

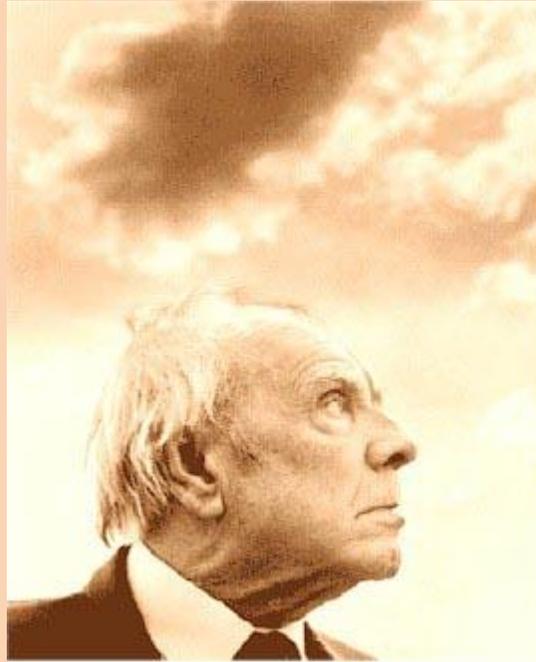


# ***NUMERI E INFINITO***

*Carlo Toffalori (Camerino)  
ITIS Divini, San Severino Marche  
13 novembre 2014*

Sempre caro mi fu quest' ermo colle,  
E questa siepe, che da tanta parte  
De l'ultimo orizzonte il guardo esclude.  
Ma sedendo e mirando, l'interminato  
Spazio di là da quella, e sovrumani  
Silenzii, e profondissima quiete  
Io nel pensier mi fingo, ove per poco  
Il cor non si spaura... E come il vento  
Odo stormir tra queste piante, io quello  
Infinito silenzio a questa voce  
Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,  
E le morte stagioni, e la presente  
E viva, e il suon di lei. Così tra questa  
~~Immensità~~<sup>Infinità</sup> s'annega il pensier mio:  
E il naufragar m'è dolce in questo mare.

Giacomo Leopardi, secondo autografo de "L'infinito" (Visso, Palazzo  
Comunale)



Jorge Luis Borges, *Discussione, Metempsicosi della tartaruga e La perpetua corsa di Achille e della tartaruga*

L'infinito

- “concetto che corrompe e ammattisce tutti gli altri”
- “parola di spavento che abbiamo generato temerariamente e che, una volta ammessa in un pensiero, esplode e lo uccide”

*L'Infinito*: forse tema per poeti, mistici, filosofi o (chissà?) fisici. Ma che cosa c'entrano la Matematica e il calcolatore? 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... : e dopo?



Se passassimo il tempo a contare, arriveremmo a

- diecimila in un giorno,
- dieci milioni in un anno,
- un miliardo in una vita.

E dopo?

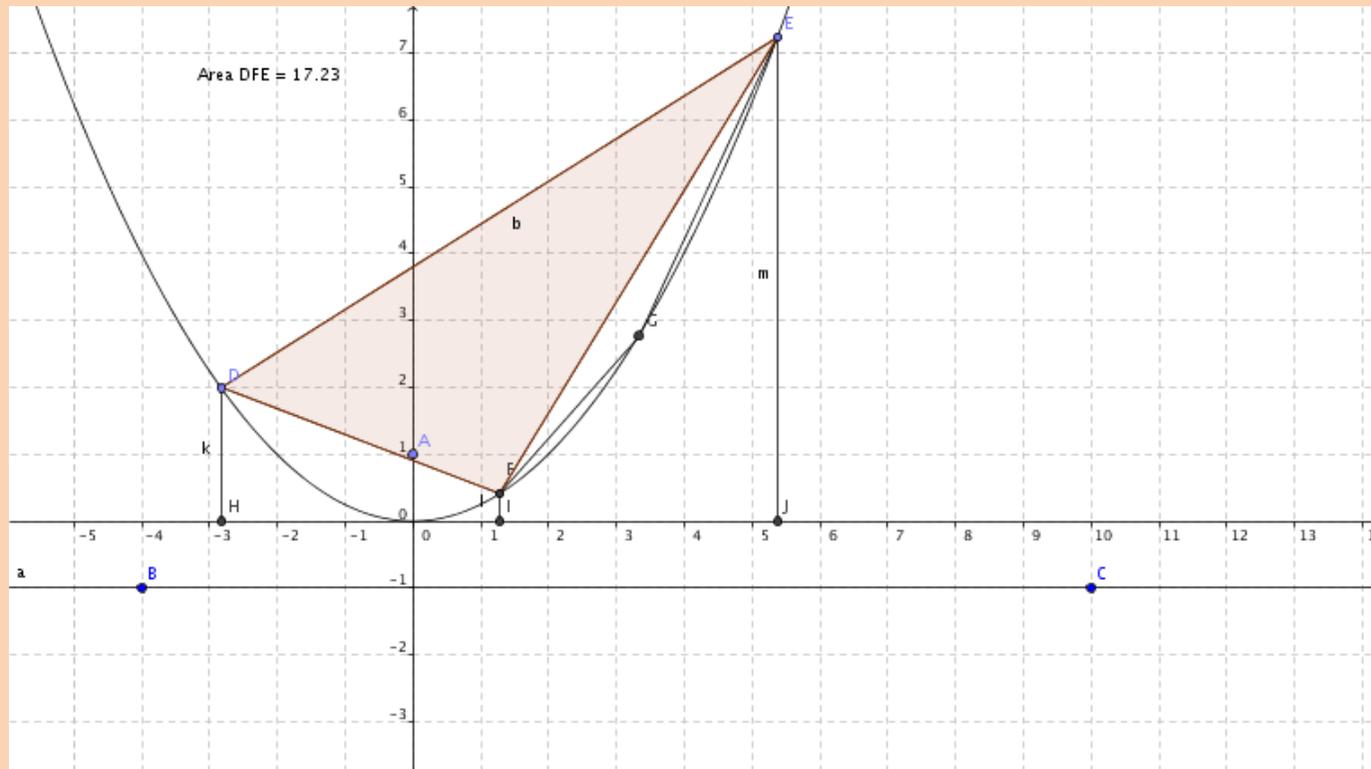


C. F. Gauss (1831): *“L’uso dell’infinito come qualcosa di definito... non è permesso in Matematica. L’infinito è solo un modo di dire, e intende un limite cui certi rapporti possono approssimarsi vicino quanto vogliono”*.

Ricordare: Aristotele, *infinito in potenza e infinito in atto*

In verità, il *calcolo infinitesimale*

- dalle intuizioni di Archimede...



- alla querelle tra Newton e Leibniz



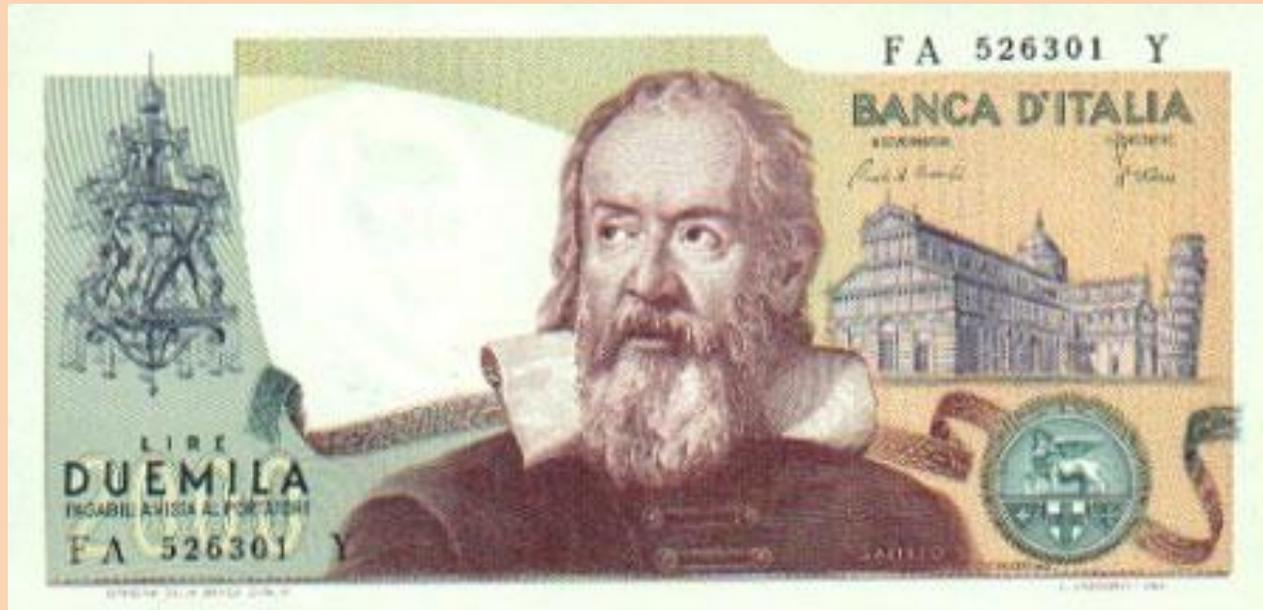
Tuttavia, solo pochi anni dopo Gauss... *Georg Cantor*



Quanto è grande l'infinito? Dal contare al confrontare.

Forse solo un'inutile finezza: gli insiemi infiniti hanno tutti lo stesso numero di elementi: appunto,  $\infty$  .

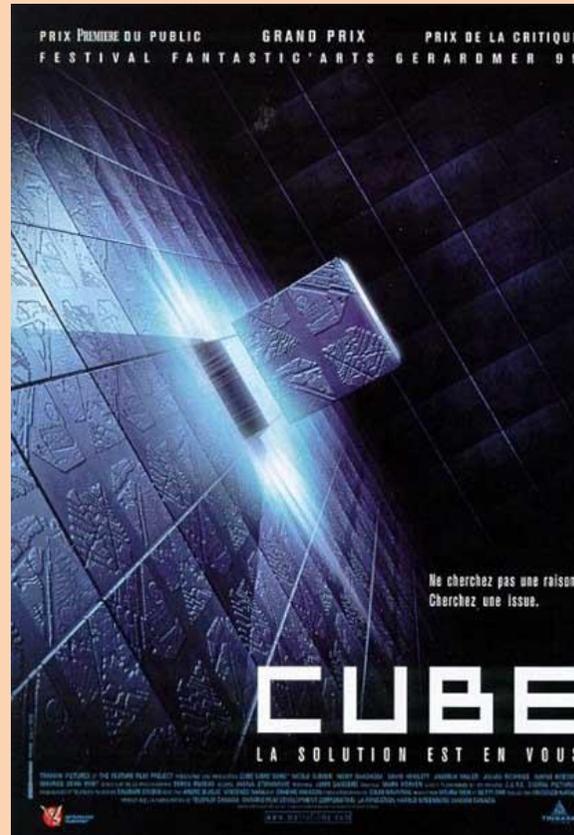
Un'opinione rozza ma fondata, con molte sorprendenti conferme.



*Il paradosso di Galileo: tanti naturali quanti quadrati (G. Galilei, 1638, “Queste sono di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno all’infinito, dandogli di quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate: il che penso che sia inconveniente”)*



*L'albergo di Hilbert*: sempre libero anche quando è completo.



Tanti punti in una retta quanti in un piano quanti nell'intero spazio (Cantor a Dedekind: *“Lo vedo ma non lo credo”*).



Laurence Sterne, *Vita e opinioni di Tristram Shandy, gentiluomo*

- Un'autobiografia da scrivere
- Un anno per raccontare il primo giorno
- La rincorsa di Tristram Shandy a se stesso (come Achille e la tartaruga)

Bertrand Russell, *Misticismo e logica, La matematica e i metafisici*



Se Shandy fosse stato eterno “nessuna parte della biografia sarebbe rimasta non scritta. Infatti: nel centesimo anno avrebbe descritto il centesimo giorno, nel millesimo anno il millesimo giorno, e così via”.

Eppure... Cantor (1874)

- l'infinito dei numeri 0, 1, 2, 3, 4, ...
  - l'infinito dei punti di una retta
- sono diversi!



- Anzi, c'è un'infinità di numeri infiniti: gli *aleph*!
- Notevole: la tecnica di “diagonalizzazione” che Cantor usa in queste dimostrazioni è il prototipo di molti argomenti della moderna Informatica Teorica.



J. L. Borges, *La cifra*

- *“I vasti numeri che un uomo immortale non raggiungerebbe neppure se consumasse la sua eternità contando”*
- *“Le dinastie immaginarie che hanno come cifre le lettere dell’alfabeto ebraico”*

J. L. Borges, *Storia dell'eternità*  
“*Georg Cantor e la sua eroica teoria degli insiemi*”



- Il paradiso di Cantor: il nulla osta del Vaticano, l'entusiasmo di Hilbert
- L'inferno di Cantor: l'ostracismo di Kronecker, la depressione, la morte in clinica psichiatrica.

*Un dibattito nella comunità matematica del primo Novecento*

- E' lecito in matematica trattare l'Infinito?
- Che cosa studia, e che cosa è la matematica?



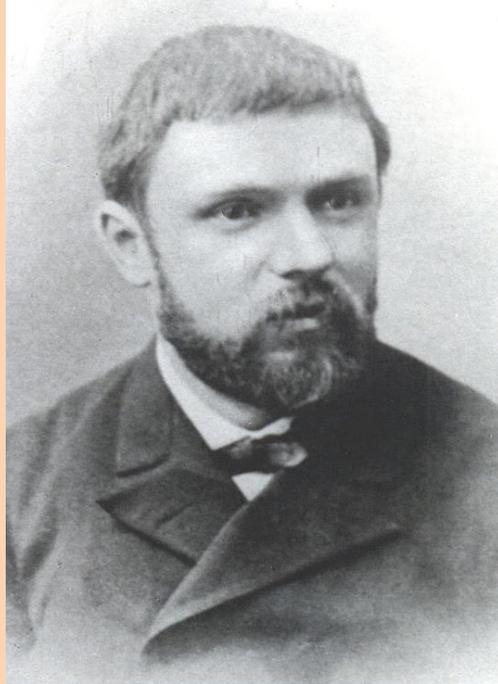
Il programma di Hilbert (*Sull'Infinito, Über das Unendliche*, 1925)

- Lecito trattare in matematica qualsiasi argomento (numeri e infiniti, triangoli, insiemi...)
- Importante farlo con proprietà: fissando *assiomi* e *regole di ragionamento* deducendone *teoremi*.

### *Requisiti irrinunciabili*

- Coerenza = assenza di ogni contraddizione (*dimostrare solo la verità*)
- Completezza = assenza di ogni incertezza (*dimostrare tutta la verità*).





*Dopo di che: la matematica è delegata ai calcolatori...*

*La critica di Poincaré: teoremi come salsicce.*



K. Gödel, 1931: i *Teoremi di Incompletezza*

Consideriamo una teoria matematica alla Hilbert

- Coerente
- umanamente comprensibile
- capace di trattare un minimo di aritmetica (non l'infinito, ma i numeri naturali con addizione e moltiplicazione).

Allora questa teoria non sarà mai *completa*.

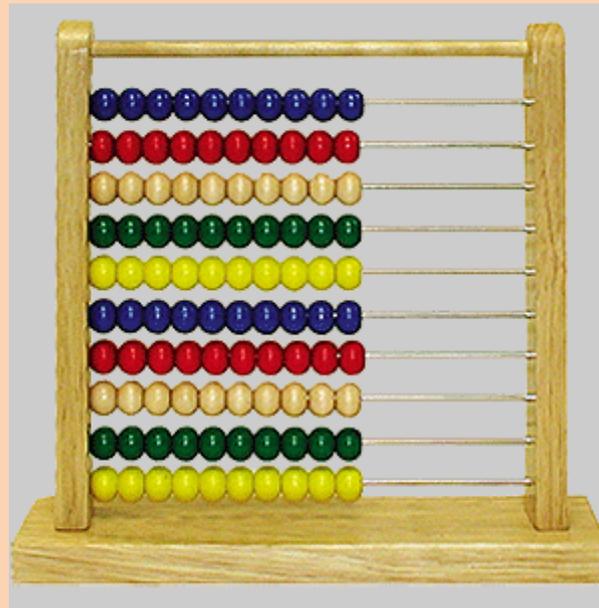


Si dimostra *la verità, niente altro che la verità...* ma *non tutta la verità!*

*Per altri versi:* come la siepe nell'Infinito di Leopardi...

*Un dibattito scientifico negli anni '30 (Hilbert, Church, Gödel, Turing, ...)*

- Tutti i problemi si possono *risolvere*?
- Che cosa si può *calcolare*?
- Che significa *calcolare*?
- Chi è delegato a *calcolare*? Chi, o che cosa, è il *calcolatore*?



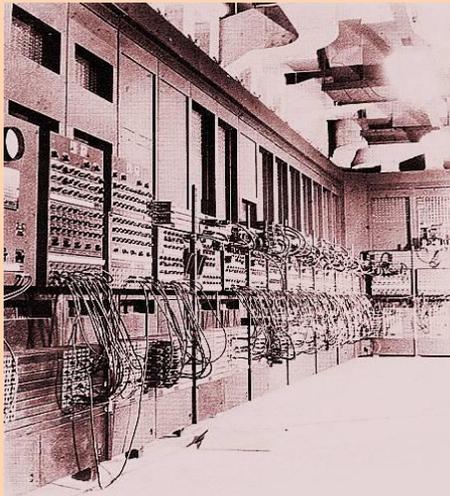


*Alan Turing (1912-1954)*

- Nel 1936 propone un modello teorico di calcolatore ante litteram: la *Macchina di Turing*.



*Da notare:* il primo computer elettronico moderno, l'ENIAC di John von Neumann, risale al 1946.

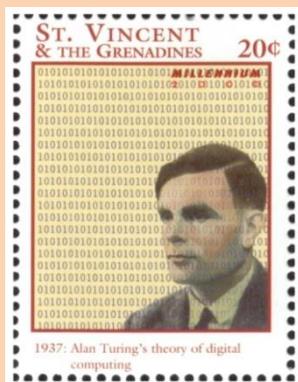






*La Tesi di Church e Turing (1936): è calcolabile esattamente quello che una Macchina di Turing sa calcolare.*

*Per molti versi valida ancora oggi*



Sulla sua base: *problemi (matematici e informatici) che **NON** si possono risolvere.*

Un esempio: *il **decimo problema di Hilbert***

Un dubbio sui problemi che si possono risolvere: *il costo di una computazione - sempre tollerabile?*



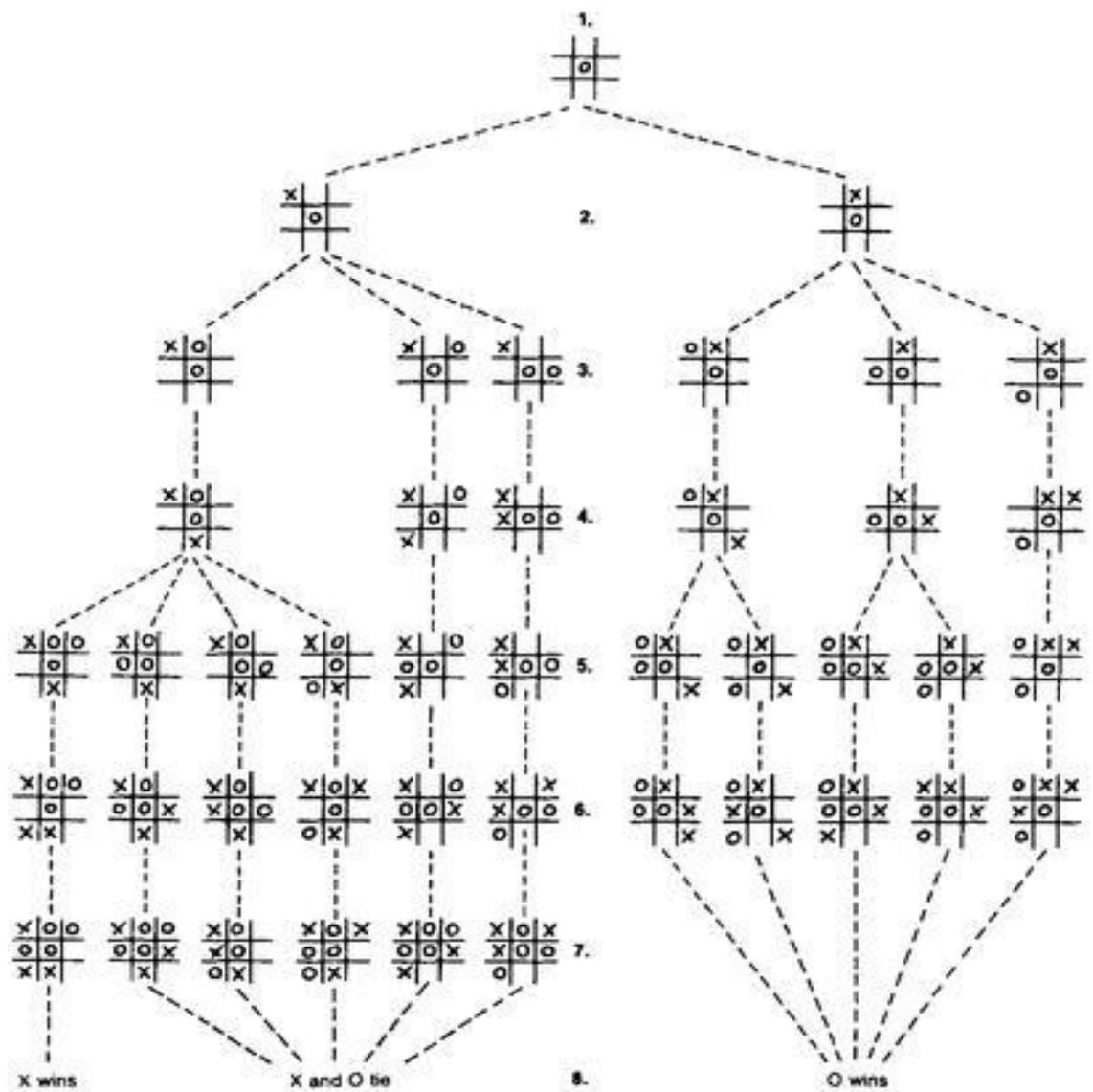
*Un esempio dagli scacchi*

Ernst Zermelo e la partita perfetta (1912)

Come nel Tris...



L'albero del Tris



- 1. The first move by O.
- 2. Possible first moves by X.
- 3. Possible second moves by O.
- 4. Possible second moves by X.
- 5. Possible third moves by O.
- 6. Possible third moves by X.
- 7. Possible fourth moves by O.
- 8. Outcomes.

- Un errore fondamentale da evitare per X
- Un errore fondamentale da evitare per O

Dopo di che la partita perfetta, immune da errori, finisce in pari



*Zermelo: c'è (almeno) una partita perfetta anche per gli scacchi!*

Matematica o teologia? Pratica o grammatica?



Gli scacchi: 20 mosse di apertura,  $10^{43}$  posizioni,  $10^{120}$  partite possibili...

*Da notare:* oggi un calcolatore esegue al massimo  $10^{17}$  operazioni all'anno

*Dunque:* quanti anni per completare tutte le partite e individuare quelle perfette?

Samuel Beckett, *Aspettando Godot*



Chi è Godot?

- Il deus ex machina Godeau de *L'affarista Mercadet* di Balzac?
- Dio?
- Il computer?

Una nuova prospettiva e i limiti della macchina: la *Complessità Computazionale*



Galileo: “*discorrere è come correre*”