Progetto Lauree Scientifiche

Iacopo Malaspina

Dimostriamo la seguente proposizione:

Dato un triangolo ABQ, se da un punto F del lato BQ si tracciano le parellele FE ad AQ, FG ad AB, l'area del parallelogramma AEFG è massima quando F è il punto medio di BQ ed E il punto medio di AB.

In altre parole

$$\text{Se } E \in \overline{AB} \text{ con } E \neq K \text{ e } \overline{AK} = \overline{KB} \Longrightarrow \mathcal{A}(AEFG) < \mathcal{A}(AKHD)$$

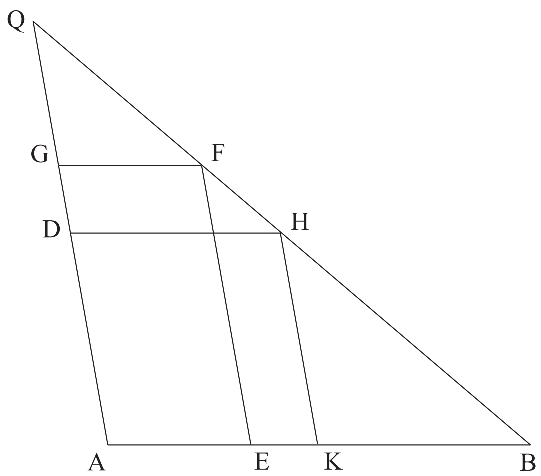

Figura 1: *Il quadrilatero AKHD è quello di area massima*

In questo testo analizzeremo due possibili strade:

1. dimostrazione geometrica di Euclide ;
2. dimostrazione analitica ;

1. Dimostrazione geometrica di Euclide: Il problema che vogliamo risolvere è equivalente a quello presentato da Euclide ne Gli Elementi (Libro VI, prop. 27), rappresentato in figura 2 e enunciato come di seguito:

"Di tutti i parallelogrammi applicati ad una stessa retta e che siano mancanti di parallelogrammi simili e similmente disposti rispetto a quello descritto sulla metà della retta, è massimo il parallelogrammo che è applicato alla metà della retta ed è simile al parallelogrammo mancante."

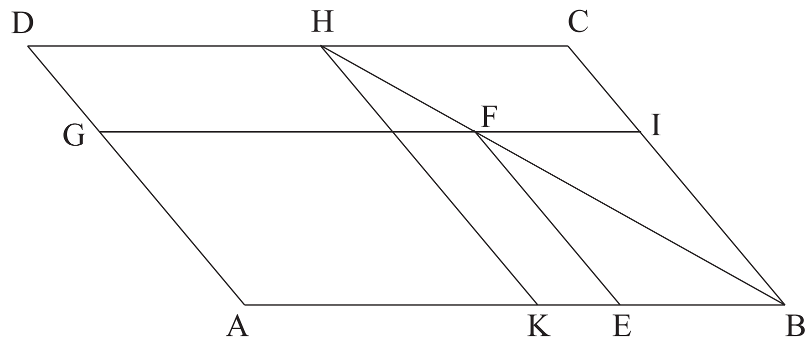

Figura 2: *Problema di Euclide (VI.27)*

Dato un parallelogramma ABCD si traccia un segmento da B che intersechi CD in H, punto medio di DC. Se da un punto F del lato BH si tracciano le parallele FE ad AD e FG ad AB, l'area del parallelogramma AEFG è massima quando F coincide con H (quando il parallelogramma AEFG coincide con AKHD).

Dimostriamo che i due enunciati sono equivalenti. Costruisco il parallelogramma a partire dal triangolo, come in figura:

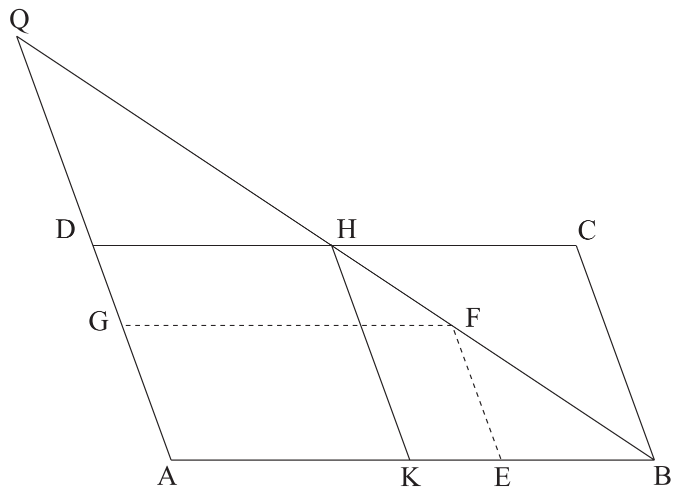

Figura 3: Parallelogramma costruito a partire dal triangolo

A questo punto abbiamo due casi:

1. $F \in \overline{HB}$ allora, come si può notare dalla figura, la situazione è completamente identica ;

2. $F \in \overline{QH}$ allora riusciamo a ricondurci al caso 1. , ossia per ogni punto C appartenente a $\overline{QH}$ esiste un punto F appartenente a $\overline{BH}$ tale per cui $\mathcal{A}(ADCE) = \mathcal{A}(AGFI)$;

Quindi andiamo a dimostrare che $\mathcal{A}(ADCE) = \mathcal{A}(AGFI)$.

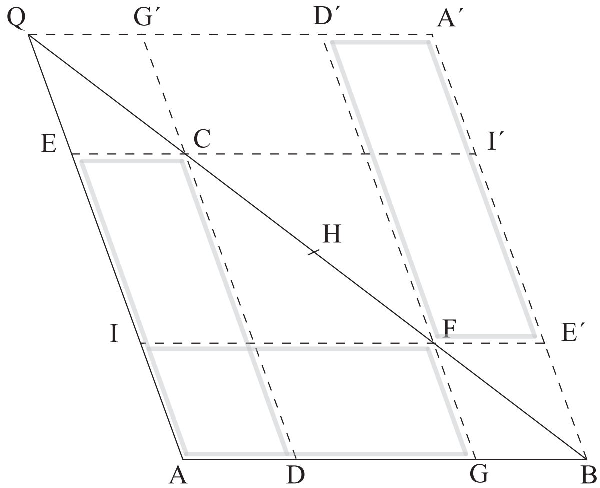

Figura 4: Costruiamo il simmetrico di ABQ

Dimostrazione. Dal momento che i triangoli ABQ e $A'BQ$ sono congruenti, possiamo dire che hanno la stessa area. Allo stesso modo i parallelogrammi $ADCE$ e $FE'A'D'$ hanno medesima area.

Quindi dimostrare la tesi equivale a provare che $\mathcal{A}(FE'A'D') = \mathcal{A}(AGFI)$. Ma questo è ovviamente vero perché

$$\mathcal{A}(ABQ) = \mathcal{A}(IFQ) + \mathcal{A}(GBF) + \mathcal{A}(AGFI) \ ,$$

$$\mathcal{A}(A'BQ) = \mathcal{A}(QFD') + \mathcal{A}(FBE') + \mathcal{A}(FE'A'D')$$

Ma sempre per la congruenza abbiamo

$$\mathcal{A}(IFQ) = \mathcal{A}(FD'Q) \ , \ \mathcal{A}(GBF) = \mathcal{A}(BE'F)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(FE'A'D') = \mathcal{A}(AGFI).$$

□

Ora quindi basta risolvere il problema di Euclide applicato al parallelogramma ABCD.

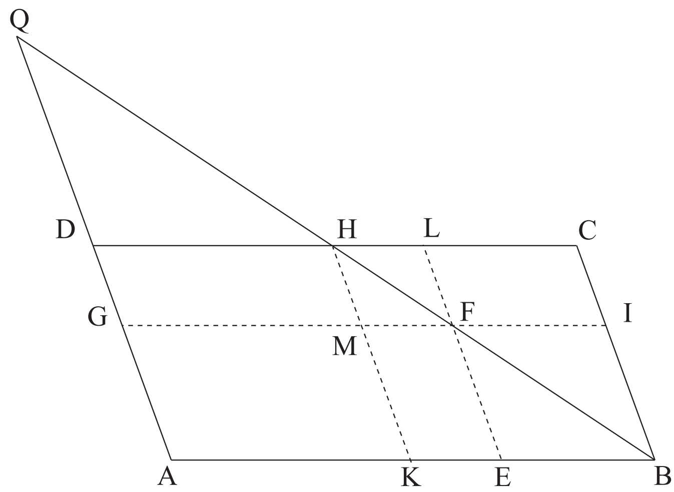

Figura 5: Figura di riferimento

Dobbiamo provare:

Dato un parallelogramma ABCD e tracciato un segmento da B che intersechi CD in H, punto medio di DC, se da un punto F del lato BH si tracciano le parallele FE ad AD e FG ad AB, l'area del parallelogramma AEFG è minore dell'area del parallelogramma AKHD.

Dimostrazione. I triangoli KBH e HBC sono congruenti, quindi hanno la stessa area.

La stessa cosa accade per i triangoli MFH = HFL e EBF = FBI. Quindi si deduce che $\mathcal{A}(KEFM) = \mathcal{A}(LFIC)$.

Allora dal momento che

$$\mathcal{A}(KBIM) = \mathcal{A}(KEFM) + \mathcal{A}(EBIF) \text{ e}$$

$$\mathcal{A}(EBCL) = \mathcal{A}(FICL) + \mathcal{A}(EBIF)$$

possiamo dire

$$\mathcal{A}(KBIM) = \mathcal{A}(EBCL).$$

Ma $\mathcal{A}(AKMG) = \mathcal{A}(KBIM)$, perché K è il punto medio di AB.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \mathcal{A}(AEFG) &= \mathcal{A}(AKMG) + \mathcal{A}(KEFM) \\ &= \mathcal{A}(LEBC) + \mathcal{A}(KEFM) < \mathcal{A}(KBCH) = \mathcal{A}(AKHD) \\ \Longrightarrow \mathcal{A}(AEFG) &< \mathcal{A}(AKHD) \end{aligned}$$

□

2. Dimostrazione analitica: Possiamo risolvere il problema con metodi dell'analisi matematica.

Sia ABQ il seguente triangolo

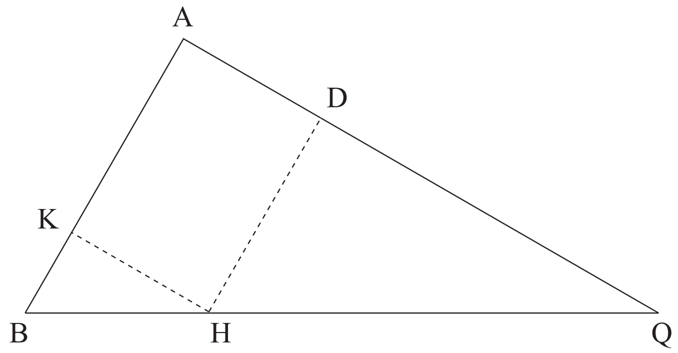

Figura 6: Triangolo ABQ

Pongo

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{BQ}} = x, \text{ fattore di proporzionalità}$$

Ciò implica

$$\frac{\overline{HQ}}{\overline{BQ}} = 1 - x$$

infatti

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{BQ}} = x \Longrightarrow \overline{BH} = x \cdot \overline{BQ} \Longrightarrow \overline{BH} - \overline{HQ} = x \cdot \overline{BQ}$$

$$\Longrightarrow \overline{HQ} = \overline{BQ} - x \cdot \overline{BQ} \Longrightarrow \overline{HQ} = \overline{BQ} \cdot (1 - x) \Longrightarrow \frac{\overline{HQ}}{\overline{BQ}} = 1 - x.$$

Quindi

$$\mathcal{A}(BHK) = x^2 \cdot \mathcal{A}(ABQ)$$
$$\mathcal{A}(HQD) = (1-x)^2 \cdot \mathcal{A}(ABQ)$$

Infatti, per quanto riguarda la prima sappiamo che

$$\mathcal{A}(BHK) = \overline{BH} \cdot h_1 \text{ e } \mathcal{A}(ABQ) = \overline{BQ} \cdot h_2.$$

Moltiplico e divido la prima per h_2 e ho

$$\mathcal{A}(BHK) = x \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot \mathcal{A}(ABQ).$$

Ma dalle proprietà dei triangoli simili sappiamo che in triangoli simili le basi stanno tra loro come le rispettive altezze. Allora

$$\frac{h_1}{h_2} = x \Longrightarrow \mathcal{A}(BHK) = x^2 \cdot \mathcal{A}(ABQ).$$

A questo punto possiamo dire che

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(KHDA) &= \mathcal{A}(ABQ) - \mathcal{A}(BHK) - \mathcal{A}(HQD) \\
&= \mathcal{A}(ABQ) - x^2 \cdot \mathcal{A}(ABQ) - (1-x)^2 \cdot \mathcal{A}(ABQ) \\
&= \Big[1 - x^2 - (1-x)^2\Big] \cdot \mathcal{A}(ABQ) \\
&= \Big[2 \cdot (x - x^2)\Big] \cdot \mathcal{A}(ABQ)
\end{aligned}$$

Quindi la funzione che massimizzo è

$$f(x) = 2 \cdot (x - x^2)$$

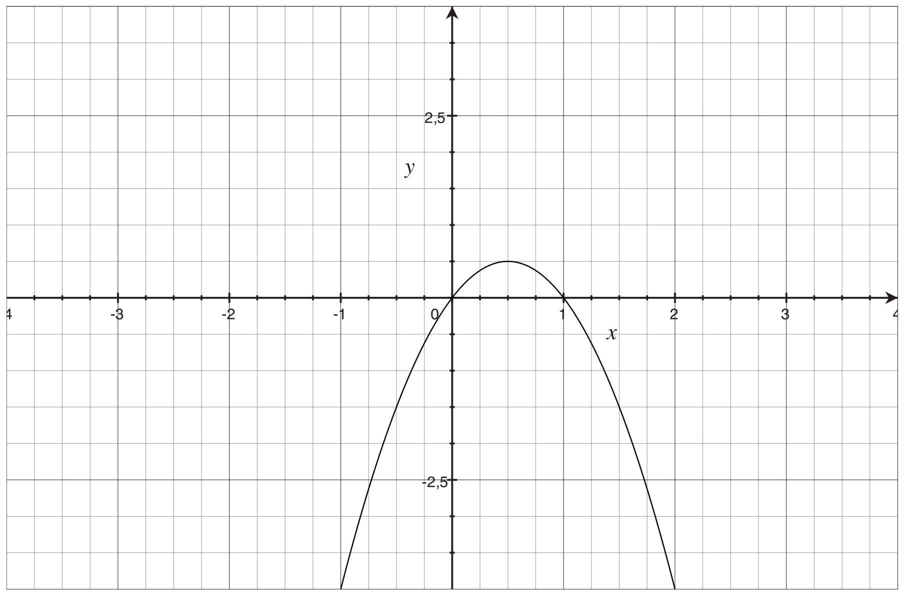

Figura 7: Grafico della funzione $f(x) = 2 \cdot (x - x^2)$

Essendo $x - x^2$ la parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice $\frac{1}{2}$, si deduce il massimo è proprio $\frac{1}{2}$ e quindi

$$\overline{BH} = \frac{\overline{BQ}}{2}.$$