(\gamma_1 - a_1)\dot{\gamma}_1 + (\gamma_2 - a_2)\dot{\gamma}_2}{\sqrt{(\gamma_1(s) - a_1)^2 + (\gamma_2(s) - a_2)^2}} = -\frac{(\gamma_1 - b_1)\dot{\gamma}_1 + (\gamma_2 - b_2)\dot{\gamma}_2}{\sqrt{(\gamma_1(s) - b_1)^2 + (\gamma_2(s) - b_2)^2}}. \quad (1.1)$$

Poichè  $(\gamma_1 - a_1, \gamma_2 - a_2) = \gamma - A$  e  $(\gamma_1 - b_1, \gamma_2 - b_2) = \gamma - B$ , ricordando la definizione di prodotto scalare euclideo, se  $s = s_0$ , la (1.1) si può scrivere:

$$\left\langle \frac{\gamma(s_0) - A}{\|\gamma(s_0) - A\|}, \dot{\gamma}(s_0) \right\rangle = -\left\langle \frac{\gamma(s_0) - B}{\|\gamma(s_0) - B\|}, \dot{\gamma}(s_0) \right\rangle. \quad (1.2)$$

Questo significa che  $\frac{\gamma(s_0) - A}{\|\gamma(s_0) - A\|} + \frac{\gamma(s_0) - B}{\|\gamma(s_0) - B\|}$  è ortogonale a  $\dot{\gamma}(s_0)$ , che è un vettore tangente a  $\gamma$  in  $s_0$ . Dalla Figura 1.7, posto  $v_A = \frac{\gamma(s_0) - A}{\|\gamma(s_0) - A\|}$  e  $v_B = \frac{\gamma(s_0) - B}{\|\gamma(s_0) - B\|}$ , si deduce che l'angolo di incidenza e riflessione rispetto a  $\dot{\gamma}$ , e dunque rispetto alla retta tangente alla superficie in  $s_0$ , debbono essere uguali (si ricordi che  $\|v_a\| = \|v_b\|$ ).

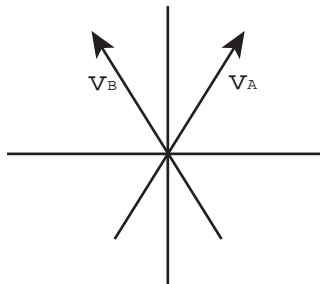


Figura 1.7: Angolo di incidenza e riflessione

### 1.1.5 Il problema dell'illuminazione

La legge precedente regola la riflessione su specchi curvi. La domanda che viene naturale porsi è se, in presenza di uno specchio dato da una superficie chiusa, possiamo sempre trovare un raggio di luce che congiunge due punti  $A$  e  $B$  e che tocca  $S$  almeno una volta. Se la superficie  $S$  è il bordo di un convesso la risposta è banalmente affermativa, ma in generale non è vero. Il controesempio è dato dal cosiddetto **fungo di Penrose** (Figura 1.10). Per costruirlo consideriamo la Figura 1.8, con riferimento alla quale dimostriamo il seguente fatto:

*ogni raggio di luce che parte dal lobo sinistro non colpisce mai il segmento che unisce i due fuochi.*

Sappiamo che, rispetto alla tangente nel punto di contatto, l'angolo di incidenza deve essere uguale a quello di riflessione. Allora se parto da  $F_1$  arrivo in  $F_2$  mentre,

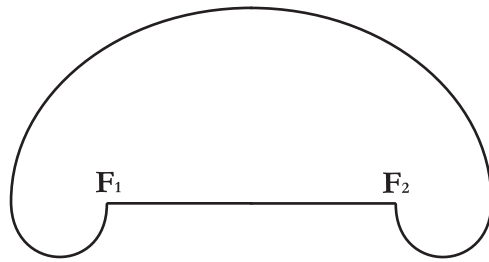


Figura 1.8: Figura preparatoria per il fungo di Penrose

per una partenza dal lobo sinistro, la situazione è quella rappresentata dal percorso tratteggiato nella Figura 1.9. La riflessione successiva manda nel lobo destro e se,

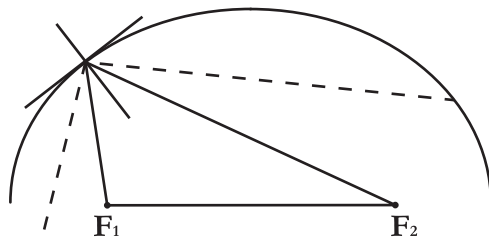


Figura 1.9: Cammino di un raggio di luce

dopo un certo numero di riflessioni, il raggio esce da lobo destro, finisce di nuovo nel lobo sinistro e così via. Pertanto, se il punto  $A$  sta in un lobo e il punto  $B$  nel gambo del fungo,  $B$  non sarà mai illuminato da  $A$  (Figura 1.10).

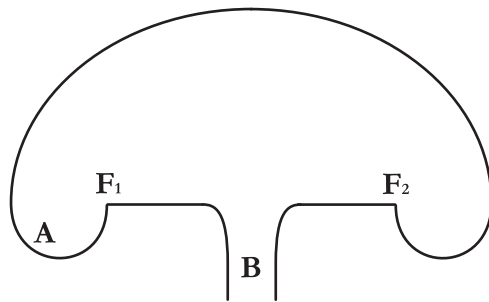


Figura 1.10:  $B$  non è illuminato da  $A$

## 1.2 La rifrazione

Trattiamo ora il fenomeno della rifrazione. Indichiamo con  $v_1$  e  $v_2$  la velocità della luce in due mezzi separati da una superficie  $S$  (consideriamo il caso che  $S$

sia piana) e con  $A$  e  $B$  due punti posti nei due mezzi (Figura 1.11). Lo stesso

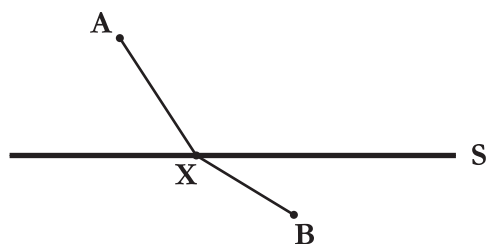


Figura 1.11: La rifrazione

ragionamento fatto nel caso della riflessione, non importa se  $v_1 < v_2$  o  $v_2 < v_1$ , mostra che anche in questo caso si ha solo un punto di contatto. Si tratta di minimizzare il tempo per andare dal punto  $A$  al punto  $B$  passando per  $X \in S$ , cioè

$$t = \frac{AX}{v_1} + \frac{BX}{v_2}.$$

È il cosiddetto *problema del bagnino* (Figura 1.12).

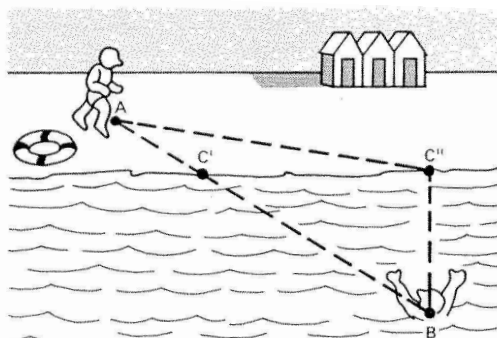


Figura 1.12: Il problema del bagnino

Indicando con  $x$  la coordinata di  $X$  sull'area di separazione dei due mezzi, posto  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $a_1 < b_1$ , dobbiamo minimizzare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}}{v_2}$$

**Osservazione 1.2.1.** Il minimo sicuramente esiste perchè

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Mostriamo analiticamente, allora, che il punto di minimo è unico e vediamo come si caratterizza. Poichè  $f$  è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$ , se  $x$  è di minimo si ha che  $f'(x) = 0$ , ovvero

$$f'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x - a_1}{\sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{x - b_1}{\sqrt{b_2^2 + (x - b_1)^2}} \quad (1.3)$$

**Osservazione 1.2.2.** Le soluzioni di tali espressioni non vanno cercate esplicitamente.

**Osservazione 1.2.3.** La funzione  $s \mapsto \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + s^2}}$ ,  $\alpha > 0$ , è strettamente crescente. Infatti è dispari e, se  $s > 0$ , essa è data da  $\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{s^2} + 1}}$  che è strettamente crescente perchè  $s \mapsto \sqrt{\frac{\alpha^2}{s^2} + 1}$  è strettamente decrescente. In ogni caso la derivata è  $\frac{-\alpha^2}{(\alpha^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ .

Dunque  $f'$  è somma di due funzioni strettamente crescenti e pertanto è strettamente crescente. Inoltre

$$f'(a_1) = \frac{1}{v_2} \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{b_2^2 + (a_1 - b_1)^2}} < 0$$

$$f'(b_1) = \frac{1}{v_1} \frac{b_1 - a_1}{\sqrt{a_2^2 + (b_1 - a_1)^2}} > 0,$$

per cui l'unica soluzione dell'equazione (1.3) sta in  $]a_1, b_1[$ . In riferimento alla

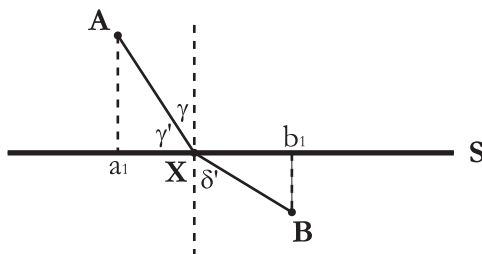


Figura 1.13: Indice di rifrazione

Figura 1.13, la soluzione è caratterizzata da

$$\frac{1}{v_1} \frac{x - a_1}{\sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{b_1 - x}{\sqrt{b_2^2 + (x - b_1)^2}},$$

ossia

$$\frac{1}{v_1} \cos \gamma' = \frac{1}{v_2} \cos \delta'$$

da cui

$$\frac{1}{v_1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{1}{v_2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

e, finalmente,

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{v_1}{v_2} \equiv \nu.$$

$\nu$  si dice *indice di rifrazione*, il suo valore è costante e non dipende da  $A$  e da  $B$ .

### 1.3 Complementi. Una curiosità matematica sulla riflessione

Nella sezione 1.1 abbiamo analizzato il caso  $v_s \leq v_a$ , ora ci occuperemo del caso  $v_a < v_s$ . Consideriamo a tal fine la situazione rappresentata dalla Figura 1.14 dove abbiamo posto  $a_1, a_2 > 0$ ,  $b_1, b_2 > 0$ ,  $a_1 < b_1$ . Sia poi  $v_s \equiv w$  e  $v_a \equiv v$ . In

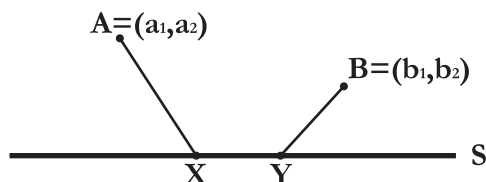


Figura 1.14: Generalizzazione della riflessione

questo caso dobbiamo minimizzare

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(a_1 - x)^2 + a_2}}{v} + \frac{|y - x|}{w} + \frac{\sqrt{(b_1 - y)^2 + b_2}}{v}.$$

Ricordiamo alcune utili nozioni di base sulle funzioni reali di due variabili reali. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $(x_0, y_0) \in A$ . Indichiamo con  $A_{y_0}$  e  $A_{x_0}$  rispettivamente gli insiemi

$$A_{y_0} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y_0) \in A\} \quad \text{e} \quad A_{x_0} = \{y \in \mathbb{R} : (x_0, y) \in A\}.$$

Allora le funzioni  $f_{y_0} : A_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_{x_0} : A_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$  e  $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$  sono funzioni nella sola variabile  $x$  e  $y$  rispettivamente. Sia, ora,  $(x_0, y_0) \in A$  un punto interno.

**Definizione 1.3.1.** *Se la funzione  $f_{y_0} : A_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile nel punto  $x = x_0$ , cioè se esiste finito il limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

diciamo che tale derivata è la derivata parziale di  $f$  rispetto alla variabile  $x$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Analogamente se la funzione  $f_{x_0} : A_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile nel punto  $y = y_0$ , cioè se esiste finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

diciamo che tale derivata è la derivata parziale di  $f$  rispetto alla variabile  $y$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Se la funzione  $f$  è derivabile rispetto ad  $x$  (ad  $y$ ) in ogni punto di  $A$ , diremo che  $f$  è derivabile rispetto ad  $x$  (ad  $y$ ) e indicheremo tali derivate rispettivamente con  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Le derivate parziali ora introdotte danno informazioni sul comportamento della funzione lungo le direzioni degli assi coordinati. In generale, data una retta  $r$  di direzione  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , possiamo considerare la derivata della funzione  $f$  lungo tale direzione.

**Definizione 1.3.2.** Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  punto interno,  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Se esiste finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t},$$

diciamo che  $f$  è derivabile nel punto  $(x_0, y_0)$  secondo la direzione  $v$  della retta  $r$ .

Torniamo ora alla nostra funzione. Si hanno i seguenti fatti:

1. Il minimo esiste perchè

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

2. Supponiamo che il minimo sia assunto per  $y < x$ . Allora, preso

$$f_1(x, y) = \frac{\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}}{v} + \frac{x - y}{w} + \frac{\sqrt{(y - b_1)^2 + b_2^2}}{v},$$

nel punto  $(x, y)$  di minimo, per il Teorema di Fermat, deve essere:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{x - a_1}{v\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}} + \frac{1}{w} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{w} + \frac{y - b_1}{v\sqrt{(y - b_1)^2 + b_2^2}} = 0 \end{cases}$$

da cui, posto  $s = x - a_1$  e  $t = y - b_1$ , otteniamo

$$\frac{s}{\sqrt{a_2^2 + s^2}} = -\frac{v}{w}$$

$$\frac{t}{\sqrt{b_2^2 + t^2}} = \frac{v}{w}.$$

Se  $\frac{v}{w} = \lambda \in ]0, 1[$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{a_2^2 + s^2} &= \lambda^2 & (s < 0) \\ \frac{t^2}{b_2^2 + t^2} &= \lambda^2 & (t > 0) \end{aligned}$$

da cui

$$s = \frac{-a_2 \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

$$t = \frac{b_2 \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}},$$

ossia

$$x = a_1 - \frac{\lambda a_2}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

$$y = \frac{\lambda b_2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} + b_1.$$

Ma allora

$$y = \frac{\lambda b_2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} + b_1 > \frac{\lambda b_2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} > a_1 - \frac{\lambda a_2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = x,$$

perchè  $a_2, b_2 > 0, \lambda > 0$ . Questo è assurdo perchè avevamo posto  $y < x$ .

3. Se il minimo è assunto per  $y > x$  si deve minimizzare la funzione

$$f_2(x, y) = \frac{\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}}{v} + \frac{y - x}{w} + \frac{\sqrt{(y - b_1)^2 + b_2^2}}{v}.$$

Tale punto di minimo verifica:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{x - a_1}{v\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2}} - \frac{1}{w} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{w} + \frac{y - b_1}{v\sqrt{(y - b_1)^2 + b_2^2}} = 0 \end{cases}$$

da cui, posto  $s = x - a_1$  e  $t = y - b_1$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{s}{\sqrt{a_2^2 + s^2}} &= \frac{v}{w} \equiv \lambda \in ]0, 1[ & (s > 0) \\ \frac{t}{\sqrt{b_2^2 + t^2}} &= -\frac{v}{w} \equiv -\lambda \in ]0, 1[ & (t < 0). \end{aligned}$$



Si ha

$$s = \frac{a_2 \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$
$$t = -\frac{b_2 \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Si osservi che avremo

$$x = s + a_1 = a_1 + \frac{\lambda a_2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} < b_1 - \frac{\lambda b_2}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

se e solo se

$$a_2 + b_2 < (b_1 - a_1) \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda}. \quad (1.4)$$

Se l'equazione (1.4) non vale, il minimo non è assunto in  $y > x$ . Sarà allora certamente assunto in  $y = x$  e, in tal caso, si dovrà minimizzare  $g(x) = f(x, x)$ . Se (1.4) vale, occorre confrontare il valore minimo di  $f_2$  (con  $y > x$ ) con quello di  $g(x) = f(x, x)$ .

**Osservazione 1.3.1.** Nel caso in cui c'è un segmento di contatto, ossia quando (1.4) è verificata, dalla condizione  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$  si ottiene

$$\frac{x - a_1}{a_2} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{b_1 - y}{b_2}$$

Dunque le tangenti dell'angolo di incidenza e dell'angolo di riflessione sono uguali e quindi tali angoli sono uguali.

## Capitolo 2

# Il problema della brachistocrona

Molti dei problemi riguardanti le applicazioni della matematica in fisica ed ingegneria necessitano la minimizzazione di funzioni che hanno come variabili, non punti di uno spazio di dimensione finita, bensì funzioni a loro volta. Il metodo che consente di studiare questo tipo di problema si chiama **Calcolo delle Variazioni**. Fondato da Eulero e Lagrange, ha avuto, dalla metà del XVIII secolo in poi, uno sviluppo assai impressionante. In questo capitolo analizzeremo il cosiddetto **problema della brachistocrona**, problema dal quale, possiamo dire, il calcolo variazionale è nato. Tale problema fu proposto da Johann Bernoulli nel 1696 in ACTA ERUDITORUM, il più grande giornale scientifico del tempo.

Immaginiamo una particella di massa  $m$  vincolata a scivolare senza attrito, sotto la sola azione della gravità, lungo una certa curva che congiunge un punto  $A$  ad un punto  $B$  più basso. Lungo quale curva sarà minimo il tempo necessario per la discesa? Bernoulli si vantò di possedere una soluzione meravigliosa che, però, non voleva pubblicare immediatamente, per incitare i più grandi matematici del tempo a cimentarsi con questo nuovo tipo di problema. In particolare sfidò il suo fratello più anziano Jacob con cui a quel tempo era impegnato in una specie di contesa e che, pubblicamente, definì incompetente a risolvere il problema. I matematici riconobbero immediatamente il carattere diverso del problema della brachistocrona: la quantità che qui doveva essere minimizzata non dipendeva da una o più variabili numeriche, ma dall'intera curva.

La curva trovata da Bernoulli era la **cicloide**, scoperta di recente. Huygens aveva mostrato che un pendolo ideale, che oscilla senza attrito sotto l'influenza della gravità su una cicloide, ha un periodo di oscillazione indipendente dall'ampiezza del moto, mentre era noto che su un cammino circolare, come quello di un pendolo ordinario, tale indipendenza è soltanto approssimativamente vera e questo era considerato un inconveniente nell'uso del pendolo per orologi di precisione. La cicloide, che portava il nome di tautocrona, ora acquistava il nuovo titolo di brachistocrona (dal greco *βράχυστος*, *il più breve* e *χρῶνος*, *tempo*).

## 2.1 Il metodo di Bernoulli

Analizziamo il metodo utilizzato da Bernoulli e a tal fine consideriamo una particella di massa  $m$ . Orientando positivamente l'asse  $y$  verso il basso (come mostrato in Figura 2.1), la forza gravitazionale sulla superficie terrestre ha energia potenziale  $T = (x, y) = -mgy$ . Allora, per la legge di conservazione dell'energia, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = k,$$

con  $k$  costante. Sia  $A = (x_0, y_0)$  il punto iniziale del moto posto sull'asse  $y = 0$ .

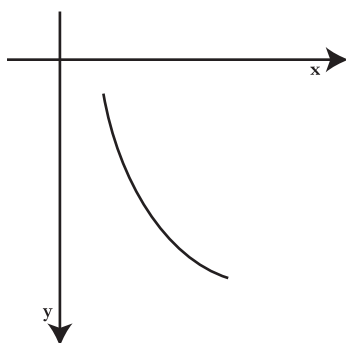


Figura 2.1: Moto di una particella

Per tale moto

$$k = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgy_0 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Poichè la conservazione dell'energia vale non solo in caduta libera, ma anche se la particella è vincolata su una curva in assenza di attrito, si ha  $v = \sqrt{2gy + v_0^2}$ . Come Bernoulli consideriamo la partenza da fermo, ossia il caso  $v_0 = 0$ , e sostituiamo il nostro problema con uno leggermente diverso. Dividiamo lo spazio in tanti strati sottili orizzontali, ciascuno di spessore  $d$ . Immaginiamo per un momento che la velocità della particella in ogni singolo strato sia costante e vari da uno strato all'altro nel seguente modo: nello strato più vicino ad  $A$  la velocità è  $\sqrt{2g}\sqrt{d}$ , in quello successivo  $\sqrt{2g}\sqrt{2d}$  e nell' $n$ -esimo  $\sqrt{2g}\sqrt{nd}$ , ove  $n$  è tale che  $nd = h$ , distanza verticale tra  $A$  e  $P$  (vedi Figura 2.2). In questo modo approssimiamo il problema originario con un problema in cui si ha un numero finito di variabili. In ciascuno strato il cammino deve essere rettilineo, la curva che minimizza il tempo di percorrenza è una poligonale di cui si devono solamente trovare i vertici con la legge della rifrazione.

Detti  $\alpha$  l'angolo di incidenza e  $\alpha'$  quello di rifrazione, si ha

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{kd}} = \frac{\sin \alpha'}{\sqrt{(k+1)d}}.$$

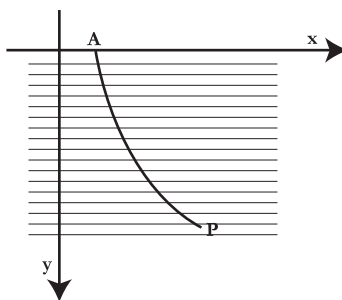


Figura 2.2: Il metodo di Bernoulli

Otteniamo così la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{d}} = \frac{\sin \alpha_2}{\sqrt{2d}} = \dots = \frac{\sin \alpha_n}{\sqrt{nd}} = \frac{\sin \alpha_n}{\sqrt{h}} \quad (2.1)$$

ove  $\alpha_n$  è l'angolo formato dall' $n$ -esimo strato della poligonale con la verticale. Bernoulli immaginò che la condizione (2.1) continuasse a valere per  $d$  tendente a zero e ottenne la seguente proprietà della curva  $C$ : se in un qualunque punto  $P$  di  $C$ ,  $\alpha$  è l'angolo tra la tangente in  $P$  e la verticale ed  $h$  la distanza verticale di  $P$  da  $A$ , si ha

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{h}} = \text{costante}.$$

Infatti  $h = nd$ ,  $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{h}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{(n-1)d}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{h-d}}$  e, se  $d \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{h-d} = \sqrt{h}$ . Come vedremo tra breve, la cicloide (Figura 2.3) verifica queste proprietà.

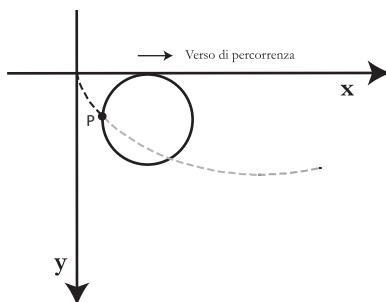


Figura 2.3: Costruzione della cicloide

**Definizione 2.1.1.** Si dice **cicloide** il luogo generato da un punto  $P$  di una circonferenza che ruota senza strisciare lungo una retta.

Se la circonferenza ruota senza muovere il centro, il punto  $P$ , nel sistema di riferimento visto sopra, è descritto da

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = -r \sin \varphi \end{cases}$$

Se la circonferenza ruota senza strisciare, quando  $P$  ha percorso sulla circonferenza un arco individuato dall'angolo  $\varphi$ , il centro si è spostato lungo l'asse  $x$  della lunghezza del corrispondente arco, ossia  $\varphi$ . Poichè la componente orizzontale del centro è  $r$  si ha

$$\begin{cases} x = r(\varphi + \cos \varphi) \\ y = -r(1 - \sin \varphi) \end{cases}$$

Si osservi che il seno dell'angolo tra la tangente e la verticale è dato da  $\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$  dove  $(\dot{x}, \dot{y}) = (\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi})$ , mentre la distanza dalla verticale è  $|y| = r(1 - \sin \varphi)$ . Si ha, dunque:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y|}} = \frac{s - \sin \varphi}{\sqrt{(1 - \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r(1 - \sin \varphi)}} = \frac{\sqrt{1 - \sin \varphi}}{\sqrt{r}\sqrt{2 - 2 \sin \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}.$$

**Osservazione 2.1.1.** Nella dimostrazione di Bernoulli:

1. si è ammesso l'esistenza del minimo;
2. si è ammesso il fatto che la soluzione del problema approssimante approssimi la soluzione.

Vedremo più avanti come possa essere impostato un approccio matematicamente corretto.

## 2.2 Caratterizzazione della Brachistocrona

Poichè la condizione

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \text{costante} \tag{2.2}$$

non dipende dalla parametrizzazione della curva, in un intorno del punto  $t_0$  tale che  $\dot{y}(t_0) \neq 0$  (ovvero a tangente non orizzontale<sup>1</sup>), posso cercare  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  del tipo  $y(t) = t$  che verifichi (2.2). In questo caso si ha  $\dot{y} = 1$  e quindi  $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = c$ .

---

<sup>1</sup>Il ragionamento che seguiremo non è completamente rigoroso perchè non sappiamo ancora trattare i punti a tangente orizzontale

Risolvendo rispetto a  $\dot{x}$  si ottiene  $\dot{x} = \sqrt{\frac{c^2 t}{1-c^2 t}}$  e, scegliendo la parametrizzazione  $\dot{x}(t) > 0$  (se  $t$  cresce  $x$  cresce):

$$x(t) = \int \sqrt{\frac{c^2 t}{1-c^2 t}} dt + c_1.$$

Convieni porre  $t = \frac{1}{c^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \varphi)$  e, dunque,  $dt = \frac{1}{c^2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$ . Allora

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{c^2} \int \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{c^2} \int \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2c^2} \int (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2c^2} (\varphi - \sin \varphi) + c_2, \end{aligned}$$

e

$$y = t = \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \varphi).$$

Le equazioni così ottenute sono le equazioni di una cicloide.

## 2.3 Il problema della brachistocrona dal punto di vista del calcolo delle variazioni

Per capire come trovare un metodo rigoroso per il risolvere il problema della brachistocrona abbiamo bisogno di alcune nozioni preliminari e del teorema 2.3.2 seguente.

**Definizione 2.3.1.** *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo reale. Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice uniformemente continua in  $I$  se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che,  $\forall x, y \in I$  con  $|x - y| < \delta$ ,  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .*

**Teorema 2.3.1 (di Heine-Cantor).** *Sia  $f$  continua sull'intervallo reale chiuso e limitato  $I = [a, b]$ . Allora  $f$  è uniformemente continua su  $I$ .*

**Lemma 2.3.1.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$ . Allora  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \epsilon |y - x|$ .*

*Dimostrazione.* Fissato  $\epsilon > 0$ , prendiamo  $\delta > 0$  tale che per  $|y - x| < \delta$  si ha  $|f'(y) - f'(x)| < \epsilon$ . Un tale  $\delta$  esiste perchè  $f'$  è uniformemente continua in  $[a, b]$  per il teorema 2.3.1. Supponiamo, per fissare le idee,  $y > x$ , (il caso  $y < x$  si

tratta analogamente). Per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo  $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(s)ds$  e, inoltre,  $f'(x)(y - x) = \int_x^y f'(x)ds$ . Quindi

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| &= \left| \int_x^y f'(s)ds - \int_x^y f'(x)ds \right| = \\ &= \left| \int_x^y (f'(s) - f'(x))ds \right| \leq \int_x^y |f'(s) - f'(x)|ds. \end{aligned}$$

Poichè  $s \in [x, y]$ , si ha che  $|s - x| \leq |x - y| < \delta$  e, dunque,  $|f'(s) - f'(x)| < \epsilon$ . Pertanto

$$\int_x^y |f'(s) - f'(x)|ds \leq \int_x^y \epsilon ds = \epsilon(y - x) = \epsilon|y - x|.$$

□

Ora possiamo dimostrare il seguente:

**Teorema 2.3.2.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$ . Allora  $l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$  una partizione dell'intervallo  $[a, b]$  tale che  $t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{m}$ . Dalla definizione di integrale di Riemann segue che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \|\dot{\gamma}(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt, \quad (2.3)$$

mentre dal teorema A.2.1 si ha

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = l(\gamma). \quad (2.4)$$

Basta, dunque, far vedere che i due limiti al primo membro di (2.3) e (2.4) sono uguali. Dal lemma 2.3.1 applicato in ciascuna componente di  $\gamma$  si ha

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \epsilon(t_i, t_{i+1})(t_{i+1} - t_i)$$

con  $|\epsilon(t_i, t_{i+1})| \leq \epsilon_m \rightarrow 0$ . Ma allora

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| - \sum_{i=0}^{m-1} \|\dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| \right| = \\ &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| - \|\dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \left| \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| - \|\dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) - \dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \epsilon_m(t_{i+1} - t_i) = \epsilon_m(b - a). \end{aligned}$$

□

### 2.3.1 Formalizzazione del problema della brachistocrona

A questo punto siamo pronti per formalizzare il nostro problema. Abbiamo visto dalla legge di conservazione dell'energia che la velocità lungo la curva che stiamo cercando, nel caso in cui  $v_0 = 0$ , è  $\sqrt{2gy}$ . Il tempo infinitesimo  $dt$  impiegato dal punto  $P$  per percorrere l'elemento d'arco  $ds$  è dato dalla formula  $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$  e, dunque, il tempo di percorrenza totale per andare da  $A$  a  $B$  lungo la curva  $\gamma$  risulta essere

$$T(\gamma) = \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{2gy}}.$$

Ma il teorema 2.3.2 dice che  $ds = \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} dt$ , quindi

$$T(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle}}{\sqrt{y}} dt$$

ove  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Si osservi che  $T$  non dipende dal modo in cui  $\gamma$  è parametrizzata per cui possiamo supporre che  $a$  e  $b$  siano fissati una volta per tutte. Si tratta, allora, di trovare le curve  $\gamma \in C^1([a, b], R^2)$  che rendono minimo il tempo  $T(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dt$  con la condizione  $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$  (dove possiamo supporre  $A$  coincidente con l'origine  $O$  degli assi e  $B = (x_B, y_B)$  tale che  $y_B > 0$ , vedi Figura 2.4). Questo è il punto di vista di oggi.

Le moderne tecniche di Calcolo delle Variazioni consentono, inoltre, di dimostrare le seguenti proprietà:

1.  $\exists \gamma \in C^1([a, b], R^2), \gamma(a) = A, \gamma(b) = B$  che minimizza  $T$  (tale dimostrazione risulta molto complicata);
2.  $\gamma(t)$  interseca l'asse  $y = 0$  solo in  $t = a$ ;
3. il valore di  $T$  non dipende dalla parametrizzazione e, pertanto, possiamo supporre

$$\frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} = cost;$$



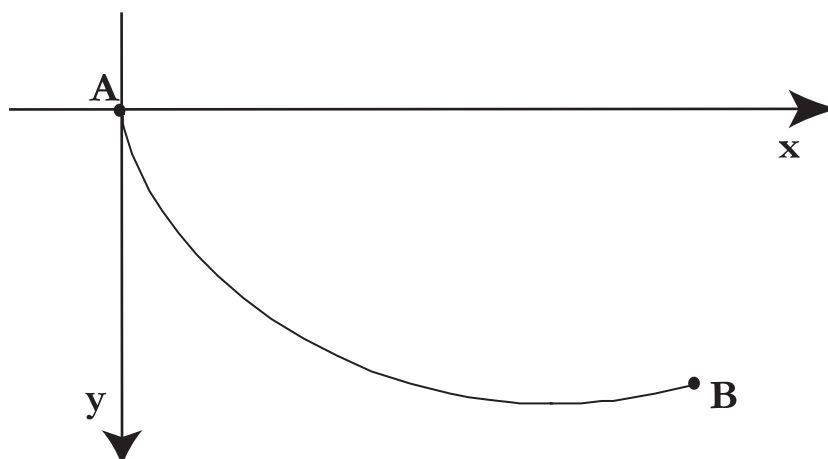


Figura 2.4: Arco di cicloide

4.  $\gamma$  verifica la seguente condizione:  $dT(\gamma)[\alpha, \beta] = 0$ . Scelto  $\alpha$  qualsiasi e  $\beta = 0$  si ha  $\forall \dot{\alpha}$ :

$$\int_a^b \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \dot{\alpha} = 0$$

5.  $\gamma$  è di classe  $C^2$  e, posto  $\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \Gamma$ , si ha

$$\int_a^b \Gamma \dot{\alpha} = 0$$

e, integrando per parti,  $\forall \alpha$  otteniamo:

$$\int_a^b \dot{\Gamma} \alpha = 0$$

6. per il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni si ha allora  $\dot{\Gamma} = 0$  da cui

$$\Gamma = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \text{cost}$$

che è l'equazione della brachistocrona.

### 2.3.2 Unicità della soluzione

Vediamo ora che esiste un'unica brachistocrona che parte da  $A = (0, 0)$  con velocità nulla e arriva in  $B = (b_1, b_2)$ , con  $b_1, b_2 > 0$ . A causa dell'invarianza per

riparametrizzazioni basta dimostrare l'unicità della brachistocrona parametrizzata in  $[0, 1]$  tale che  $(x(0), y(0)) = A$  e  $(x(1), y(1)) = B$ . Consideriamo la curva soluzione

$$\begin{cases} x(t) = r(\varphi(t) + \cos \varphi(t)) - r\frac{\pi}{2} \\ y(t) = r(1 - \sin \varphi(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

La condizione  $\frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{y}} = \text{cost}$  implica  $\dot{\varphi} = \text{cost} \equiv \alpha$ , da cui  $\varphi(t) = \alpha t + \frac{\pi}{2}$ . In tal modo  $x(0) = 0$  e  $y(0) = 0$ , cioè

$$\begin{cases} x(t) = r(\alpha t + \frac{\pi}{2} + \cos(\alpha t + \frac{\pi}{2})) - r\frac{\pi}{2} \\ y(t) = r(1 - \sin(\alpha t + \frac{\pi}{2})) \end{cases} \quad (2.6)$$

rappresenta l'equazione di tutte e sole le brachistocrone che partono da  $A = (0, 0)$  con velocità nulla. Cerchiamo  $\alpha$  e  $r$  in modo che la curva, al tempo  $t = 1$ , arrivi nel punto  $B = (b_1, b_2)$ , cioè tali che

$$\begin{cases} \alpha + \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{b_1}{r} \\ 1 - \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{b_2}{r} \end{cases} \quad (2.7)$$

La soluzione del sistema è l'intersezione tra la retta di direzione  $(b_1, b_2)$  passante per l'origine  $A = (0, 0)$  del sistema di riferimento e la cicloide di raggio unitario che parte da  $A$ . Basta allora dimostrare che la cicloide è strettamente concava per poter affermare che esiste una e una sola intersezione, e quindi esistono  $\alpha$  e  $r$  unici tali che la brachistocrona arrivi in  $B$  all'istante desiderato  $t = 1$ . Mostriamo, allora, che  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ,  $\forall \varphi \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi[$ . Si ha, infatti,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{-\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

e, quindi,  $\forall \varphi \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi[$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{\sin \varphi (1 - \sin \varphi) - \cos^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2}}{1 - \sin \varphi} = \frac{-(1 - \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)^3} = \frac{-1}{(1 - \sin \varphi)^2} < 0.$$

Da notare che la cicloide al primo membro della 2.5, a priori, non ha niente a che fare con la soluzione del nostro problema. Tuttavia ci serve per la dimostrazione dell'asserto.

# Conclusioni

Siamo giunti, dunque, alla meta di questo nostro lavoro. La trattazione da noi proposta si è spesso volutamente limitata ad un livello descrittivo dell'argomento, al fine di non appesantire il tutto con dimostrazioni e dettagli che avrebbero richiesto strumenti non alla portata dei non addetti ai lavori. Ci auguriamo, comunque, che queste note possano accendere nel lettore un nuovo interesse per la matematica e la sua grande potenzialità per la descrizione e lo studio dei fenomeni naturali.

# Appendice A

## Minima lunghezza

### A.1 Definizione di lunghezza di una curva

L'idea di lunghezza di una curva, pensiamo ad esempio alla lunghezza di un percorso stradale, è molto chiara per la nostra intuizione. Usando i concetti e le proprietà di estremo superiore e di limite possiamo rendere precisa questa nozione.

Sia  $[a, b] \in R$  un intervallo chiuso,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

**Definizione A.1.1.** Si dice curva (o cammino) un'applicazione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Allora possiamo scrivere  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ , dove  $t$  viene detto *parametro* e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  le *componenti* della curva  $\gamma$ . I casi a cui saremo più interessati saranno  $n = 2$  e  $n = 3$ .

**Definizione A.1.2.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice continua se ogni  $\gamma_i$  è continua, mentre  $\gamma$  si dice di classe  $C^k$  se ogni  $\gamma_i$  è di classe  $C^k$ .

I punti  $A = \gamma(a)$  e  $B = \gamma(b)$  si dicono *estremi del cammino*  $\gamma$ .

Dati due punti dello spazio  $C, D \in \mathbb{R}^n$ , indichiamo con  $\overline{CD}$  la lunghezza del segmento di estremi  $C$  e  $D$ ,  $CD = \{C + \lambda(D - C) : \lambda \in [0, 1]\}$ .

Consideriamo, allora, un insieme finito  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$  di punti di  $[a, b]$ . Ad essi corrispondono i punti della curva  $P_0 = A, P_1, \dots, P_m = B$  dove  $P_k = \gamma(t_k)$ . Indicata con  $\Gamma_m$  la poligonale di vertici  $P_0, P_1, \dots, P_m$ , se ne definisce in modo ovvio la lunghezza come:

$$l(\Gamma_m) = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{m-1}P_m}$$

**Osservazione A.1.1.** Sia  $\Gamma_{m+1}$  la poligonale ottenuta dalla precedente aggiungendo il punto  $Q = \gamma(s)$  con  $s \in ]t_k, t_{k+1}[$ , (Figura A.1). Allora, per la disuguaglianza

triangolare,  $l(\Gamma_{m+1}) \geq l(\Gamma_m)$  e vale l'uguaglianza se e solo se  $Q$  si trova sul segmento  $P_k P_{k+1}$ .

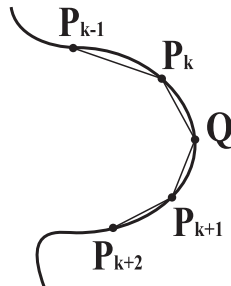


Figura A.1: Poligonale  $\Gamma_{m+1}$

**Definizione A.1.3.** Si dice *lunghezza della curva*  $\gamma$  l'estremo superiore della lunghezza della poligonale con vertici in  $\gamma([a, b])$ . Tale lunghezza si indica con  $l(\gamma)$ .

**Definizione A.1.4.** La curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *rettificabile* se  $l(\gamma) < \infty$ .

## A.2 Proprietà fondamentali

Dato il vettore  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , d'ora in poi indichiamo con  $\| \cdot \|$  la norma euclidea,  $\|x\| = \sum_i x_i^2$ . Allora  $\| \cdot \|$  è la distanza euclidea dall'origine del punto dello spazio individuato dal vettore  $x$ .

La definizione di lunghezza introdotta gode delle seguenti importanti proprietà:

1. **Additività:** Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c \in ]a, b[$ ,  $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$ ,  $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$ . Allora  $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ ;
2. **Invarianza per isometrie:** Sia  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una isometria (cioè  $T$  applicazione lineare tale che  $\|Tx\| = \|x\|$ ). Allora  $l(T\gamma) = l(\gamma)$ .
3. **Invarianza per riparametrizzazione:** Siano  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  continua e strettamente crescente (o decrescente) e  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$ . Allora  $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$ . La curva  $\tilde{\gamma}$  si dice una *riparametrizzazione* di  $\gamma$ .

Il seguente teorema aiuta ad accettare, da un punto di vista intuitivo, la definizione che abbiamo dato di lunghezza di una curva.

**Teorema A.2.1.** Siano  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$  tali che  $t_k = a + \left(\frac{b-a}{m}\right)k$ , (l'intervallo  $[a, b]$  è, cioè, suddiviso in sottointervalli ciascuno di ampiezza  $\frac{b-a}{m}$ ), e  $\Gamma_m$  la poligonale di vertici in  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$ . Allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} l(\Gamma_m) = l(\gamma).$$

*Dimostrazione.* Sia  $l(\gamma) < \infty$ . Fissato  $\epsilon > 0$ , consideriamo una partizione di  $[a, b]$   $P_\epsilon = \{s_0 = a < s_1 < \dots < s_k = b\}$  tale che, detta  $\Gamma(P_\epsilon)$  la poligonale di vertici  $\gamma(s_0), \gamma(s_1), \dots, \gamma(s_k)$ , si abbia

$$l(\Gamma(P_\epsilon)) \geq l(\gamma) - \epsilon. \quad (\text{A.1})$$

Si noti che una partizione  $P_\epsilon$  siffatta esiste per la definizione di estremo superiore. Sia  $m$  tale che

$$\frac{b-a}{m} < \max\{s_{i+1} - s_i : i = 0, \dots, k-1\}. \quad (\text{A.2})$$

Allora  $\forall i = 0, \dots, k-1$  esiste  $h \in \{0, \dots, m\}$  tale che  $t_h = a + \left(\frac{b-a}{m}\right)h \in ]s_i, s_{i+1}[$ . Infatti, detto  $\bar{h} = \max\{h = 0, \dots, m : t_h \leq s_i\}$ , se per assurdo  $t_{\bar{h}+1} \notin ]s_i, s_{i+1}[$ , si ha  $t_{\bar{h}+1} \geq s_{i+1}$ . Allora  $\frac{b-a}{m} = t_{\bar{h}+1} - t_{\bar{h}} \geq s_{i+1} - s_i$ , in contraddizione con la (A.2). Dunque, per la disuguaglianza triangolare,

$$l(\Gamma_m) \geq l(\Gamma(P_\epsilon))$$

da cui, per la (A.1),

$$l(\Gamma_m) \geq l(\gamma) - \epsilon. \quad (\text{A.3})$$

Poichè  $l(\Gamma_m) \leq l(\gamma)$  per ogni  $m$ , dalla definizione di limite otteniamo la tesi. Similmente nel caso  $l(\gamma) = +\infty$ .  $\square$

**Osservazione A.2.1.** Con analogia dimostrazione si prova che il passaggio al limite nel teorema A.2.1 dà lo stesso risultato per qualunque partizione  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  quando il  $\max\{t_{i+1} - t_i : i = 0, \dots, m-1\} \rightarrow 0$ .

**Teorema A.2.2.** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^n$ . Tra le curve che congiungono  $A$  e  $B$ , il minimo della lunghezza vale  $\|A - B\|$  ed è realizzato da quelle del tipo

$$\gamma(t) = A + \varphi(t)(B - A),$$

ove  $\varphi$  è una funzione continua, debolmente crescente e tale che  $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$ . Supponiamo che  $\exists t \in ]a, b[$  tale che  $\gamma(t) \notin AB$ . Poichè  $d(A, B) < d(A, \gamma(t)) + d(\gamma(t), B)$  ove  $d(C, D) = \|D - C\|$ , si ha che  $l(\gamma) \geq \|A - \gamma(t)\| + \|\gamma(t) - B\| > \|B - A\|$ . Dunque la

curva  $\gamma(t)$  che minimizza sta tutta sul segmento  $AB$ . Allora  $\gamma(t) = A + \varphi(t)(B - A)$  e, ragionando per assurdo, si trova che  $\varphi$  deve essere debolmente crescente. Siano, inoltre,  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  una partizione di  $[a, b]$  e  $\Gamma_m$  la relativa poligonale. Dove  $\varphi$  non è monotona, la curva non varia la sua lunghezza e allora, se  $t_i$  e  $t_{i+1}$  appartengono ad un intervallo ove  $\varphi$  è costante, uno di loro può essere soppresso in quanto ai fini di  $l(\Gamma_m)$  non danno alcun contributo. Eliminando, dunque, eventuali punti superflui della partizione, possiamo assumere

$$0 = \varphi(t_0) < \varphi(t_1) < \dots < \varphi(t_m) = 1.$$

Posto  $s_i = \varphi(t_i)$  e  $\tilde{\gamma} = A + s(B - A)$ , si ha

$$l(\gamma(\varphi(t_i)), \gamma(\varphi(t_{i+1}))) = l(\tilde{\gamma}(s_i), \tilde{\gamma}(s_{i+1}))$$

che rappresenta la lunghezza del segmento congiungente  $A + s_i(B - A)$  con il punto  $A + s_{i+1}(B - A) = (s_{i+1} - s_i)\|B - A\|$ .

Ma allora

$$l(\Gamma_m) = \sum_i (s_{i+1} - s_i)\|B - A\| = \|B - A\| \sum_i (s_{i+1} - s_i) = \|B - A\|$$

e il teorema è così completamente dimostrato. □