

Reminiscenze di Gödel leggendo Borges

Camerino, 12 aprile 2007

*Carlo Toffalori
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino*

1. Gödel e Borges

Kurt Gödel, matematico “austriaco” (?),
1906-1978

- 1930: Teorema di Completezza
- 1931: Teoremi di Incompletezza
- 1934: funzioni ricorsive
- 1938: contributo all'indipendenza dell'Assioma della Scelta e dell'Ipotesi del Continuo, ...

Jorge Luis Borges, scrittore argentino,
1899-1986: autore di saggi, racconti,
poesie

- L'Aleph
- Finzioni
- Elogio dell'Ombra,
- Il libro di sabbia, ...

Quali punti di contatto?

- Interesse di Borges per la Matematica
- Borges, “*Il manoscritto di Brodie*”, “*Juan Muraña*”: Gödel? No, Roberto Godel, amico e poeta.

Una “*disquisizione sul nulla*”?

2. Borges e la Matematica

G. Martinez, *Borges y la Matematica*, Editorial Seix Barral, 2006

F. Merrell, *Unthinking thinking: Jorge Luis Borges, Mathematics and the New Physics*, Purdue University Press, 1991

Rischio di essere ripetitivi? *“Finzioni”,
“Pierre Menard, autore del Chisciotte”
“non volle comporre un altro Chisciotte –
ciò che è facile – ma il Chisciotte,...
parola per parola e riga per riga”*.

Il fascino della Matematica per Borges:
non in certezze alla Hilbert...

*“Tre racconti”, “Tigri azzurre”,
“l’anelito all’ordine che al principio creò
la matematica”*

“Elogio dell’ombra”

*“... Giungo al centro,
alla mia chiave, all’algebra,...
Presto saprò chi sono”*

... ma in dubbi, enigmi, paradossi, come
l'Ultimo Teorema di Fermat prima di
Wiles

*“L’Aleph”, “Abejacàn il Bojarí, ucciso
nel suo labirinto”, “il teorema che Fermat
non scrisse in margine a una pagina di
Diofanto”*

*“L’ombra”, “il teorema perduto di
Fermat”.*

La Matematica dell'infinito:
l'imprevedibile capacità di far luce su ciò
che ci trascende, e i paradossi che ne
derivano.

*“Storia dell'Eternità”, “l'eroica teoria
degli insiemi” di Georg Cantor, cenni
sulla equipotenza tra insiemi (ci sono tanti
naturali quanti multipli di 3018, o quante
potenze di 3018).*

*“La cifra”, “Nihon”
“Ho percepito, nelle pagine di Russell, la
teoria degli insiemi, la Mengenlehre, che
postula e esplora i vasti numeri che un
uomo immortale non raggiungerebbe
neppure se consumasse la sua eternità
contando, e le cui dinastie immaginarie
hanno come cifre le lettere dell'alfabeto
ebraico.”*

L'amore per le sottigliezze logiche

“Finzioni”, “Pierre Menard, Autore del Chisciotte”

“Appunti per una monografia sulla logica simbolica di Georges Boole, ... l'opera ‘Les problèmes d'un problème’ (Paris, 1917) che discute nell'ordine cronologico le soluzioni dell'illustre problema di Achille e della Tartaruga,... i capitoli dedicati a Russell e a Descartes”

I paradossi di Zenone

“Discussione”,

- *“La perpetua corsa di Achille e della tartaruga”* (rinnova spiegazioni sui numeri cardinali),

- *“Metempsicosi della tartaruga”* (seguendo Lewis Carroll trasferisce il paradosso di Zenone ai sillogismi logici, quando il punto di partenza è la premessa e l’irraggiungibile punto di arrivo la conclusione).

Mondi non standard

“Finzioni”, “Tlön, Uqbar, Orbis Tertius”: la geometria del mondo Tlön *“ignora le parallele e dichiara che l’uomo che si sposta modifica le forme che lo circondano”*, l’aritmetica Tlön si basa su *“ la nozione di numero indefinito. L’operazione del contare modifica le quantità e le trasforma da indefinite in definite”*.

3. Incompletezze

Teoremi di Incompletezza (Gödel, 1931):
una teoria matematica T

- coerente
- capace di trattare \mathbf{N} , $+$, \times ,
- umanamente accessibile

ammette enunciati che non sa decidere (né dimostrare né confutare); in certi casi T non sa neppure certificare la sua stessa coerenza.

Ogni tentativo umano T di assiomatizzare $(\mathbf{N}, +, \times)$ si imbatte in enunciati che sono veri $(\mathbf{N}, +, \times)$ ma non dimostrabili da T .

Vero non implica dimostrabile.

Esempio. $T = PA =$ l'aritmetica di Peano al primo ordine

Un albero di estensioni perennemente incomplete.

Reminiscenze in Borges.

“*Finzioni*”, “*La biblioteca di Babele*” (1941). Una biblioteca “*interminabile*”, “*righe ragionatevoli*” e “*cacofonie, farragini verbali e incoerenze*”. Di questo “*informe e caotico*” Universo, ogni interpretazione è possibile:

- “*il libro ciclico*” che “*è Dio*”,
- il “*libro totale*”, la rivelazione, ...

e, perché no?

- la Biblioteca stessa – e il suo “*libro totale*”- sono la teoria del primo ordine dell’addizione e della moltiplicazione dei naturali,
- i tentativi di comprendere l’una e scoprire l’altro le varie assiomatizzazioni incomplete di questa teoria, ad esempio l’aritmetica PA;

- l'affannarsi della ricerca sul senso e sulla struttura della biblioteca, la Metamatematica.

Anche notevole: l'idea di un universo che contiene se stesso (il paradosso di Russell)

- un libro totale che appartiene alla biblioteca ma è la biblioteca),

- vedi anche “*L’Aleph*”, “*La scrittura del Dio*”.

PA e le sue estensioni

“*Elogio dell’ombra*”, “*Il labirinto*”

“*Non sperare che l’arduo tuo cammino
che ciecamente si biforca in due,
che ciecamente si biforca in due,
abbia fine...*”

“Finzioni”, “Il giardino dei sentieri che si biforcano”: una spia cinese in fuga, un sinologo, l’antenato Ts’ui Pen, *“comporre un libro e un labirinto”*.

- Il labirinto? Nessuna traccia nelle *“vaste terre che erano state sue”*,
- Il libro? Una *“confusa farragine di varianti contraddittorie”*.

Ma il libro è il labirinto,

“diversi futuri, diversi tempi, che a loro volta si proliferano e si biforcano. Di qui le contraddizioni...”

La conclusione: *“una innumerabile contrizione e stanchezza”*.

“*Innumerabile*”: quel che la macchina non sa eseguire.

L'avvento della Computabilità e l'apporto di Gödel:

- le funzioni ricorsive primitive (anche nei Teoremi di Incompletezza);
- le funzioni ricorsive (1934, Church, Kleene, Turing, il lambda-calcolo e le macchine di Turing).

Gödel

“*Proposizioni diofantee indecidibili*”,
anni trenta

“*che questa sia effettivamente la definizione corretta di calcolabilità meccanica è stato stabilito al di là di ogni dubbio da Turing.*”

*“Su un’estensione della matematica finitaria fino ad oggi non utilizzata”, 1972
“E’ ben noto che A. M. Turing ha fornito una definizione elaborata del concetto di funzione sui numeri naturali calcolabile **meccanicamente**... Il problema se la definizione di Turing sia adeguata... ammette senza dubbio una risposta affermativa.”*

Calcolabilità “meccanica”?

“Alcune osservazioni sui risultati di indecidibilità”, 1972

L’opinione che “i processi mentali non possano andare al di là di quelli meccanici” è “un errore filosofico nell’opera di Turing” :

“Ciò che Turing trascura completamente è il fatto che la mente, nel suo uso, non è statica, ma si sviluppa continuamente, cioè che noi riusciamo a comprendere termini astratti in modo sempre più preciso, man mano che li utilizziamo e che nella sfera della nostra comprensione entra un numero sempre maggiore di termini astratti.”

4. Codici e sogni

“*Innumerabile*”: il procedimento di numerazione di Gödel

Pitagora, Leibniz, Gödel: “Tutto è numero”?

Numeri naturali / proposizioni sui numeri / dimostrazioni sui numeri...

Più identità, nessuna identità?

Borges: la vertigine di scoprirsi un sogno.

“*Prologhi*”, “*Lewis Carroll: Opere*”

“*Alice sogna il Re Rosso che sta sognandola, e qualcuno l’avverte che se il Re si sveglia essa si spegnerà come una candela, perché non è altro che un sogno del Re che la sta sognando.*”

“Finzioni”, “Il giardino dei sentieri che si biforcano”

“Mi rammentai anche della notte centrale delle ‘Mille e una Notte’, dove la regina Shahrazad per una magica distrazione del copista si mette a raccontare testualmente la storia delle ‘Mille e una Notte’, a rischio di tornare un’altra volta alla notte in cui racconta, e così all’infinito...”

Un tema che ritorna

- come orrore... *“Con sollievo, con umiliazione, con terrore, comprese che era anche lui una parvenza, che un altro stava sognandolo” (“Finzioni”, “Le rovine circolari”)*

- come scherzo paradossale...

“ - I suoi argomenti sono meri stratagemmi del suo terrore perché non la uccida. Ma lei non può più far nulla ormai.

- Una cosa posso fare – gli risposi.

- Quale? – mi domandò.

- Svegliarmi. – E così feci.” (“La moneta di ferro”, “L’episodio del nemico”)

- come ricerca metafisica e preghiera...

“Dio, mio sognatore, continua a sognarmi” (“Storia della notte”, “Nemmeno sono polvere”).

Un richiamo a PA?

“Se sapessi che è stato di quel sogno che sognai, o che sogno aver sognato, saprei tutte le cose.” (“La cifra”, “Dimenticando un sogno”)

5. Altri paradossi

Borges e Gödel: un comune gusto per il paradosso.

Piergiorgio Odifreddi, *Jorge Luis Borges. I. Scandali della ragione*, 1992: così “*come Borges*”, anche “*Gödel era pronto a balzare in groppa a proprietà paradossali nella sua battaglia a favore dell’idealismo*”.

Apostolos Doxiadis, “*The seventeenth night*”: gli ultimi giorni della vita di Gödel, il suo rifiuto di assumere qualunque cibo, il tentativo dei suoi infermieri di convincerlo a nutrirsi e la sua superiore razionalità, capace di ribattere e confutare logicamente ogni loro convenzionale argomento.

Il piacere dell'antinomia in Borges: anche nella passione per il romanzo poliziesco

- critico, esegeta, autore,
- labirinti, giochi logici, colti riferimenti matematici

(*“L’Aleph”*, *“Abenjacàn il Bojarí, ucciso nel suo labirinto”*, o *“Finzioni”*, *“La morte e la bussola”*: simmetrie e asimmetrie, certezze che si ribaltano, realtà che si scoprono sogni + il tema dell’infinito matematico).

5. Ritorno al futuro

L'idealismo:

- Berkeley, un oggetto esiste nella misura in cui è percepito,
- Hume, un soggetto esiste nella misura in cui percepisce.

Applicabile al tempo, a criticarne lo stereotipo di una successione ordinata di momenti.

Borges, anni quaranta “*Altre inquisizioni*”, “*Nuova confutazione del tempo*” e “*Sentirsi in morte*”

“Il tempo ... è una delusione: l'indifferenza e l'inseparabilità di un momento del suo apparente ieri e di un altro del suo apparente oggi bastano a disintegrarlo.”

Gödel, *“Un’osservazione sulla relazione tra la teoria della relatività e la filosofia idealistica”*, 1949, in onore di Albert Einstein

La possibilità di universi in cui non esistono un tempo assoluto distinto, e dunque uno scorrere “oggettivo” del tempo, e le ripercussioni che se ne possono trarre per il nostro stesso universo.

“Per ogni possibile definizione di un tempo universale si avrebbe la possibilità di viaggiare in regioni dell’universo che sono un passato secondo questa definizione”.

7. L'esistenza di Dio

André Weil (a proposito dei Teoremi di Incompletezza):

“Dio esiste perché la Matematica esiste, il diavolo esiste perché non se ne riesce a provare la coerenza”.

Gödel e l'esistenza di Dio:

- tracce sui taccuini nel 1941 e poi negli anni '50,
- nel 1970 circola una sua *“Prova ontologica”* racchiusa in poche schematiche righe...
- pubblicate ufficialmente solo nel 1987 postume.

L'interesse di Gödel sulla questione: non motivi di fede, ma di logica, la possibilità di *“una dimostrazione di questo tipo con assunzioni classiche – completezza, etc. – adeguatamente assiomatizzate”* .

L'obiettivo di Gödel: la prova logica dell'esistenza di un essere perfetto.

Cartesio: deduce la necessità di Dio (e dunque la sua esistenza in atto) dalla possibilità di Dio.

Gödel (e Leibniz): anche la possibilità dell'esistenza di Dio va provata e chiarita.

Borges: un “*ateo teologo*” (Leonardo Sciascia), un'opera “*alluvionata di metafisica*”.

“L'idea di Dio, di un essere sapiente e onnipotente che, in più, ci ama è una delle creazioni più audaci della letteratura fantastica.”

“La moneta di ferro”, “Baruch Spinoza”

“... Il mago insiste e foggia

Dio con geometria raffinata;

dalla sua debolezza, dal suo nulla,

seguita a modellare Dio con la parola.

Il più generoso amore gli fu largito,

*l'amore che non chiede di essere
amato.”*

L'amore gratuito di Dio per l'uomo
diviene l'amore gratuito dell'uomo
Spinoza per Dio.

“L'altro, lo stesso”, “Spinoza”

*“l'infinito Ritratto di Chi è tutte le Sue
stelle”;*

da confrontare col verso finale della
Commedia di Dante

*“l'amor che muove il sole e le altre
stelle”.*

“Discussione”, “Metempsicosi della Tartaruga”, “regressus in infinitum”, regressione infinita

“San Tommaso d’Aquino se ne serve (Summa Theologica, 1, 2, 3) per affermare che c’è Dio. Avverte che non c’è cosa nell’universo che non abbia una causa efficiente e che questa causa, ovviamente, è l’effetto di un’altra causa anteriore. Il mondo è un’interminabile concatenazione di cause e ogni causa è un effetto. Ogni stato proviene da quello precedente e determina quello successivo, ma la serie generale poteva non esserci stata, poiché i termini che la compongono sono condizionali, vale a dire, aleatori. Eppure, il mondo c’è: da ciò possiamo inferire una non contingente causa prima, che sarà la divinità. Questa è la prova ontologica. La prefigurarono Aristotele e Platone: Leibniz la riscopre. Un’eco di questa

prova, adesso morta, risuona nel primo verso del Paradiso: La gloria di Colui che tutto move.”

*“Altre Inquisizioni”, “Il primo Wells”:
“Finché uno scrittore si limita a narrare avvenimenti o a delineare le lievi oscillazioni di una coscienza, possiamo supporlo onnisciente, possiamo confonderlo con l’universo o con Dio; non appena scende a ragionare, lo sappiamo fallibile. La realtà procede per fatti, non per ragionamenti: tolleriamo che Dio affermi ‘Sono Colui Che Sono’, non che dichiararsi e analizzarsi, come Hegel e Anselmo, l’argumentum ontologicum. Dio non deve teologizzare.”*

A Dio è impossibile – inutile- ogni autoriferimento?

“L’Artefice” , *“Argumentum ornithologicum”*: l’esistenza di un essere supremo viene dedotta dall’impossibilità di fissare effettivamente il numero degli uccelli di uno stormo in volo.

“Chiudo gli occhi e vedo uno stormo di uccelli. La visione dura un secondo o forse meno; non so quanti uccelli ho visti. Era definito o indefinito il loro numero? Il problema implica quello dell’esistenza di Dio. Se Dio esiste, il numero è definito, perché Dio sa quanti furono gli uccelli. Se Dio non esiste, il numero è indefinito, perché nessuno poté contarli. In tal caso, ho visto meno di 10 uccelli (per esempio) e più di 1, ma non ne ho visti 9 né 8 né 7 né 6 né 5 né 4 né 3 né 2. Ho visto un numero di uccelli che sta tra il 10 e l’1, e che non è 9 né 8 né 7 né 6 né 5, eccetera. Codesto numero intero è inconcepibile; ergo, Dio esiste.”

Bibliografia

Jorge Luis Borges, *Tutte le Opere* (a cura di Domenico Porzio), Meridiani Mondadori, volume I, 1984; volume II, 1985

Kurt Gödel, *Opere*, Bollati Boringhieri, Torino

- I, 1999, *1929-1936* (a cura di E. Ballo, S. Bozzi, G. Lolli, C. Mangione)
- II, 2002, *1938-1974* (a cura di E. Ballo, G. Lolli, C. Mangione)
- III, 2006, *Saggi inediti e conferenze* (a cura di E. Ballo, G. Lolli, C. Mangione, P. Pagli)