Corso di Perfezionamento ***Insegnare Matematica e Fisica Oggi Happy Numbers Aperitivi di Matematica***
Università di Camerino Dipartimento di Matematica e Informatica Progetto Lauree Scientifiche, Matematica
Sezione Mathesis di Camerino

Decisioni di gruppo e consenso

Parte 1. Sintesi dei giudizi e decisioni di gruppo

Antonio Maturo[1] - Maria Grazia Rosiello[1]

[1] Università "d'Annunzio" di Chieti-Pescara

Sunto: Si presentano alcuni aspetti fondamentali del **processo analitico per prendere una decisione razionale**. In particolare si mette in evidenza la necessità di analizzare:

- gli **obiettivi**;
- i **pesi dei criteri** con cui si misura il grado di raggiungimento degli obiettivi;
- la **logica dell'aggregazione dei punteggi**.

Infine si considera il problema della scelta sociale basata su un mix fra **criteri di aggregazione** e metodi per ottenere il **consenso**.

Abstract: Some fundamental aspects of the rational decision making procedures are considered. In particular the necessity to analyse objectives, criteria and logics of aggregations of scores is emphasized. Finally the social choice is considered as a mix between mathematical methods for aggregation and for consensus.

Parole Chiave: Decisioni individuali, decisioni di gruppo, consenso, aggregazione dei giudizi.

1. Impostazione di un problema di decisione individuale

1.1 *Alternative e loro ordinamento da parte di un decisore*

Un individuo d, il *decisore*, deve "selezionare" uno o più elementi, giudicati "preferibili", in un insieme A di possibili alternative.

Ad esempio pensiamo che d sia un commissario di un concorso a 5 posti con 200 candidati. Il decisore d deve selezionare un sottoinsieme di A con 5 elementi, ritenuti "più idonei" a ricoprire il posto messo a concorso.

Supponiamo, per semplicità, che $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ sia finito, con m elementi.

In generale, per arrivare ad una selezione, è opportuno seguire una procedura che porti a stabilire un ordinamento debole fra le alternative.

Ricordiamo che un *ordinamento debole* (detto anche *relazione di preordine* o *relazione di preferenza*) in A è una relazione R in A tale che:

(1) per ogni $a \in A$, aRa (la relazione è riflessiva);

(2) per ogni $a, b, c \in A$, $(aRb, bRc) \Rightarrow (aRc)$ (transitività);

(3) per ogni $a, b \in A$, vale almeno una delle seguenti proprietà:

(I) aRb (II) bRa. (completezza)

Si usano i simboli $a \sim_R b$, $a >_R b$, $a <_R b$ per indicare, rispettivamente, che valgono entrambe (I) e (II), solo (I), solo (II).

Una relazione di preordine R in A (decisa da d) dà luogo ad una graduatoria degli elementi di A.

Ad esempio se A = {Carlo, Luigi, Maria, Gina}, R è una relazione di preordine e valgono le proprietà:

$$\text{Carlo} \sim_R \text{Luigi},\ \text{Gina} <_R \text{Carlo},\ \text{Maria} <_R \text{Gina}, \tag{1.1}$$

si ha la graduatoria[2] (in ordine di preferenza)[3]:

$$(\text{Carlo, Luigi}),\ \text{Gina, Maria.} \tag{1.2}$$

[2] Più precisamente le (1.1) individuano una relazione R*. Si verifica che esiste una relazione di preordine R (la chiusura transitiva) che contiene R* ed è quella definita dalla graduatoria (1.2).
[3] Si è assunta la convenzione che nomi racchiusi insieme fra parentesi sono a pari merito in graduatoria.

Un metodo comodo per stabilire una graduatoria fra gli elementi di A è quello di stabilire un *punteggio* (o *voto*) che rappresenta una *valutazione* di merito di d sugli elementi di A.

Un punteggio è una funzione p: A $\rightarrow$ V, dove V è l'insieme dei voti possibili (a scuola da 0 a 10, all'università da 0 a 30, etc.).

Un punteggio p individua una relazione di preordine R_p, detta *relazione associata* a p, ponendo, per ogni a, b$\in$ A:

$$aR_pb \text{ se e solo se } p(a) \geq p(b). \tag{1.3}$$

Viceversa, data una relazione di preordine R, un punteggio p si dice *compatibile* con R se, per ogni a, b$\in$ A:

$$aRb \quad \text{implica} \quad p(a) \geq p(b). \tag{1.4}$$

Osserviamo che un punteggio p può essere compatibile con più relazioni, ma una sola di queste è la relazione associata a p.

Una variante al metodo dei punteggio è il metodo dei *giudizi*.

Il decisore d ha a disposizione un insieme ordinato G di giudizi, ad esempio G = {scarso, insufficiente, sufficiente, buono, ottimo}, ed attribuisce ad ogni elemento di A un giudizio.

Analogamente al punteggio, un *giudizio* g è una funzione g: A $\rightarrow$ G, dove G è l'insieme dei giudizi possibili.

I concetti di relazione di preordine R_g associata ad un giudizio g e di giudizio compatibile con una relazione di preordine R si introducono in maniera analoga ai corrispondenti concetti sui punteggi.

1.2 *Sintesi semplice dei giudizi da parte di un decisore*

Un decisore d, per assegnare un giudizio g (in particolare un punteggio p) deve avere almeno un criterio di valutazione c.

Ad esempio, se A è l'insieme dei concorrenti, d fa eseguire una prova scritta e valuta i vari compiti.

Ma, in generale, il decisore d ha un insieme C di criteri di valutazione, per ognuno di essi esprime un giudizio e successivamente deve fare una sintesi dei vari giudizi espressi.

Nel caso di un concorso possiamo pensare al seguente insieme di criteri

C = {prova scritta, prova orale, prova pratica}.

In un concorso per un dottorato di ricerca l'insieme dei criteri potrebbe essere

C = {*cultura generale*, *conoscenze specifiche*, *attitudine alla ricerca*, *chiarezza di esposizione*}.

Sia $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ l'insieme dei criteri utilizzati dal decisore d. Supponiamo che l'insieme G dei giudizi (o, in particolare, quello V dei voti o punteggi) sia lo stesso per ogni criterio.

Indichiamo con g_{ij} il giudizio che il decisore d attribuisce all'alternativa a_i in base al criteri c_j.

Il decisore si trova quindi a dover compilare una tabella (o matrice) con m righe, le *alternative*, ed n colonne, i *criteri*, avente come elementi i vari giudizi.

Criteri / Alternative	c_1	c_2		c_j		c_n
a_1	g_{11}	g_{12}		g_{1j}		g_{1n}
a_2	g_{21}	g_{22}		g_{2j}		g_{2n}
a_i	g_{i1}	g_{i2}		g_{ij}		g_{in}
a_m	g_{m1}	g_{m2}		g_{mj}		g_{mn}

Matrice dei giudizi n. 1

Esempio di concorso per un dottorato. Giudizi del decisore.

Criteri Concorrenti	**Attitudine ricerca**	**Cultura generale**	**Capacità esposizione**	**Cultura specifica**
Luigi	9	8	6	7
Carla	8	7	9	6
Francesca	8	10	6	7
Giovanni	5	10	5	10
Antonio	9	6	9	6

Matrice dei giudizi n. 2

Quale procedura bisogna seguire per aggregare i punteggi ottenuti da ciascun concorrente e stabilire un'unica graduatoria?

Possibili procedure:

(P1) ***La somma dei punteggi***. Si ottiene:

Concorrenti	Punteggio aggregato
Luigi	**30**
Carla	**30**
Francesca	**31**
Giovanni	**30**
Antonio	**30**

Graduatoria finale: Francesca, (Luigi, Carla, Giovanni, Antonio)

Una variante alla procedura (P1) è la seguente:

(P2) **La distanza euclidea dall'origine**. Si considerano le alternative come punti nello spazio euclideo avente come assi i criteri e si assume preferibile fra due alternative quella più lontana dall'origine.

Si ottiene:

d(Luigi, origine) = $(9^2 + 8^2 + 6^2 + 5^2)^{0,5} = 14{,}353$

d(Carla, origine) = $(8^2 + 7^2 + 9^2 + 6^2)^{0,5} = 15{,}166$

d(Francesca, origine) = $(8^2 + 10^2 + 6^2 + 7^2)^{0,5} = 15{,}780$

$d(\text{Giovanni, origine}) = (5^2 + 10^2 + 5^2 + 10^2)^{0,5} = 15{,}811$

$d(\text{Antonio, origine}) = (9^2 + 6^2 + 9^2 + 6^2)^{0,5} = 15{,}297$

Graduatoria finale: Giovanni, Francesca, Antonio, Carla, Luigi.

La procedura (P2) si applica se si ritiene importante il raggiungimento di punteggi elevati.

1.3 *Ricerca dei pesi dei criteri da parte di un decisore*

Alcune critiche alle procedure (P1) e (P2) possono essere.

(a) (*importanza dei criteri*) Non tutti i criteri hanno lo stesso peso in relazione all'obiettivo che si vuole raggiungere;

(b) (*omogeneità dei punteggi*) È preferibile avere il punteggio aggregato con lo stesso insieme di punteggi considerato per i vari criteri;

(c) (*punteggi numerici*) Se i giudizi non sono numerici le procedure (P1) e (P2) non si possono applicare;

(d) (*punteggi come misura*) Usare l'addizione dei punteggi implica che i punteggi sono una misura, ossia chi prende un 5 vale la metà di chi prende un 10. E' sempre sensato?

Per quanto riguarda l'obiezione (a) (*importanza dei criteri*) esistono vari metodi per assegnare dei pesi ai vari criteri.

Essi si basano sostanzialmente sull'idea che l'insieme dei criteri *rappresenta implicitamente un obiettivo* che si vuole raggiungere e quindi si può procedere ad una analisi per vedere di quanto ogni criterio è importante per l'obiettivo.

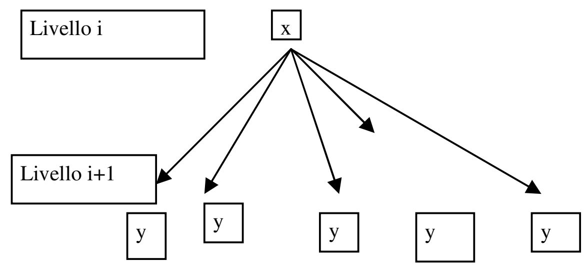
Per ottenere ciò si può utilizzare un *processo analitico gerarchico* (ad es. AHP, *Analytic Hierarchy Process*, di Saaty[4] [7]) che, partendo dall'obiettivo, detto componente di livello 0 del processo, lo specifica descrivendolo tramite sub-obiettivi, detti componenti di livello 1.

---

[4] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, (1980).

In generale, se il processo si articola in k livelli oltre al livello 0, le componenti di livello k sono i *criteri*, al più alto grado di specificazione e operatività.

Si costruisce un albero che ha l'obiettivo come radice e, se x e y sono, rispettivamente, un componente di livello i ed uno di livello i+1, $0 \leq i < k$, se y specifica x, si considera un arco (x, y) di primo estremo x e secondo estremo y.



Si considera una procedura con interviste, calcoli matematici e "verifiche di coerenza" che ad ogni arco uscente da un qualsiasi vertice x non finale associa un peso, in maniera tale che *la somma dei pesi degli archi uscenti da x è uguale ad uno*. Ad ogni cammino si associa come peso il *prodotto dei pesi* degli archi che formano il cammino.

Infine, per ogni criterio c, si assume come peso del criterio *la somma dei pesi dei cammini* di vertice iniziale l'obiettivo e di vertice finale c. La somma dei pesi dei criteri ottenuti con la precedente procedura risulta uguale a uno.

Esempio del concorso per il dottorato di ricerca:

Livello 0 *Obiettivo*: Fare il ricercatore

Livello 1 *Sub-obiettivi*:

1.1 Svolgere la ricerca 1.2 Comunicare la ricerca

Livello 2 *Criteri*:

2.1 Cultura generale, 2.2 Conoscenze specifiche,

2.3 Attitudine alla ricerca, 2.4 Capacità di esposizione

Supponiamo che i pesi dei componenti di livello 1 siano dati dal vettore riga W_1 = [0,7; 0,3] e quelli di livello 2 siano dati dalla matrice (le righe sono gli elementi di livello 1, le colonne quelli di livello 2):

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Il vettore dei pesi dei vari criteri è il prodotto matriciale:

$$W = W_1 W_2 = [0{,}17;\ 0{,}23;\ 0{,}38;\ 0{,}22].$$

1.4 *Sintesi pesata dei giudizi da parte di un decisore*

Tenuto conto dei pesi ottenuti per i criteri la matrice dei giudizi n.2 viene sostituita dalla:

Criteri Concorrenti	**Attitudine ricerca** **0,38**	**Cultura generale** **0,17**	**Capacità esposizione** **0,22**	**Cultura specifica** **0,23**
Luigi	9	8	6	7
Carla	8	7	9	6
Francesca	8	10	6	7
Giovanni	5	10	5	10
Antonio	9	6	9	6

Matrice dei giudizi pesati n. 3

La procedura più usuale di aggregazione dei punteggi con i criteri pesati è la seguente:

(P3) **Aggregazione lineare dei punteggi.** Per ogni alternativa si moltiplica il punteggio relativo ad ogni criterio per il peso del criterio e si sommano i numeri ottenuti.

Indicando con p(a) il punteggio dell'alternativa a, nel caso del nostro esempio si ottiene:

$p(\text{Luigi}) = 9\times0{,}38 + 8\times0{,}17 + 6\times0{,}22 + 7\times0{,}23 = 7{,}71$

$p(\text{Carla}) = 8\times0{,}38 + 7\times0{,}17 + 9\times0{,}22 + 6\times0{,}23 = 7{,}59$

$p(\text{Francesca}) = 8\times0{,}38 + 10\times0{,}17 + 6\times0{,}22 + 7\times0{,}23 = 7{,}67$

$p(\text{Giovanni}) = 5\times0{,}38 + 10\times0{,}17 + 5\times0{,}22 + 10\times0{,}23 = 7$

$p(\text{Antonio}) = 9\times0{,}38 + 6\times0{,}17 + 9\times0{,}22 + 6\times0{,}23 = 7{,}80$

Graduatoria finale: Antonio, Luigi, Francesca, Carla, Giovanni.

Confrontiamo con una tabella i risultati ottenuti con i tre procedimenti finora esaminati:

	Somma	Distanza	Aggregazione lineare
Posto 1	F 31	G 15,811	A 7,8
Posto 2	L C G A 30	F 15,780	L 7,71
Posto 3		A 15,297	F 7,67
Posto 4		C 15,166	C 7,59
Posto 5		L 14,353	G 7

Tabella n. 4

Le differenze fra le valutazioni ottenute con i tre procedimenti non deve meravigliare. Infatti, mentre con il metodo della somma non si fa riferimento ad obiettivi particolari, il metodo delle distanze ha come obiettivo quello di *favorire i punteggi più alti* e quello dell'aggregazione lineare si basa sul fatto di ottenere un punteggio in cui si tiene conto dell'*importanza dei vari criteri*.

Il metodo dell'aggregazione lineare ha anche il vantaggio di superare l'obiezione (b) (*omogeneità dei punteggi*), in quanto i punteggi aggregati appartengono allo stesso insieme di punteggi valido per i vari criteri.

1.5 *Sintesi pesata dei giudizi da parte di un decisore utilizzando una funzione di utilità*

Supponiamo che i giudizi siano quantitativi con insieme V di valori un intervallo $[v_1, v_2]$ di numeri reali.

Sia $u: [v_1, v_2] \rightarrow [0, 1]$ una funzione strettamente crescente, che chiamiamo "*funzione di utilità*".

Una procedura di sintesi dei giudizi basata sulla funzione di utilità è la seguente.

(P4) **Aggregazione lineare delle utilità dei punteggi.**

Step 1 Si sostituisce ogni punteggio v con la sua utilità u(v), ottenendo una nuova matrice, detta matrice delle utilità.

Step 2 Per ogni alternativa a si moltiplica l'utilità relativa ad ogni criterio per il peso del criterio e si sommano i numeri ottenuti, ottenendo un numero s(a), detto *utilità* di a.

Step 3 Si attribuisce ad a il punteggio $p(a) = u^{-1}(p(a))$.

Ad esempio possiamo considerare il caso in cui i giudizi sono numeri non negativi e:

$$u(x) = x^2/(v_2-v_1), \qquad \text{e quindi} \qquad u^{-1}(y) = [(v_2-v_1)\, y]^{0,5}.$$

Si ottiene un criterio basato sia sulla procedura (P2) che sulla (P3), che contemporaneamente tiene conto dei pesi dei criteri e privilegia i valori elevati dei giudizi.

Applichiamo la formula all'esempio del concorso di dottorato, in cui $v_1=0$, $v_2=10$. Si ottiene:

s(Luigi) = $8,1\times0,38 + 6,4\times0,17 + 3,6\times0,22 + 4,9\times0,23 = 6,085$

s(Carla) = $6,4\times0,38 + 4,9\times0,17 + 8,1\times0,22 + 3,6\times0,23 = 5,875$

s(Francesca)= $6,4\times0,38 + 10\times0,17 + 3,6\times0,22 + 4,9\times0,23 = 6,051$

s(Giovanni) = $2,5\times0,38 + 10\times0,17 + 2,5\times0,22 + 10\times0,23 = 5,5$

s(Antonio) = $8,1\times0,38 + 3,6\times0,17 + 8,1\times0,22 + 3,6\times0,23 = 6,30$

Segue:

p(Luigi) = $60{,}85^{0,5}$= 7,801, p(Carla) = 7,665, p(Francesca) = 7,779, p(Giovanni) = 7,416 p(Antonio) = 7,937

Graduatoria finale: Antonio, Luigi, Francesca, Carla, Giovanni.

In questo esempio la graduatoria è uguale a quella ottenuta con l'aggregazione lineare dei punteggi. Ciò perché i punteggi più alti sono stati ottenuti con criteri con pesi bassi.

	Somma	Distanza	A. lineare	A. utilità	
Posto 1	F 31	G 15,811	A 7,8	A 7,937	
Posto 2	L C G A 30	F 15,780	L 7,71	L 7,801	
Posto 3		A 15,297	F 7,67	F 7,779	
Posto 4		C 15,166	C 7,59	C 7,665	
Posto 5		L 14,353	G 7	G 7,416	

Tabella n. 5

1.6 *Sintesi pesata dei giudizi da parte di un decisore utilizzando una t-conorma*

Una t-conorma è una operazione in [0, 1] associativa, commutativa, avente 0 come elemento neutro e crescente rispetto ad ogni argomento. Si può ottenere l'aggregazione dei giudizi con una t-conorma con la seguente procedura, che generalizza la (P4).

(P5) **Aggregazione delle utilità dei punteggi per mezzo di una una t-conorma.**

Step 1 Si sostituisce ogni punteggio v con la sua utilità u(v), ottenendo una nuova matrice, detta matrice delle utilità.

Step 2 Per ogni alternativa a si moltiplica l'utilità relativa ad ogni criterio per il peso del criterio e si aggregano i numeri ottenuti per mezzo della t-conorma scelta, ottenendo un numero s(a), *utilità* di a.

Step 3 Si attribuisce ad a il punteggio p(a) = u^{-1}(p(a)).

2. Impostazione di un problema di decisione di gruppo

2.1 *Profili sociali ottenuti dalle graduatorie*

Supponiamo, come nel caso delle decisioni individuali, che vi sia un insieme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ di alternative, da scegliere in base ad un insieme $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ di criteri.

Supponiamo inoltre che questa scelta sia effettuata da una k-pla $D = (d_1, d_2, \ldots, d_k)$ di decisori. Chiamiamo *commissione* l'insieme D.

Ogni componente della commissione ha la sua *matrice dei punteggi*, il suo *vettore di pesi per i criteri* ed la sua *procedura* per ottenere i punteggi delle varie alternative.

Più in generale, possiamo pensare che ogni decisore d_r abbia una sua graduatoria per le varie alternative, definita a partire da una relazione di preordine R_i. La k-pla $(R_1, R_2, \ldots, R_k)$ si dice *profilo* dell'ordine delle preferenze.

Sia $\mathcal{R}$ l'insieme di tutte le relazioni di preordine in A e sia $\mathcal{P} = \mathcal{R}^k$ l'insieme di tutti i possibili profili.

Uno *schema di arbitrato* o *funzione di welfare sociale* è una funzione

$$w: \mathcal{P} \to \mathcal{R}$$

che ad ogni profilo associa una relazione di preordine fra le alternative.

Alcuni schemi di arbitrato sono:

(S1) **La regola di pluralità.** L'ordine di preferenza delle alternative è determinato dal numero di volte in cui ogni alternativa è al primo posto nei profili individuali;

(S2) **La regola di Borda.** (*Formalizzato nel 1770 da Jean-Charles de Borda*). Per ogni profilo individuale si attribuisce un punteggio massimo per il primo posto, poi un punteggio via via decrescente per i posti successivi. Se più alternative sono equivalenti si attribuisce a ciascuna di esse un punteggio pari alla media aritmetica dei punti che sarebbero attribuiti se nessuna coppia di tali alternative fosse formata da alternative equivalenti. Infine si sommano i punteggi ottenuti.

(S3) **La regola di maggioranza coerente**. La regola di maggioranza consiste nell'introdurre fra le alternative la seguente relazione R:

se x e y sono due alternative si pone:

$x >_R y$, $x <_R y$, $x \sim_R y$, rispettivamente, se il numero di volte in cui x precede y nelle graduatorie individuali è superiore, inferiore, uguale, al numero di volte in cui y precede x.

Si pone inoltre x R y se $x >_R y$ oppure $x \sim_R y$

La relazione R è riflessiva. La regola di maggioranza si dice *coerente* se la R è anche transitiva.

Il noto **paradosso di Condorcet** (presentato Marchese de Condorcet alla fine del XVIII secolo) mostra come la regola di maggioranza può non essere coerente, ossia non transitiva.

Supponiamo di avere una commissione di 3 professori (*Professore 1*, *Professore 2* e *Professore 3*) che devono scegliere tra tre candidati (*Candidato A*, *Candidato B* e *Candidato C*).

Ogni professore ha le seguenti preferenze:

	Prima Scelta	**Seconda Scelta**	**Terza Scelta**
Professore **1**	*Candidato* A	*Candidato* B	*Candidato* C
Professore **2**	*Candidato* B	*Candidato* C	*Candidato* A
Professore **3**	*Candidato* C	*Candidato* A	*Candidato* B

Se si applica la regola di maggioranza risulta:

$$A > B,\ B > C,\ C > A.$$

Se valesse la proprietà transitiva da A > B, B > C seguirebbe A > C.

Quindi in questo caso la regola di maggioranza non è coerente.

2.2 *Profili sociali ottenuti dai punteggi*

In generale, chiamiamo *profilo sociale* una relazione di preordine accettata dal gruppo in base a determinate regole.

(S4) **La regola del voto di approvazione**. Si fissa un livello minimo α di punteggio per le varie alternative. Il decisore d_r *approva* l'alternativa x se e solo se il punteggio di x ottenuto da d_r, chiamiamolo $p_r(x)$, è maggiore o uguale a α.

Il *profilo sociale* delle alternative è basato sulla seguente relazione R: xRy se il numero di decisori che approva x non è maggiore o uguale al numero di quelli che approvano y.

(S5) **La regola dell’aggregazione numerica dei punteggi.** Per ogni alternativa si aggregano i punteggi dei decisori con regole analoghe a quelle seguite per l’aggregazione dei punteggi dei criteri nel problema di decisione individuale.

In particolare la procedura più opportuna può essere quella della aggregazione lineare dei punteggi dei decisori, ossia per ogni alternativa a, si moltiplica il punteggio $p_r(a)$ del decisore d_r per il peso del decisore e si sommano i valori così ottenuti. Il risultato finale è il *punteggio sociale* dell’alternativa a.

2.3 *Il problema del consenso*

Supponiamo che ogni decisore d_r sia arrivato ad assegnare un vettore di punteggi $\mathbf{p}_r = (p_{r1}, p_{r2},\ldots, p_{rm})$ alle varie alternative e supponiamo che tali punteggi siano numeri appartenenti all’intervallo [0, 1]. Ognuno di tali punteggi è un punto dello spazio euclideo ad m dimensioni R^m (cfr. [1], [3], [6]).[5]

---

[5] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkurieva, T. Riissanen, A. G. S. Ventre, *Consensus in distributed soft environments*, European J. Operational Research **61**, 165-185, (1992).
P. Eklund, A. Rusinowska, H. De Swart, *Consensus reaching in committees*, European Journal of Operational Research **178**, 185-193, (2007).
A. Maturo, A. G. S. Ventre, *Models for Consensus in Multiperson Decision Making,* NAFIPS’08 Proc., New York.

Diciamo *distanza* fra due decisori la distanza fra i loro punteggi.

Se δ è un numero positivo fissato, si dice che fra due decisori d_r e d_s c'è "*consenso*" (a livello δ) se essi hanno distanza minore o uguale a δ e che c'è "*dissenso*" se hanno distanza maggiore di δ.

Diciamo che un decisore d_r è "*allineato*" se è in consenso con tutti gli altri, "*non allineato*" in caso contrario.

Se un decisore d_r è non allineato diciamo *dissenso* di d_r la differenza fra la massima distanza di d_r dagli altri decisori ed il numero δ.

Se d_r è un decisore allineato allora la palla chiusa I_r di centro $\mathbf{p}_r$ e raggio δ contiene i punteggi di tutti i decisori e la massima distanza di due decisori non può superare 2δ, diametro della palla. (cfr. [6])[6]

Diciamo che si ha "consenso" se tutti i decisori sono allineati, ossia se, per ogni r, la ogni palla di centro p_r contiene tutti i punti p_s.

[6] A. Maturo, A. G. S. Ventre, *Models for Consensus in Multiperson Decision Making,* NAFIPS'08 Proc., New York.

Le tecniche di raggiungimento del consenso sono procedure dinamiche verso il consenso. In altre parole i decisori non allineati sono invitati a modificare i loro punteggi in modo da convergere verso la situazione di consenso.

Ciò avviene per gradi, facendo modificare i propri punteggi per primo al decisore d_r non allineato che ha il massimo dissenso. Se esso fosse eliminato, si otterrebbe la massima diminuizione del massimo dissenso fra i decisori rimanenti.

Vari aspetti del consenso sono considerati in [1], [2], [3], [6].

Bibliografia

[1] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkurieva, T. Riissanen, A. G. S. Ventre, *Consensus in distributed soft environments*, European J. Operational Research **61**, 165-185, (1992).

[2] D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, A. G. S. Ventre, *Consensus in distributed soft environments,* Reports in Computer Science and Mathematics, Ser. A, n. 88, Åbo Akademi, (1989).

[3] P. Eklund, A. Rusinowska, H. De Swart, *Consensus reaching in committees*, European Journal of Operational Research **178**, 185-193, (2007).

[4] K. H. Kim, F. W. Roush, *Introduction to Mathematical Consensus Theory*, Marcel Dekker, New York, (1980).

[5] R. D. Luce, H. Raiffa, *Games and Decisions*, John Wiley, New York, (1957).

[6] A. Maturo, A. G. S. Ventre, *Models for Consensus in Multiperson Decision Making,* NAFIPS'08 Proc., New York.

[7] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, (1980).