Calcolo della Probabilità (M.S. Bernabei)

Nel linguaggio comune sentiamo spesso delle frasi del tipo

- molto "probabilmente" il prossimo fine settimana il tempo sarà buono
- è "abbastanza improbabile" che riesca a vincere alla lotteria
- ho "50% di probabilità" di ottenere quel posto

Spazio campionario ed eventi

- Il termine **esperimento** è usato in questo contesto non solo per studi condotti nei laboratori, ma più in generale per osservazioni di un fenomeno che presenta variabilità nei suoi possibili risultati.
- Lo **Spazio campionario** è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento. Esso puo' essere **discreto** (Es.: Lancio di due dadi) o **continuo** (Es.: Peso). Ciascun punto o risultato di S sarà chiamato **evento elementare** e sarà denotato con la lettera *e*.
- Un **evento** è un sottoinsieme di S cioè è un esperimento che apriori può avere diversi esiti, non prevedibili con certezza. Un evento accade quando uno dei suoi possibili risultati si verifica.
- In particolare *S* è detto evento certo e Ø (insieme vuoto) è detto evento impossibile

Probabilità

1. La probabilità di un qualunque evento è compresa tra 0 e 1 :

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ per ogni } A \text{ in } S.$$

2. La probabilità di un evento A e' uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento elementare contenuto in A:

$$P(A) = \sum_{tutti\_e\_in\_A} P(e)$$

3. La somma delle probabilità di tutti gli elementi di S deve essere 1:

$$P(S) = \sum_{tutti\_e\_in\_S} P(e) = 1$$

Esempio

- **Esempio 1**. Nell'estrazione di una cifra tra 0 e 9,

  $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, un evento elementare è un punto di S, un evento è per esempio

  A= «Il risultato del lancio è un numero dispari», cioè $A = \{1,3,5,7,9\}$.

Probabilità classica o modello uniforme

Se lo spazio è finito con N elementi e ogni evento elementare ha la stessa probabilità, allora

$$P(A) = \frac{|A|}{N}$$

dove |A| è il numero di elementi di A .

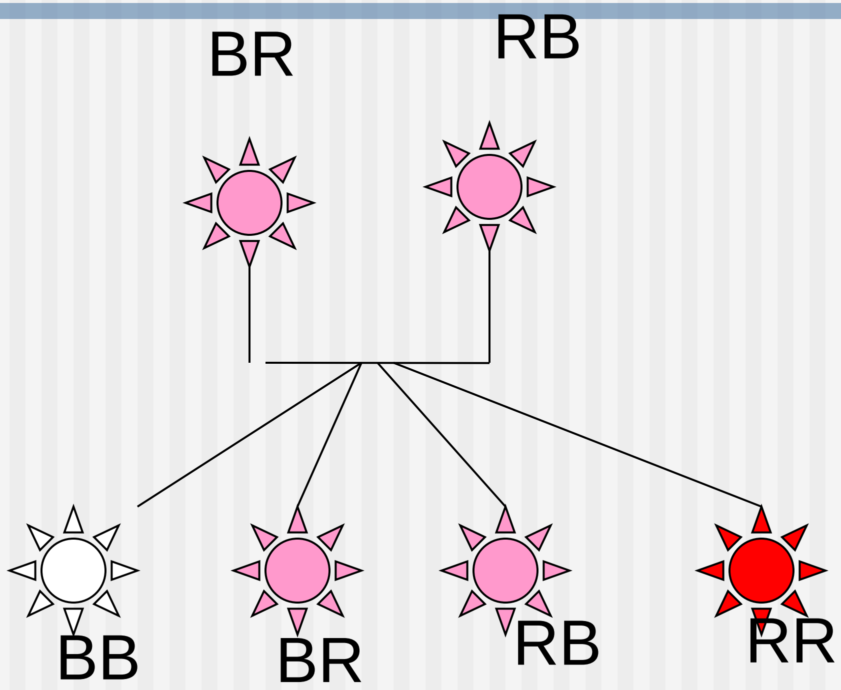
Esempio 3: nel lancio di una moneta "onesta" i possibili risultati sono "Testa", T e "croce", C , cioè S= {T, C} e P(T)=P(C) = 1/2.

Esempio 4: nel lancio di una cifra tra 0 e 9 i possibili risultati sono S= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} e P(0)=P(1) =… = P(9) =1/10. Sia A l'evento "Il risultato del lancio è un numero dispari", allora P(A)=1/2 .

Legge di Mendel

- Un esperimento che illustra la teoria di Mendel consiste nell'incrocio tra una specie pura di fiori rossi (R) con una specie pura di fiori bianchi (B). Ciò produce ibridi aventi un gene di ogni tipo e sono fiori rosa. Incrociando tali ibridi si può ottenere una delle quattro possibili coppie di geni. Secondo la legge di Mendel, queste quattro coppie hanno la stessa probabilità. Quindi P(Rosa)= ½ e P(Rosso)=P(Bianco)= ¼

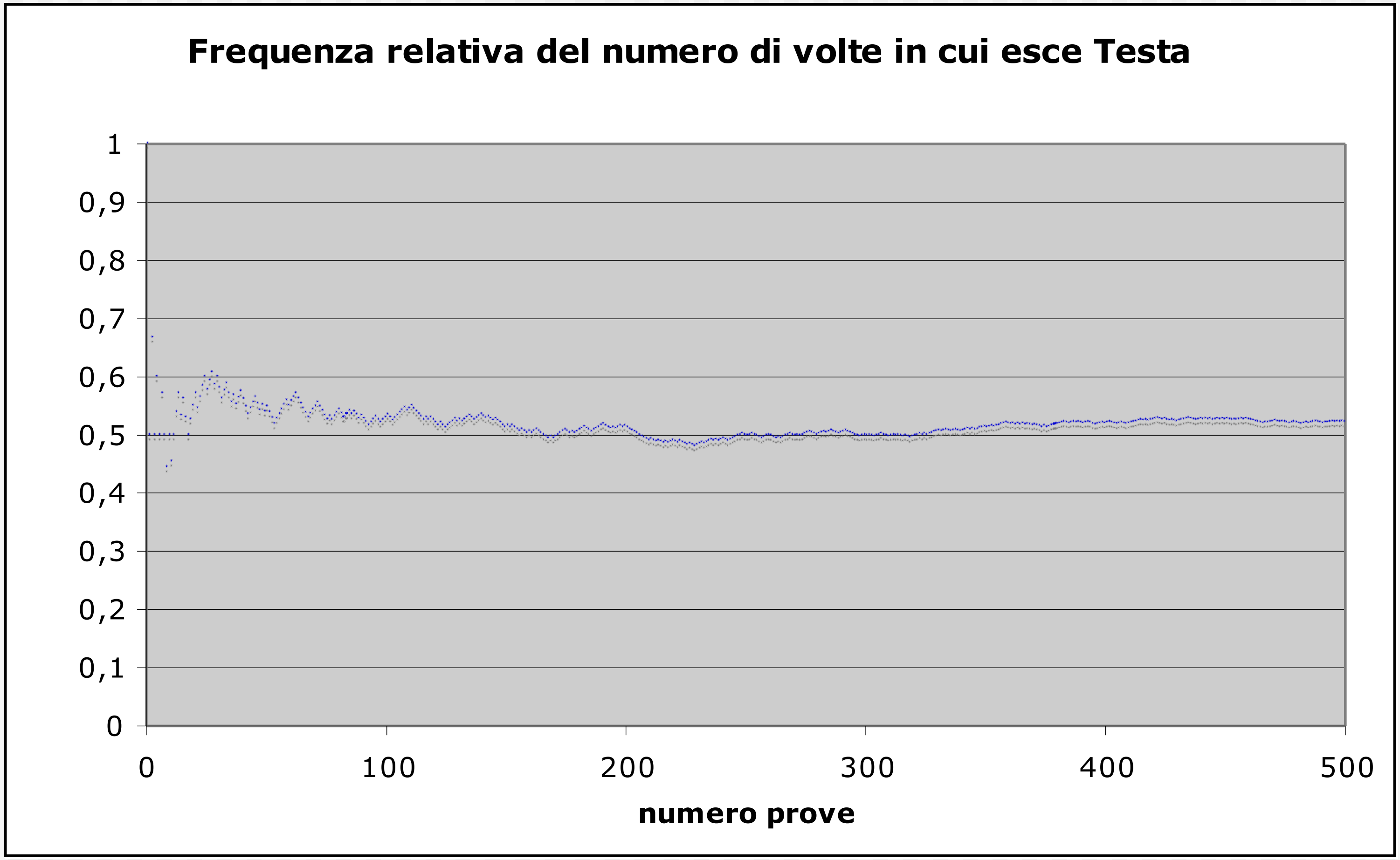
Legge di Mendel



Probabilità frequentistica

Si suppone di ripetere un esperimento alle stesse condizione, al crescere del numero delle prove secondo una legge empirica, la frequenza relativa in cui compare un certo evento tende a “stabilizzarsi” intorno ad un valore che definiamo come probabilità dell’evento. Per esempio il numero di volte in cui esce testa in n successivi lanci di una moneta. Anche tale definizione è limitative: per esempio non tutti i fenomeni sono ripetibili.

Probabilità frequentistica



Probabilità soggettivistica

- **U**na altra definizione è quella soggettivistica secondo cui la probabilità di un evento è pari al grado di fiducia che l'osservatore ha nel verificarsi o meno di esso. Per esempio nelle scommesse si applica tale definizione.

Eventi composti

- La negazione o complementare di un evento A è l'evento che si verifica quando non si verifica A. Esso si indicherà con A^C . Allora $A^C = S - A$.
- L' intersezione di due eventi A_1, A_2 è l'evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente A_1 e A_2 Essa si indicherà con $A_1 \cap A_2$
- L' unione di due eventi A_1, A_2 è l'evento che si verifica quando si verifica A_1 o A_2. Essa si indicherà con $A_1 \cup A_2$

Esempio

- **Esempio 2**. Sia A_1 l'evento «Il Signor Rossi arriva puntuale all' appuntamento» e A_2 l'evento «Il Signor Bianchi arriva puntuale all' appuntamento». Allora:

  - l'evento A_1^C= «Il Signor Rossi non arriva puntuale all' appuntamento»;

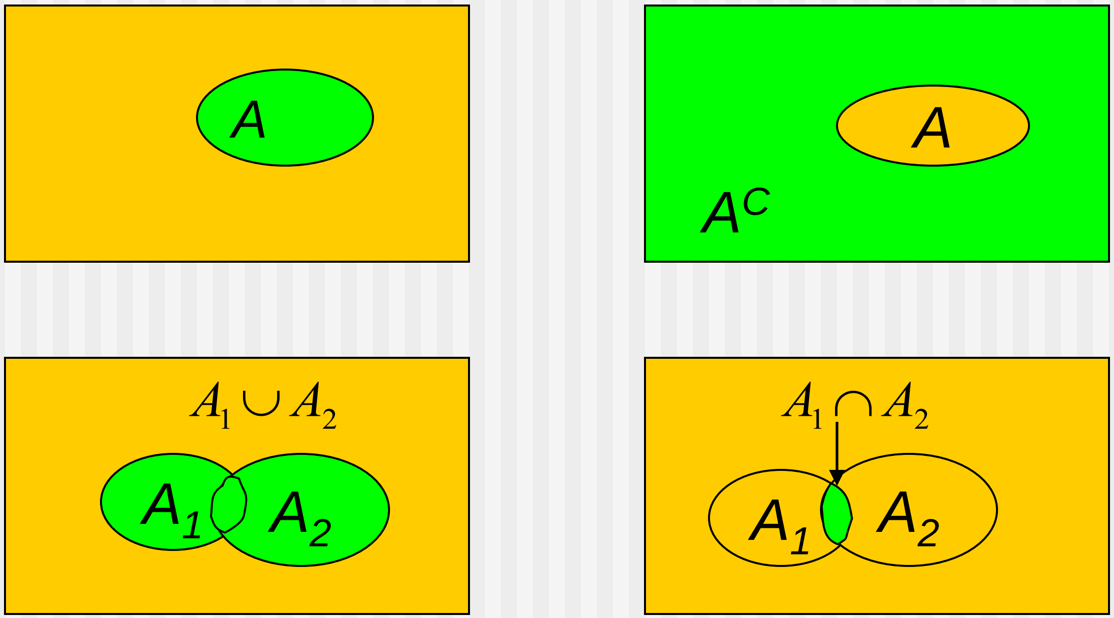
  - l'evento $A_1 \cap A_2$ = «I Signori Rossi e Bianchi arrivano puntuali all' appuntamento»,

  - l'evento $A_1 \cup A_2$ = «Il Signor Rossi o il Signor Bianchi arrivano puntuali all' appuntamento»;

  - l'evento $A_1^C \cap A_2^C$ = «Nè il Signor Rossi nè il Signor Bianchi arrivano puntuali all' appuntamento»;

Diagrammi di Venn

S



Proprietà della Probabilità

$$P(A^C) = 1 - P(A), A \subseteq S$$

$$P(\varnothing) = 0$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2),$$

$$A_1, A_2 \subseteq S$$

Due eventi A_1 e A_2 si dicono **incompatibili** se .
In tal caso si ha che per ogni evento A_1 e A_2

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Esercizio

- La seguente tabella, detta di **contingenza,** su pazienti con diabete ricoverati in una clinica nel corso di un anno riporta i seguenti valori in percentuale

Tabella di contingenza

		Resa nel programma di formazione			
		Sotto la media	Nella media	Sopra la media	Totale
Successo nel lavoro	Mediocre	23	60	29	112
	Nella media	28	79	60	167
	Molto buono	9	49	63	121
		60	188	152	400

Esercizi

a) Estraendo una persona a caso all' interno del campione trovare le probabilita' che il successo nel lavoro sia mediocre e la resa nel programma di formazione sotto la media.

b) Estraendo una persona a caso all' interno del campione trovare le probabilita' che il successo nel lavoro sia mediocre o la resa nel programma di formazione sopra la media.

Svolgimento

a) Sia LM l' evento «Successo nel lavoro mediocre» e RSM
«Resa sotto la media», allora P(LM ∩ RSM)=23/400.

b) Sia RSPM l' evento «Resa sopra la media», allora

$$P(LM \cup RSPM) = P(LM) + P(RSPM) - P(LM \cap RSPM) =$$
$$= (112 + 152 - 29)/400 = 235/400$$

Probabilità condizionata e indipendenza

- **Esempio**. Un campione composto di ampiezza 200 è stato classificato secondo il peso corporeo e l' incidenza di ipertensione. I risultati sono stati riportati nella seguente tabella di contingenza

	Sovrappeso	Peso normale	Sottopeso	Totale
Ipertesi	20	16	4	40
Non ipertesi	30	90	40	160
Totale	50	116	44	200

Esempio

- Quale la probabilità che una persona scelta a caso da questo gruppo sia ipertesa?
- Una persona scelta a caso da questo gruppo è stata trovata soprappeso. Qual’ è la probabilità che sia anche ipertesa?

Svolgimento

- **Svolgimento**:
- Definiamo i seguenti eventi

  A: «La persona estratta è ipertesa»

  B: «La persona estratta è sovappeso»
- a) La probabilità di scegliere una persona ipertesa (evento A) è : P(A)=(20+16+4)/200=0,2.
- b) La probabilità richiesta si calcola considerando lo spazio campionario ristretto solo alle persone soprappeso del campione (50). La probabilità di trovare una persona ipertesa all'interno di questo sottogruppo è $P(A \mid B) = 20/50 = 0,4.$

Probabilità condizionata

- Dato uno spazio di probabilità *S* ed un evento B tale che P(B) >0 ,si definisce probabilità condizionata dell'evento A , sapendo che si è verificato l'evento B

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Eventi indipendenti

- **Def**.: Dato uno spazio di probabilità, due eventi A e B di esso si dicono **indipendenti** se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

o

$$P(A \mid B) = P(A)$$

P(B)>0

Esempio 6

Gli eventi A e B dell'esempio sopra sono dipendenti.
Infatti
P(A)= 0,2 e

$$P(A \mid B) = 0{,}4$$

Quindi

$$P(A \mid B) \neq P(A)$$

Variabili aleatorie

- Dato uno spazio di probabilità una Variabile aleatoria (v.a.) è una funzione che associa un valore numerico a ciascun evento.
- Essa può essere discreta se l'insieme dei valori che può assumere è discreto, altrimenti è continua .
- Data una variabile aleatoria discreta che può assumere i valori $x_1, \ldots, x_n$ possiamo associare ad ogni valore la probabilità che assuma quel valore, cioè

  $p_i = P(X=x_i), \quad i=1, \ldots, n$.
- L'insieme $\{p_1, \ldots, p_n\}$ è detto distribuzione di probabilità della variabile aleatoria. Dagli assiomi di probabilità si ha che $p_1+ \ldots, +p_n=1$.

Esempi

- **Esempio 7**. Sia X la variabile aleatoria che misura il numero di T (testa) in 3 lanci di una moneta non truccata. Allora i possibili valori che X può assumere sono {0,1,2,3} lo spazio degli eventi è

C C C

T C C

C T C

C C T

C T T

T C T

T T C

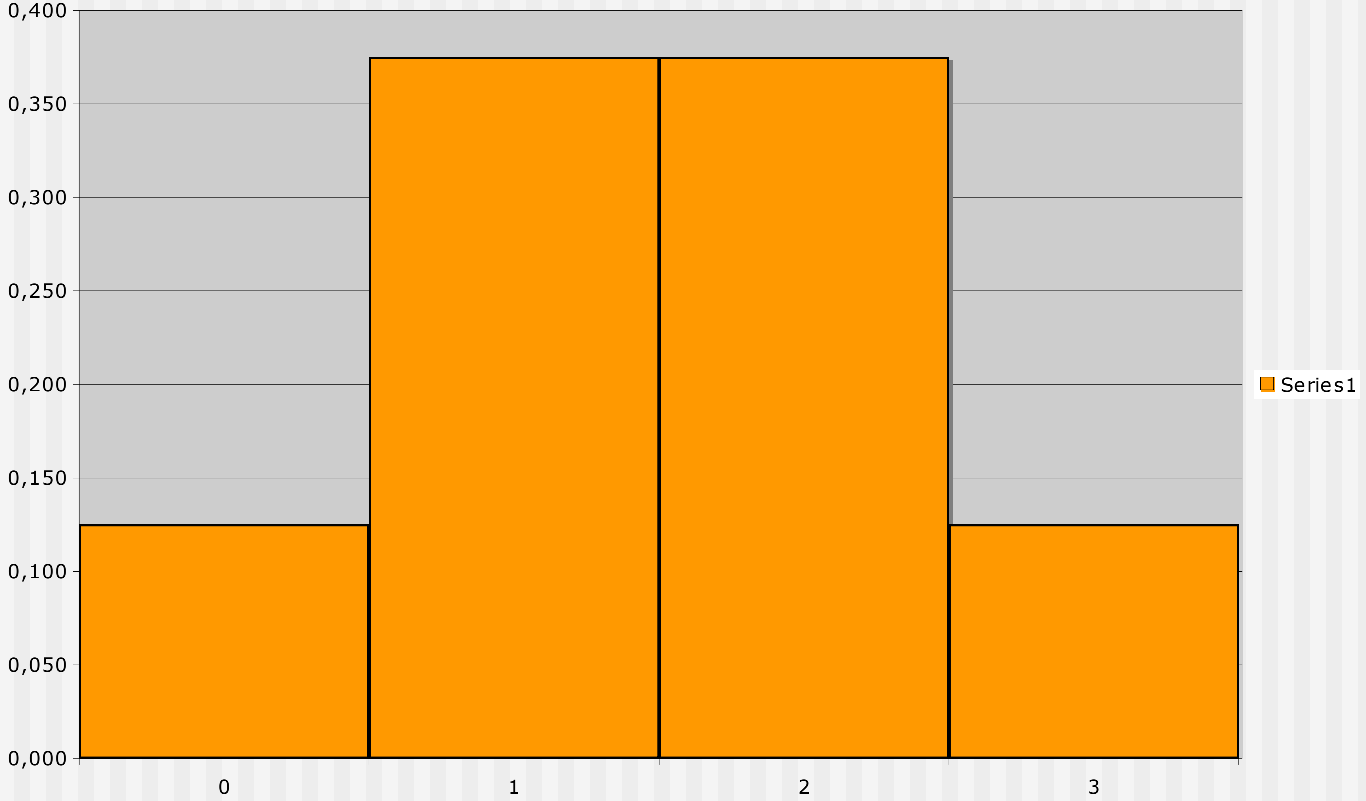
T T T

Esempio

e la distribuzione di probabilità è la seguente:

x_i	p_i
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Istogramma



Proprietà

La **distribuzione di probabilità** di una variabile aleatoria discreta X è l'elenco dei distinti valori numerici che può assumere X con la rispettiva probabilità.

Le proprietà della distribuzione di probababilità di una v.a. dicreta sono

- $p_i \geq 0$ per ogni i
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Valore atteso di una v.a.

Valore atteso o media della v.a. X: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Nell'esempio precedente il valore aspettato è

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Valore atteso di una v.a.

Valore atteso o media della v.a. X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Proprietà

1) $E(C) = C$ se C e la v.a.costante;
2) $E(X) \geq 0$ se $X \geq 0$;
3) $E(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2)$, per ogni v.a. X_1, X_2 *e per ogni costante* a_1, a_2.

Esempio

- Una compagnia di assicurazion paga ad ogni cliente un premio di 1000 euro in caso di incidente o furto durante un viaggio di 5 giorni. Se il rischio di tale perdita è stimato 1 su 200, qual' è il prezzo onesto da pagare per tale polizza?

Soluzione

Pagamento	Probabilità
0 euro	0,995
1000 euro	0,005

$\mu = 0 \cdot 0{,}995 + 1000 \cdot 0{,}005 = 5 \text{ euro}$

Varianza

La **Varianza** *Var (X)* di una variabile aleatoria (variabile caleatoria) X o **Varianza della popolazione** con media μ è

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i p_i - E(X)^2$$

Proprietà

1. $Var(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n) = c_1^2 \, Var(X_1) +) =$
$c_2^2 \, Var(X_2) + \dots + c_n^2 \, Var(X_n)$

per ogni n- pla di variabile aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_n$, indipendenti e costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$.

2. Se X e' una variabile aleatoria con media *E(X)* e deviazione standar *Var(X)* , allora

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

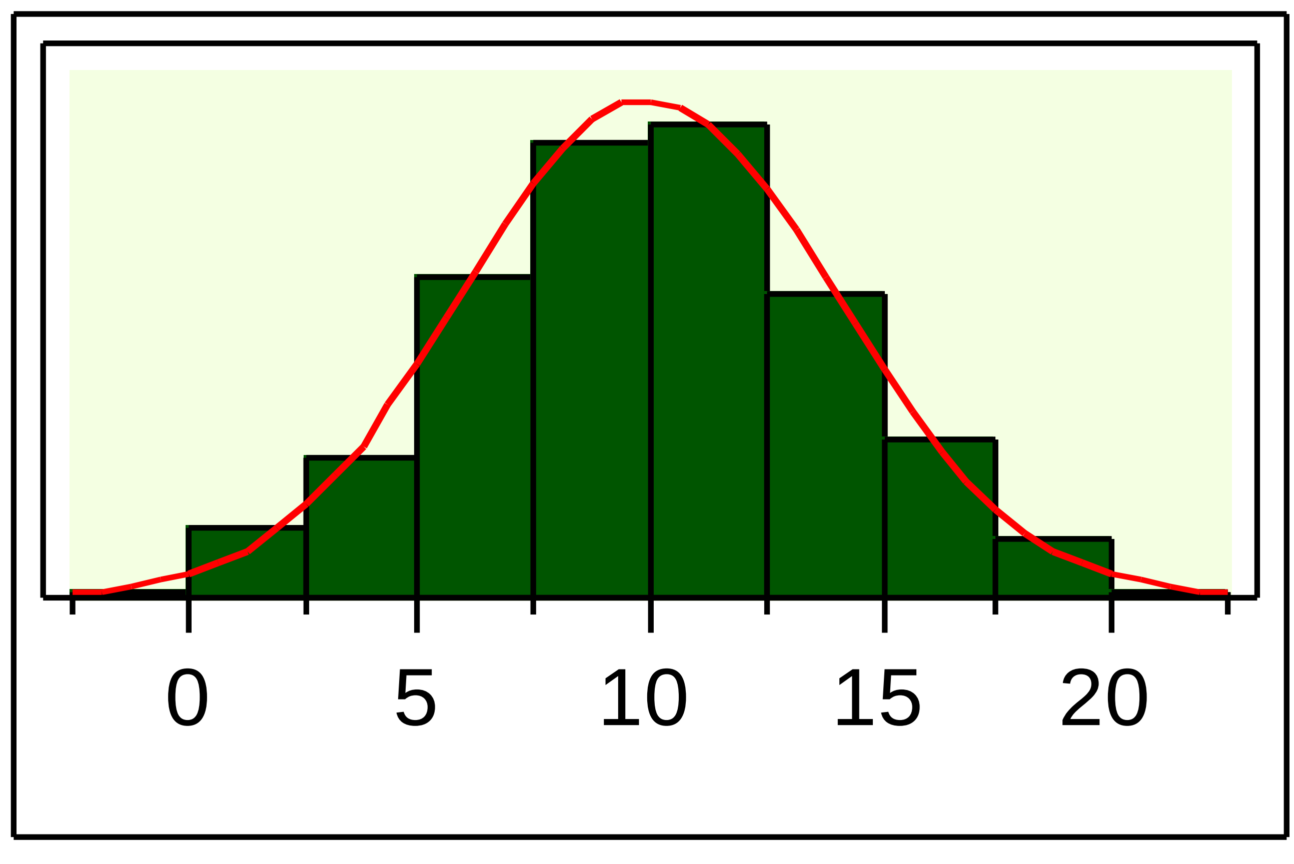
e' chiamata variabile aleatoria standardizzata , cioe' $E(Y)=0$ e $Var(Y)=1$.

Deviazione standard

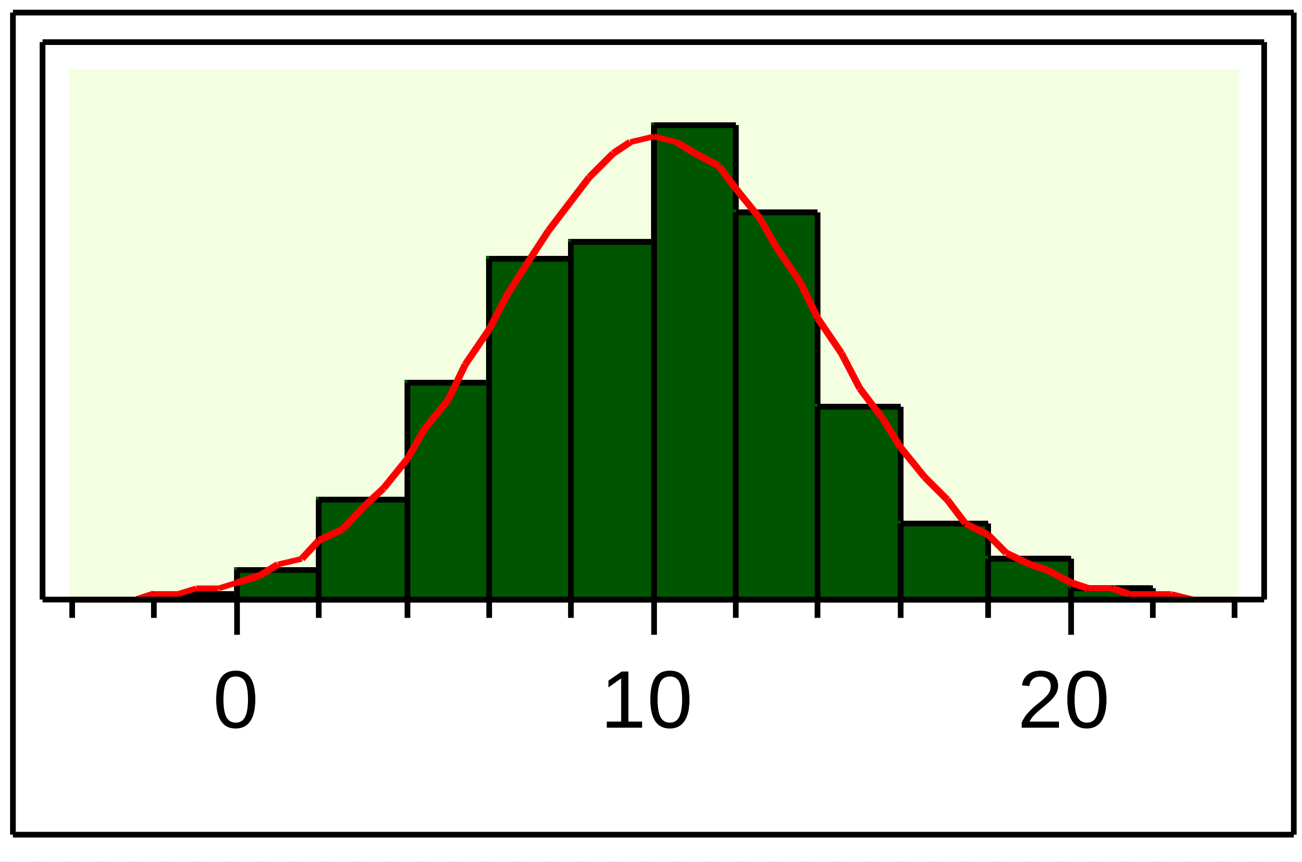
La **Deviazione standard o lo scarto quadratico medio** di una variabile aleatoria (variabile caleatoria) X o **Deviazione standard della popolazione** con media μ è la radice quadrata della varianza,

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

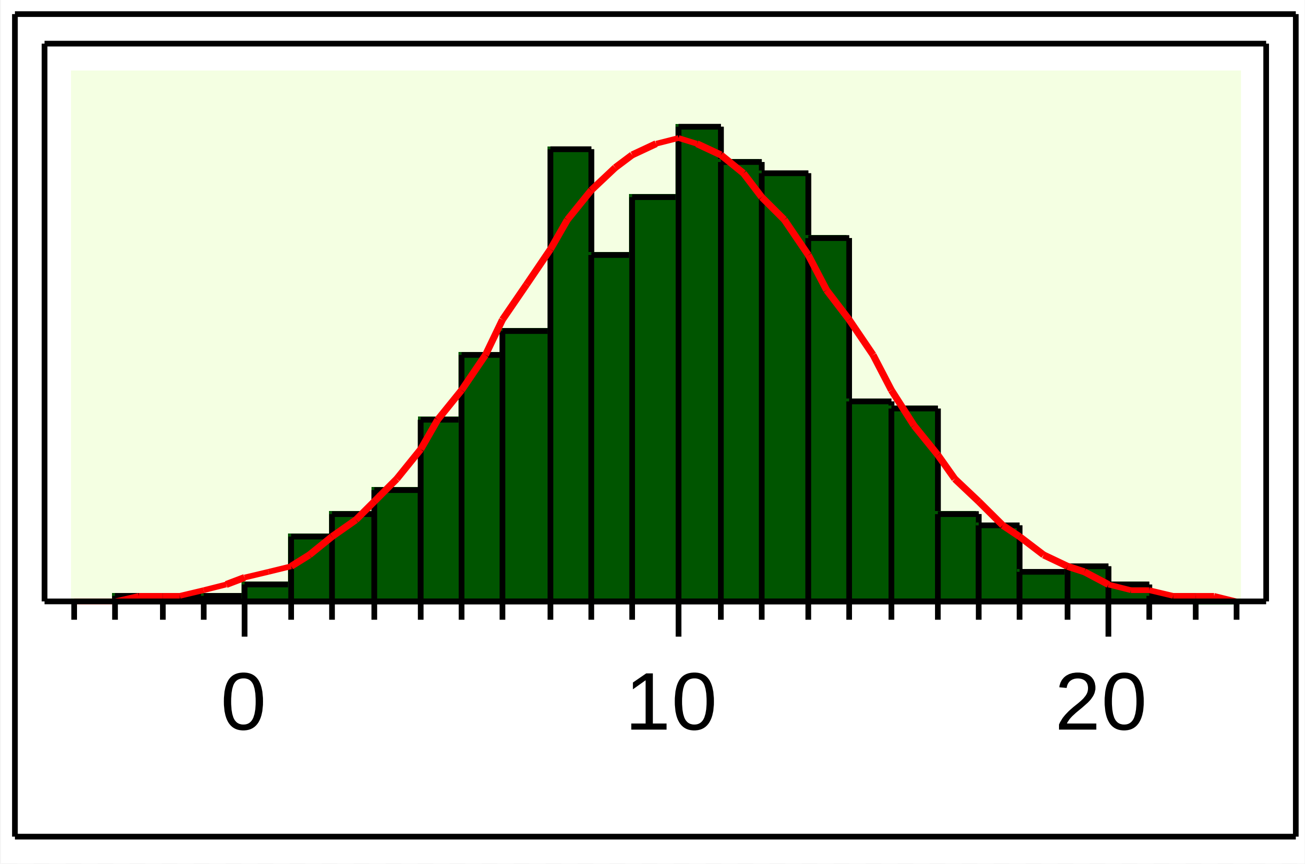
Distribuzioni continue



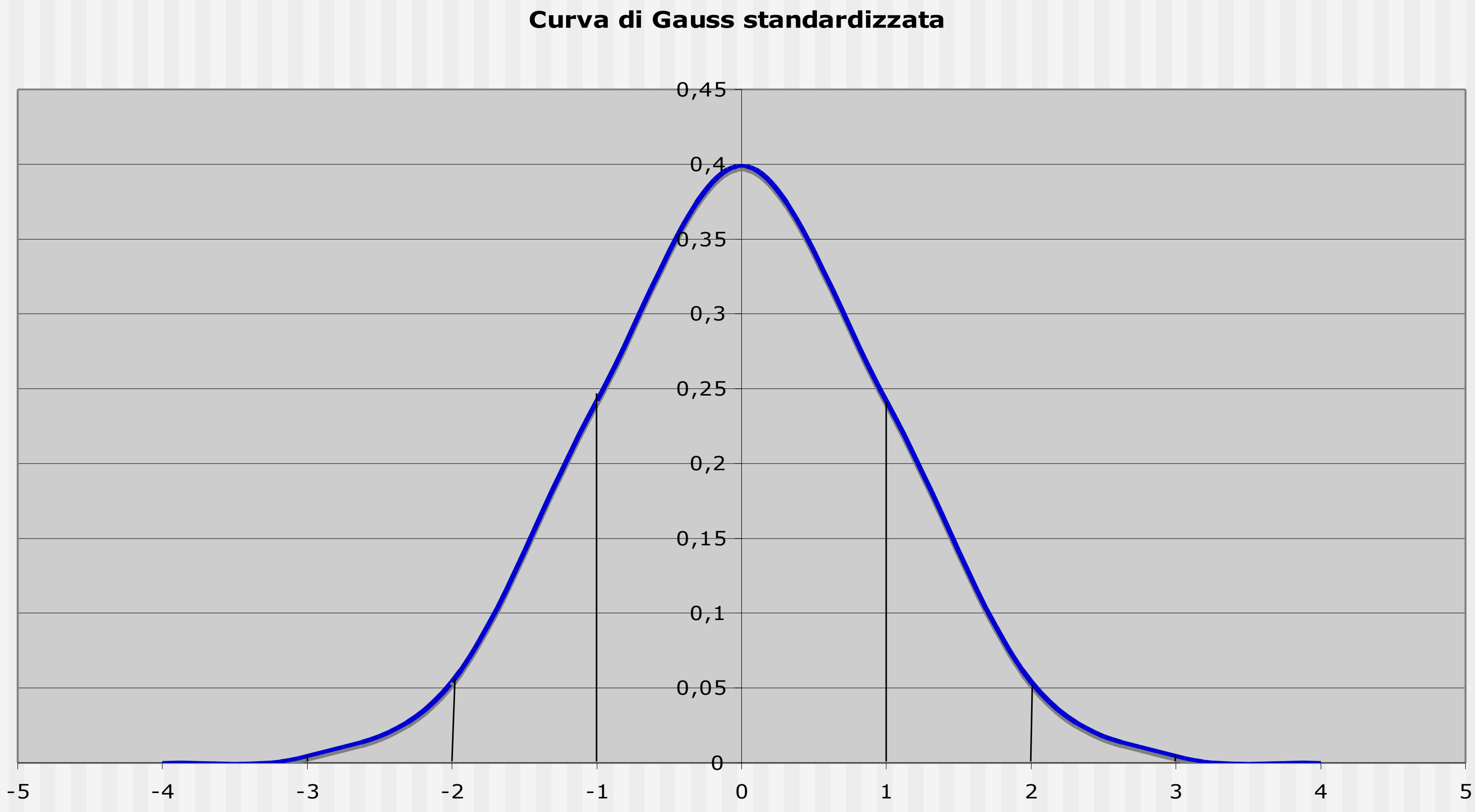
Distribuzioni continue



Distribuzioni continue



Distribuzioni di Gauss



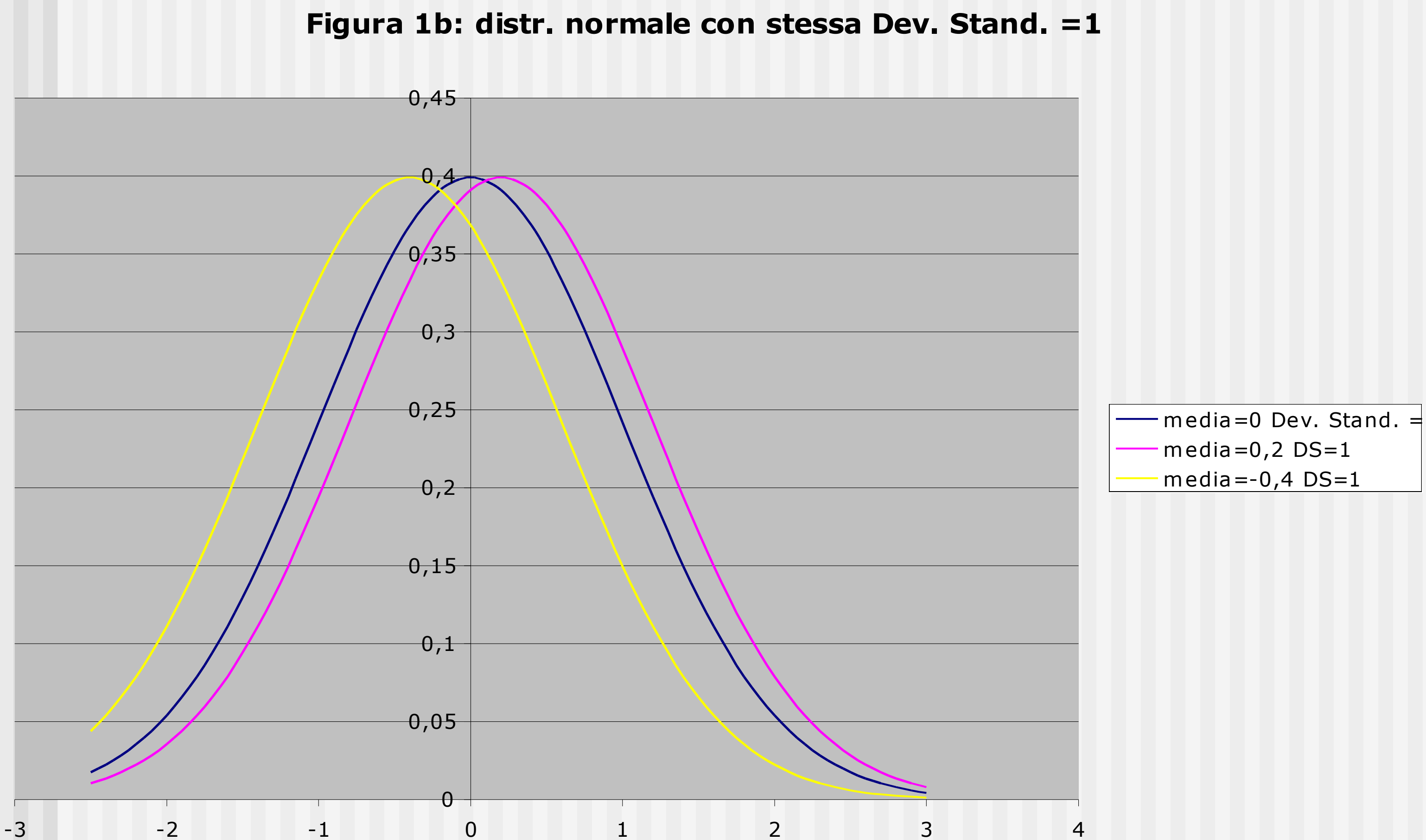
Storia

- Laplace (1733) dimostrò che la distribuzione normale è limite della distribuzione binomiale .
- Nella ricerca della distribuzione degli errori accidentali Gauss (1809) trovò la curva normale:
- siano $g_1, ..., g_n$, n misure strumentali di una grandezza incognita g, per esempio l'altezza di un monte. Siano $x_1 = g_1 - g, ..., x_n = g_n - g$ gli errori incogniti da cui ciascuna misura è affetta. Tali errori possono dipendere da:
  - imperfezione dello strumento di misura, le circostanze ambientali,
  - l'errore del rilevatore, ecc. e sono chiamati accidentali.

Curva di Gauss. Proprietà

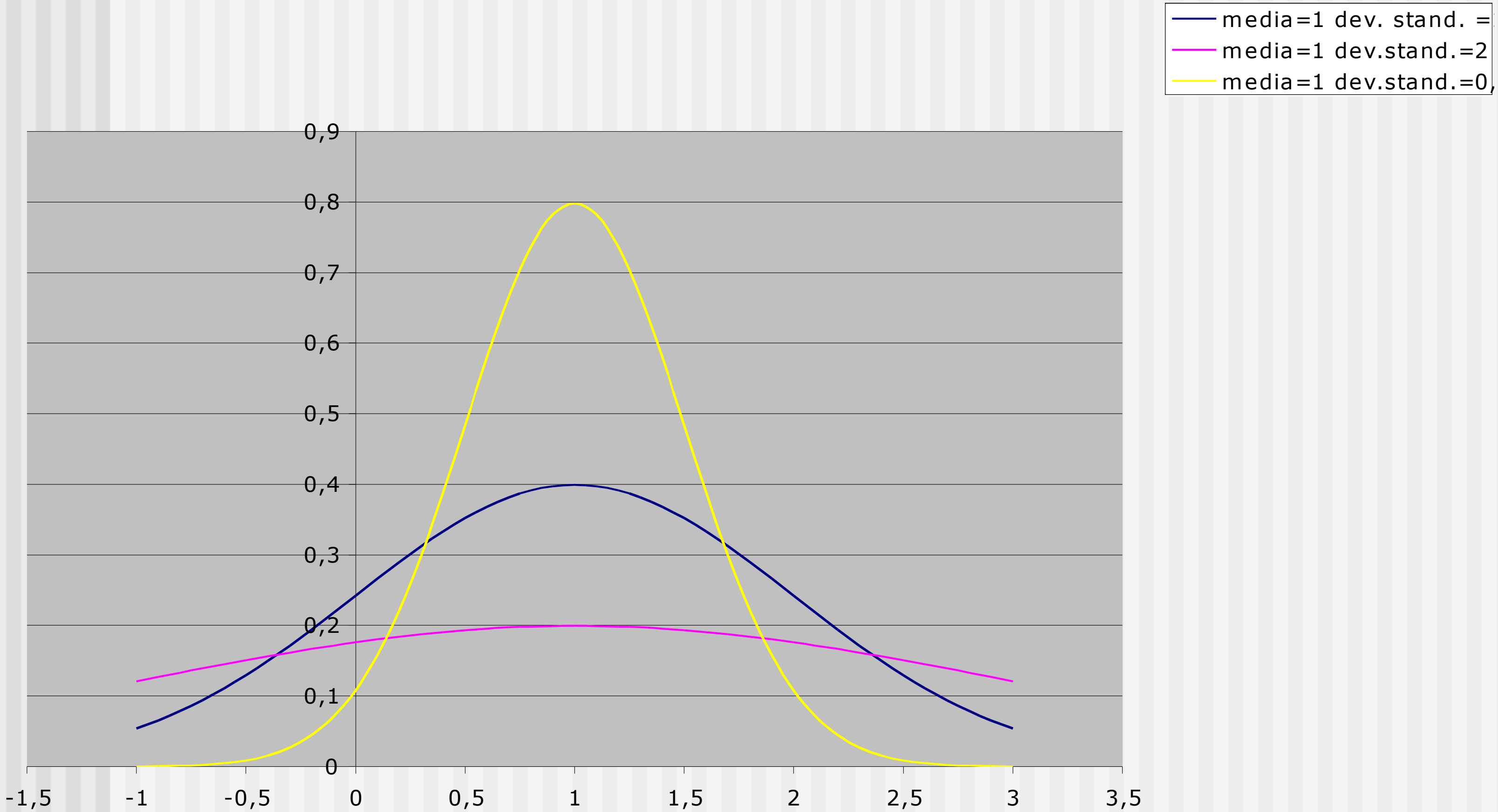
- media μ
- varianza σ^2
- è simmetrica rispetto alla media
- ha media, moda e mediana coincidenti (e pari μ)
- non raggiunge mai lo zero per ogni valore di x.
- f ha massimo in x=μ ed è simmetrica rispetto a μ.
- Talvolta si indica N(μ, σ^2)

Curve di Gauss con la stessa Deviazione Standard



Curve di Gauss con la stessa media

Figura 1 a: distribuzione normale con stessa media =1



Densità di probabilità

- Ad ogni distribuzione continua si associa la funzione densità di probabilità f(x) che corrisponde alla distribuzione di probabilità nel caso discreto
- · $f(x) \geq 0$ per ogni x
- · l’area totale della densità di probabilità è1
- · l’area sottesa dalla curva normale nell’intervallo (a,b) è:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Proprietà

- $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ è pari a 0.6827.
- $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$ è pari a 0.9545.
- $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ è pari a 0.9973.

Standardizzazione di una v.a..

Data una v.a. X con distribuzione continua, essa si può standardizzare, trasfore cioè in una v.a. Z che media 0 e deviazione standard 1:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Teorema del Limite Centrale

Un risultato sosprendente noto come Teorema del Limite Centrale stabilisce che se l'ampiezza del campione è sufficientemente grande ($n \geq 50$) allora qualunque sia la distribuzione della popolazione distribuzione della media campionaria può essere ben approssimata dalla distribuzione di Gauss. In particolare se consideriamo la media campionaria standard essa può essere ben approssimata dalla variabile normale standardizzata.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Teorema del Limite Centrale

- Se si estraggono dalla popolazione campioni di dimensioni *n*, la media campionaria sarà approssimativamente distribuita normalmente con valor medio uguale a quello della popolazione ed errore standard
- La Media delle medie campionarie è approssimativamente uguale al valor medio della popolazione

Teorema del Limite Centrale

Il Teorema del Limite Centrale (TLC) : Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili casuali aventi stessa distribuzione di probabilità con media μ e varianza σ^2, sia $\overline{X}_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Allora

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)\right] = \mu$$

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)\right] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teorema del Limite Centrale

Consideriamo la variabile standardizzata:

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Allora al crescere di *n* si ha che *Z* tende ad avere una distribuzione di Gauss:

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to N(0,1) \qquad n \to \infty$$

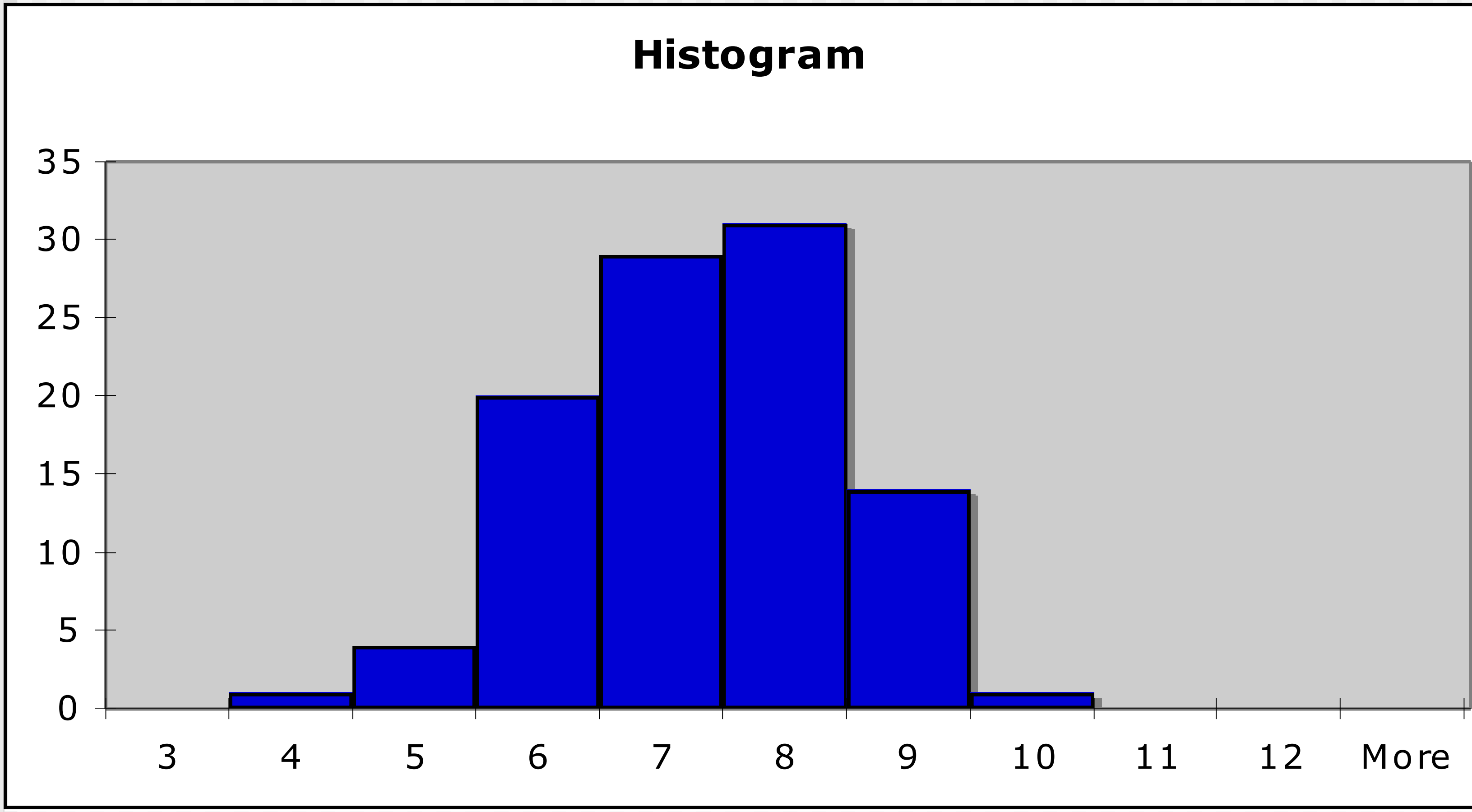
Esempio

- Si lanci due dadi e sia X la variabile aleatoria che misura la somma dei risultati. Supponiamo di lanciare 5 volte la coppia di dadi per 100 volte e otteniamo i seguenti risultati:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	media
5	7	5	7	5	5,8
8	4	9	11	7	7,8
6	10	8	8	7	7,8

…….

Distribuzione empirica



Statistica descrittiva

Statistica descrittiva	
Mean	6,96
Standard Error	0,11
Median	7,00
Mode	5,80
Standard Deviation	1,11
Sample Variance	1,24
Kurtosis	-0,25
Skewness	-0,25
Range	5,60
Minimum	3,60
Maximum	9,20
Sum	696,20
Count	100,00