STRUMENTI MATEMATICI PER LO STUDIO DEI SISTEMI COMPLESSI

Capozucca Andrea

PLS MATEMATICA Recanati

UNA NUOVA “SFIDA”

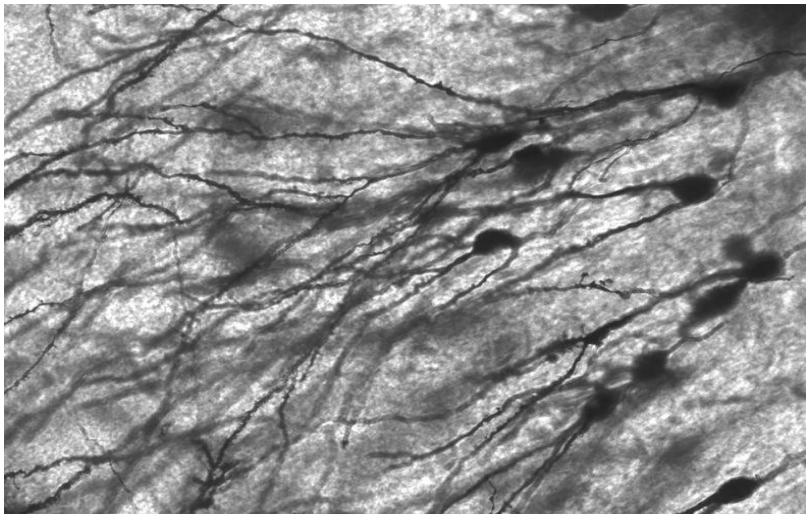
“La scienza della complessità rivolge al mondo uno sguardo d’insieme, interessandosi alle intricate e imprevedibili correlazioni tra i sistemi. Permette una comprensione olistica, più attenta al sistema nella sua globalità e alla sua organizzazione, che tiene contro delle relazioni tra i diversi livelli di realtà e della circolarità che si instaura tra causa ed effetto, tra sistema e ambiente”

Gianni Zanarini

QUALI SONO LE CARATTERISTICHE DI UN SISTEMA COMPLESSO?

1. AGENTI
2. INTERAZIONI NON-LINEARI
3. DECENTRALIZZAZIONE
4. COMPORTAMENTO EMERGENTE

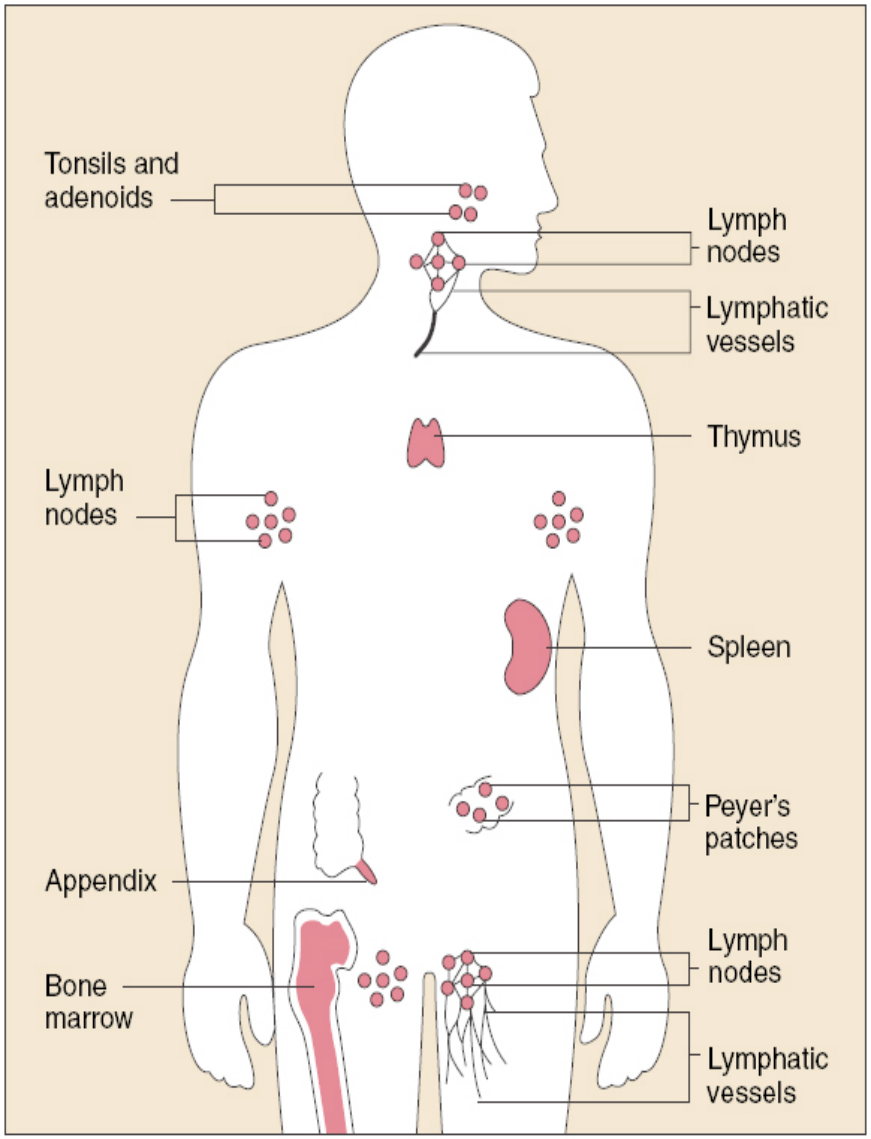
UN ESEMPIO DI SISTEMA COMPLESSO



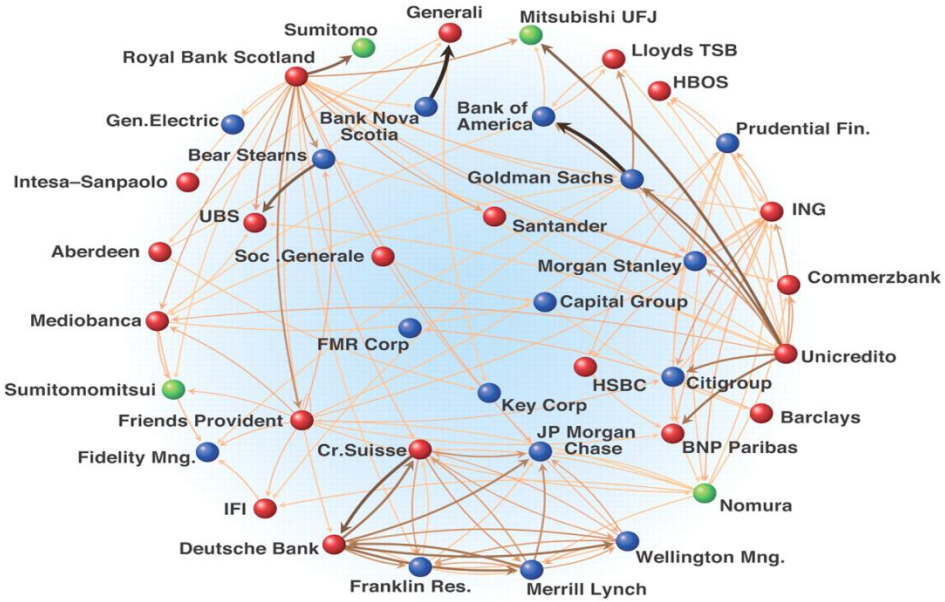
ESEMPI DI COMPORTAMENTO EMERGENTE

1. ORGANIZZAZIONE GERARCHICA
2. PROCESSAMENTO DELLE INFORMAZIONI
3. DINAMICA DEL SISTEMA
4. EVOLUZIONE E APPRENDIMENTO

ESEMPI


Tonsils and adenoids
Lymph nodes
Lymphatic vessels
Thymus
Lymph nodes
Spleen
Peyer's patches
Appendix
Lymph nodes
Bone marrow
Lymphatic vessels

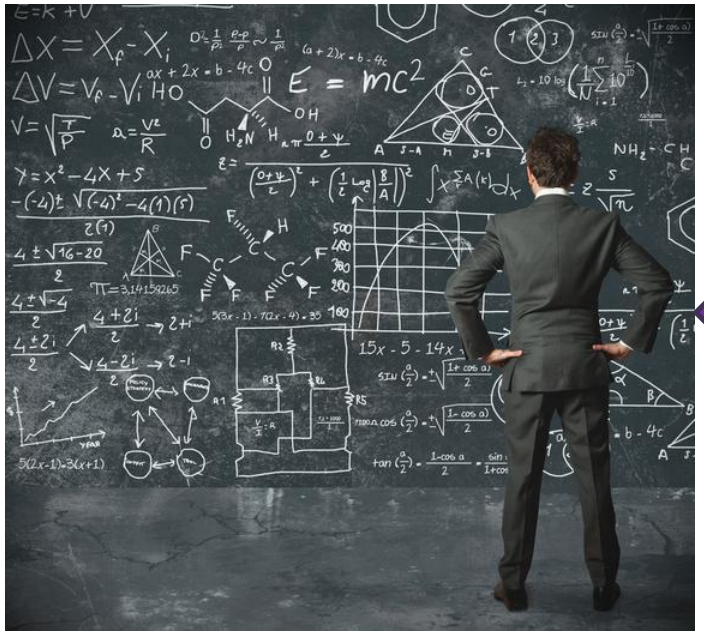
facebook

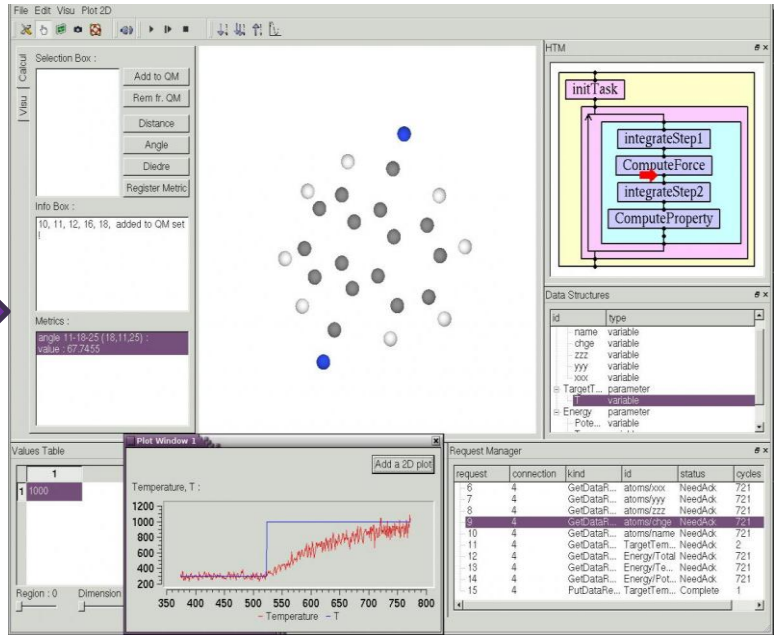

Generali
Mitsubishi UFJ
Sumitomo
Royal Bank Scotland
Lloyds TSB
HBOS
Gen.Electric
Bank Nova Scotia
Bank of America
Prudential Fin.
Bear Stearns
Intesa–Sanpaolo
Goldman Sachs
ING
UBS
Santander
Aberdeen
Soc .Generale
Morgan Stanley
Commerzbank
Capital Group
Mediobanca
FMR Corp
Unicredito
HSBC
Citigroup
Sumitomomitsui
Key Corp
Barclays
Friends Provident
JP Morgan Chase
BNP Paribas
Fidelity Mng.
Cr.Suisse
Nomura
IFI
Deutsche Bank
Wellington Mng.
Franklin Res.
Merrill Lynch

AREE DISCIPLINARI DI BASE

- **DINAMICA** : studio di sistemi che cambiano continuamente struttura nel tempo e nello spazio
- **INFORMAZIONE** : studio della rappresentazione, dei simboli e della comunicazione
- **COMPUTAZIONE** : studio di come i sistemi processano l'informazione e agiscono sui risultati
- **EVOLUZIONE** : studio di come i sistemi si adattano ad un ambiente che varia nel tempo

METODOLOGIE





DEFINIZIONE DELLA COMPLESSITA' (1)

- La complessità di un sistema è difficile da definire!
- Esistono definizioni diverse nei diversi campi di studio

"Measures of Complexity: a Nonexhaustive List" di Seth Lloyd
IEEE Control System Magazine (2001)

42 definizioni o metodi per misurare la complessità
•informazione di Shannon
•complessità algoritmica
•dimensione frattale
•profondità logica
•profondità termodinamica
•…

DEFINIZIONE DELLA COMPLESSITA' (2)

Warren Weaver

19

Science and Complexity

Warren Weaver

Science has led to a multitude of results that affect men's lives. Some of these results are embodied in mere conveniences of a relatively trivial sort. Many of them, based on science and developed through technology, are essential to the machinery of modern life. Many other results, especially those associated with the biological and medical sciences, are of unquestioned benefit and comfort. Certain aspects of science have profoundly influenced men's ideas and even their ideals. Still other aspects of science are thoroughly awesome.

How can we get a view of the function that science should have in the developing future of man? How can we appreciate what science really is and, equally important, what science is not? It is, of course, possible to discuss the nature of science in general philosophical terms. For some purposes such a discussion is important and necessary, but for the present a more direct approach is desirable. Let us, as a very realistic politician used to say, let us look at the record. Neglecting the older history of science, we shall go back only three and a half centuries and take a broad view that tries to see the main features, and omits minor details. Let us begin with the physical sciences, rather than the biological, for the place of the life sciences in the descriptive scheme will gradually become evident.

Problems of Simplicity

Speaking roughly, it may be said that the seventeenth, eighteenth, and nineteenth centuries formed the period in which physical science learned variables, which brought us the telephone and the radio, the automobile and the airplane, the phonograph and the moving pictures, the turbine and the Diesel engine, and the modern hydroelectric power plant.

The concurrent progress in biology and medicine was also impressive, but that was of a different character. The significant problems of living organisms are seldom those in which one can rigidly maintain constant all but two variables. Living things are more likely to present situations in which a half-dozen, or even several dozen quantities are all varying

From *American Scientist* **36**, 536. Copyright © 1948 by Sigma Xi.

449

G. J. Klir, *Facets of Systems Science*
© Springer Science+Business Media New York 1991

1. **Problemi semplici (o di semplicità)**
   - poche variabili
   - pressione e temperatura
   - corrente, resistenza e voltaggio
   - popolazione vs tempo
2. **Problemi di complessità disorganizzata**
   - milioni o miliardi di variabili
   - comprensione delle leggi di temperatura e pressione dallo studio di miliardi di molecole d'aria disorganizzate
   - Meccanica statistica
3. **Problemi di complessità organizzata**
   - trattamento simultaneo di un grande numero di fattori che sono collegati tra essi in un intero organico

“Questi problemi […] sono troppo complicati per essere spiegati con le tecniche del XIX secolo che erano state di grande successo con i problemi della semplicità in due, tre o quattro variabili. Questi nuovi problemi, inoltre, non possono essere trattati con tecniche statistiche così funzionali nella descrizione del comportamento medio delle variabili nei problemi di complessità disorganizzata. Questi nuovi problemi, e il futuro del mondo dipende da molti di essi, richiede una scienza che compia un terzo grande passo avanti, che deve essere più grande della conquista dei problemi di semplicità del XIX secolo o della vittoria sui problemi di complessità disorganizzata del XX secolo. Una scienza che, nei prossimi cinquant’anni, impari a “trattare” questi problemi di complessità organizzata”

Warren Weaver

RUOLO DELLA MATEMATICA

- La "**teoria dei sistemi dinamici**" è la branca della matematica che fornisce un vocabolario e strumenti qualitativi e quantitativi per lo studio dei sistemi dinamici
  - Analisi
  - Mappe iterate
  - Topologia algebrica
  - Geometria frattale
  - Teoria dell'informazione
  - Automi cellulari
  - Reti
  - …

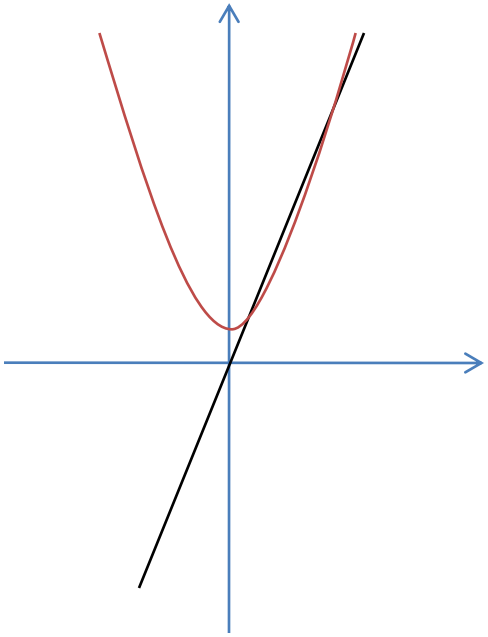
SISTEMI DINAMICI

Sistemi che si evolvono nel tempo in accordo con una “legge” ben precisa e invariabile

- Studiare le proprietà generali
- Classificare e caratterizzare i tipi di comportamento osservati
- Tempo discreto VS tempo continuo
  - Equazioni alle differenze finite (funzioni iterate)
  - Equazioni differenziali

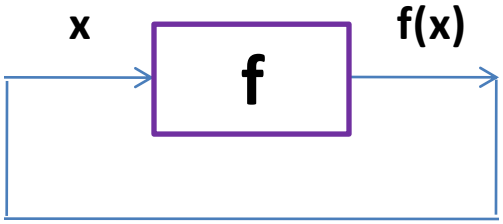
IL CONCETTO DI FUNZIONE

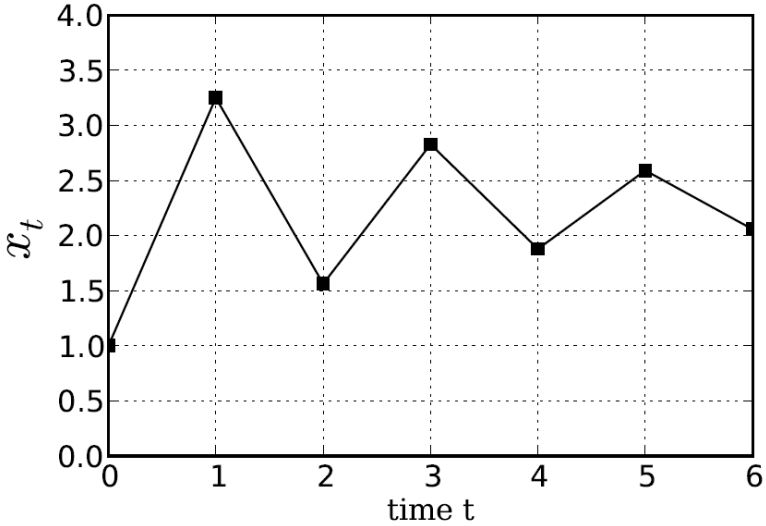
- Funzione = azione
- Espressione
  - Ad esempio: $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2+1$
- Deterministica
  - L'output f(x) è determinato univocamente dall'input x
- Grafico
  - Contiene le stesse informazioni presenti nell'espressione algebrica



FUNZIONE ITERATA

- Iterare = rendere circolare l'azione della funzione
- x_0 condizione iniziale
- $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ orbita
- In generale, $x_{t+1} = f(x_t)$
- Grafico dell'orbita (TSP)
- È un sistema dinamico a tempo discreto!





PUNTI FISSI E STABILITA'

- Punto fisso = un valore numerico che non cambia quando si itera la funzione
- $f(x) = x$
- comportamento globale → phase line (PL)

Ad esempio: $f(x) = x^2$

- $x=0$ è un punto fisso stabile (attrattore)
- $x=1$ è un punto fisso instabile (repulsore)

EQUAZIONE LOGISTICA (1)

$$f(x) = rx(1-x)$$

- Modello di crescita di una popolazione
- Popolazione dell'anno successivo è in funzione di quella dell'anno precedente $P \rightarrow f(P)$
- C'è un limite alla crescita: A
- r è il parametro di crescita
- $x = P/A$
- Cosa accade al variare di r?
- Metodo della scala, simulazioni (NetLogo, programmi on-line, …)

EQUAZIONE LOGISTICA (2)

Possibile comportamento dell'orbita al variare del parametro r:

- Convergente verso un punto fisso (stabile o instabile)
- Divergente all'infinito*
- Periodico
- Aperiodico, caotico

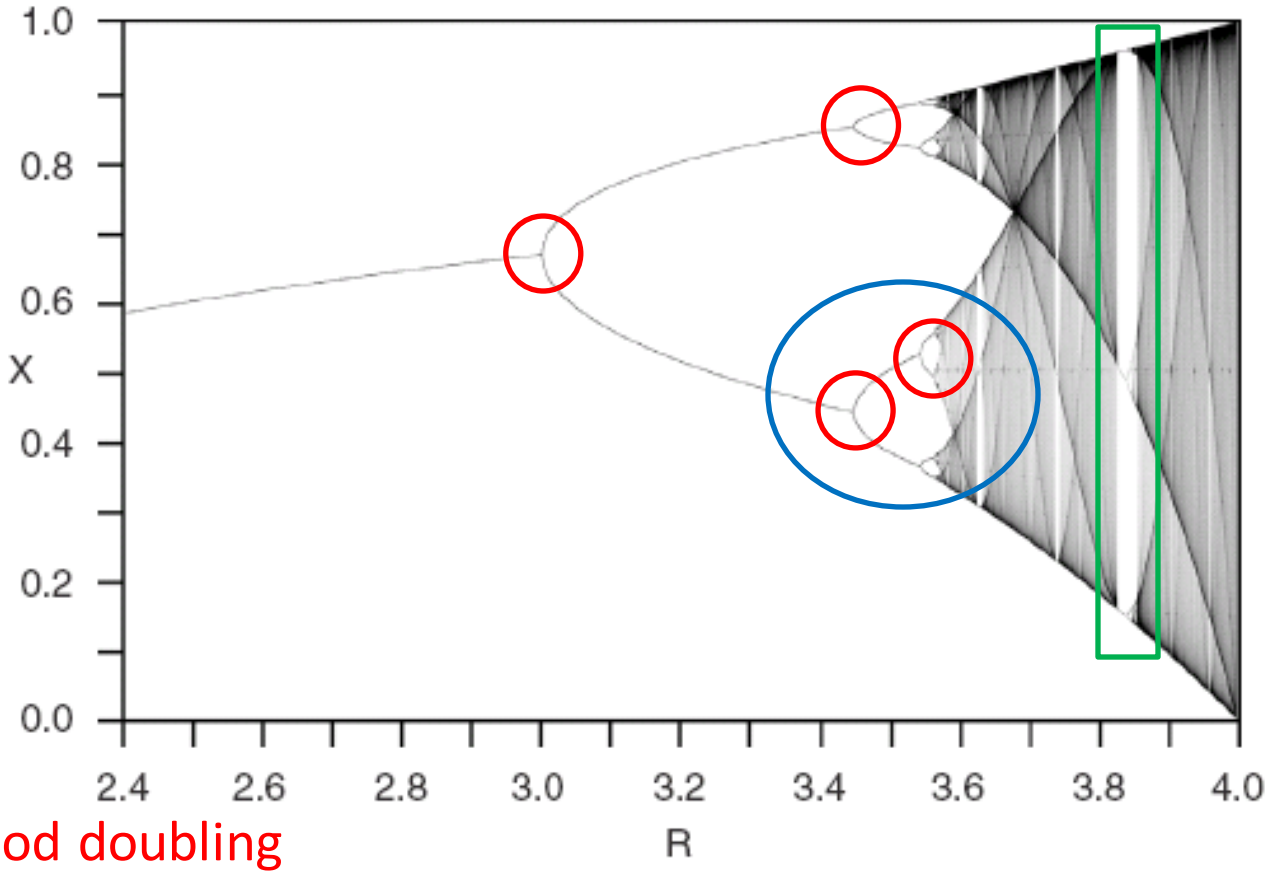
Lord Robert May

Simple mathematical models with very complicated dynamics (1976)

“The fact that the simple and deterministic equation [i.e., the Logistic Map] can possess dynamical trajectories which look like some sort of random noise has disturbing practical implications. It means, for example, that apparently erratic fluctuations in the census data for an animal population need not necessarily betoken either the vagaries of an unpredictable environment or sampling errors; they may simply derive from a rigidly deterministic population growth relationship...Alternatively, it may be observed that in the chaotic regime, arbitrarily close initial conditions can lead to trajectories which, after a sufficiently long time, diverge widely. This means that, even if we have a simple model in which all the parameters are determined exactly, long-term prediction is nevertheless impossible”

Robert May, 1976

DIAGRAMMA DELLE BIFORCAZIONI



1. Period doubling
2. Scaling (proprietà frattale del diagramma)
3. Aperiodic windows
4. Oscillating dark patterns

EFFETTO FARFALLA

- *“Il caos è onnipresente, è stabile, è strutturato”* – Yorke in *Period three implies chaos*
- *“Può il batter d’ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?”* – Lorenz
- Predirre il comportamento di un sistema con SDIC richiede una conoscenza delle condizioni iniziali con un’accuratezza impossibile nella realtà
- Sistemi deterministici, ma impredicibili nel lungo termine

SISTEMI DINAMICI E CAOS (1)

Nel linguaggio di tutti i giorni:

CAOS = disordine

Nella teoria dei sistemi dinamici:

1. **particolare tipo di dinamica del sistema**
2. **biforcazione (improvviso cambio qualitativo nel comportamento del sistema)**
3. **dipendenza sensibile alle condizioni iniziali (SDCI)**
4. **presenza in natura**

SISTEMI DINAMICI E CAOS (2)

Un sistema dinamico è caotico se:

1. Deterministico
2. Le orbite sono limitate
3. Le orbite sono aperiodiche
4. Sensibile dipendenza alle condizioni iniziali

Verifica → Computer

UNIVERSALITA' (1)

- Ordine nel caos
- Sistemi diversi di comportano in modo uguale
- Mappe unimodali
- Gruppo di rinormalizzazione
- $\delta = 4.6692016090$

$R_1 \approx 3.0$: period 2
$R_2 \approx 3.44949$ period 4
$R_3 \approx 3.54409$ period 8
$R_4 \approx 3.564407$ period 16
$R_5 \approx 3.568759$ period 32

$R_\infty \approx 3.569946$ period ∞
(chaos)

$$\frac{R_2 - R_1}{R_3 - R_2} = \frac{3.44949 - 3.0}{3.54409 - 3.44949} = 4.75147992$$

$$\frac{R_3 - R_2}{R_4 - R_3} = \frac{3.54409 - 3.44949}{3.564407 - 3.54409} = 4.65619924$$

$$\frac{R_4 - R_3}{R_5 - R_4} = \frac{3.564407 - 3.54409}{3.568759 - 3.564407} = 4.66842831$$

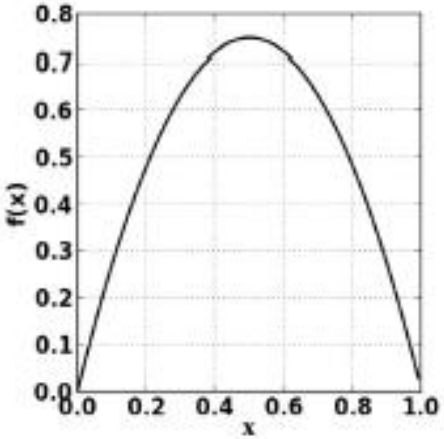
$$\vdots$$

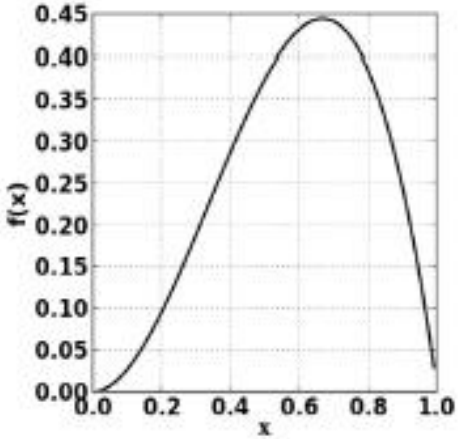
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+2} - R_{n+1}}\right) \approx 4.6692016....$$

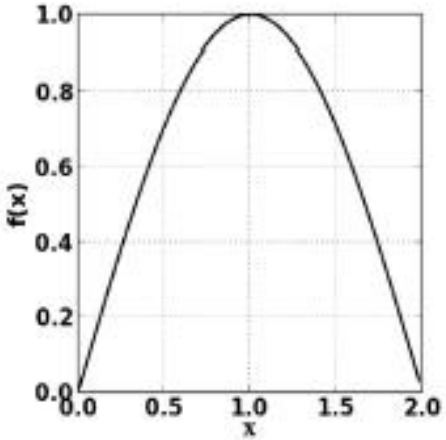
Mitchell J. Feigenbaum

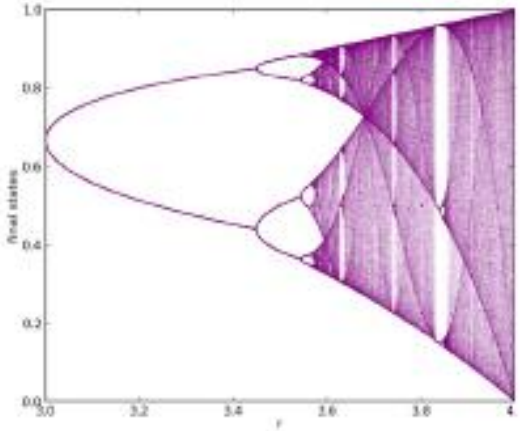
The universal metric properties of non-linear trasformations (1979)

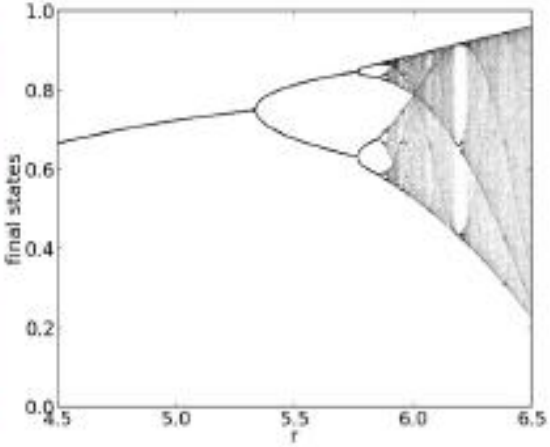
UNIVERSALITA' (2)

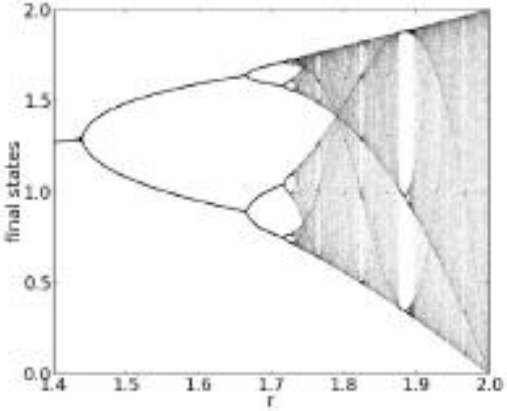






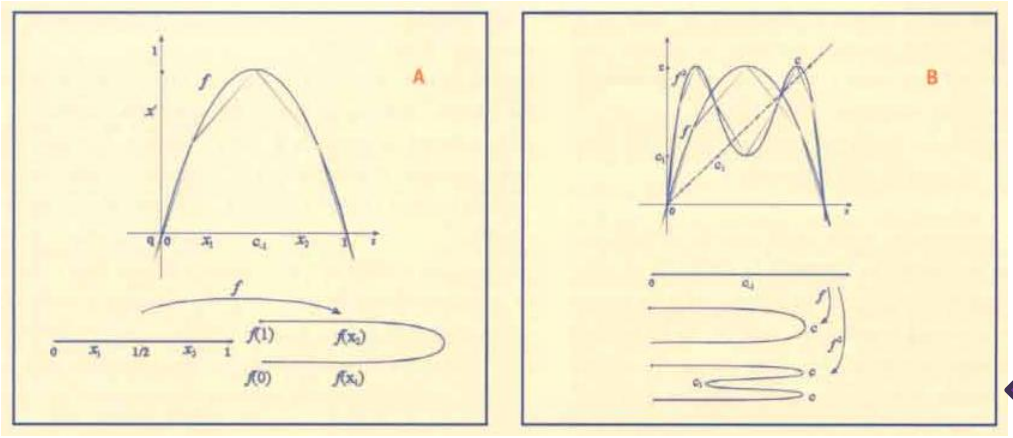






STRETCHING AND FOLDING

- Ingrediente geometrico principale che crea il CAOS
- Comportamento di una semplice equazione deterministica unidimensionale è simile a quello di sistemi fisici multidimensionali e complicati
- “stretching” produce SDIC
- “folding” mantiene le orbite limitate



RIASSUMENDO…

1. Comportamenti complessi e imprevedibili nascono da leggi deterministiche
2. La teoria dei sistemi dinamici fornisce un vocabolario per lo studio dei sistemi complessi
3. Limiti fondamentali nella predizione dettagliata del comportamento dei sistemi complessi
4. Proprietà universali dei sistemi caotici

L'IDEA DI DERIVATA

$$\frac{df}{dx}$$

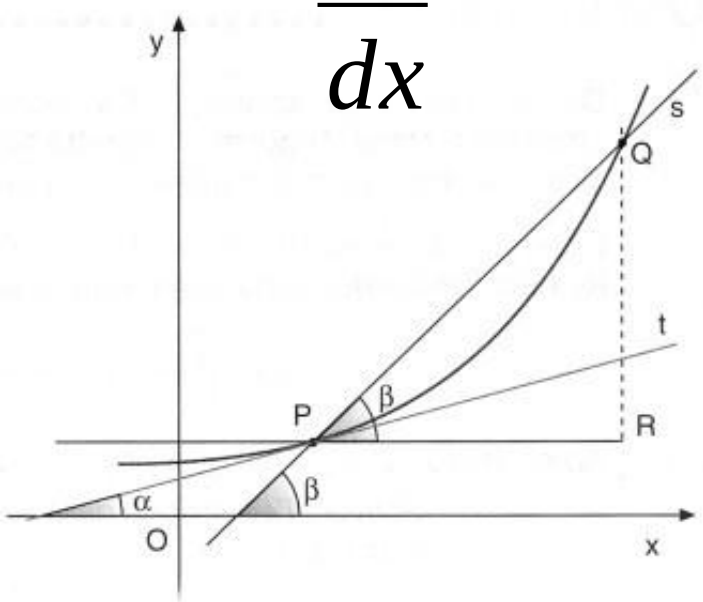


Figura 3

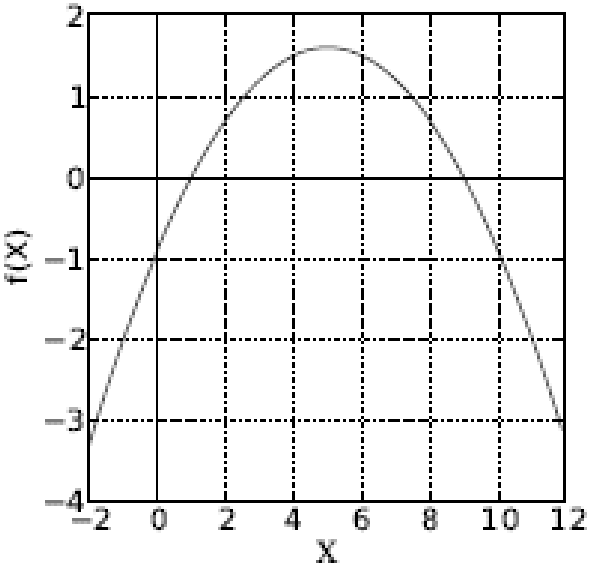
- Newton VS Leibnitz
- Indica la rapidità con la quale una funzione cresce o decresce al variare della varibile di riferimento
- Rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto considerato

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\frac{dX}{dt} = f(X)$$

- È un sistema dinamico a tempo continuo
- Rapidità con cui varia X è una funzione della X stessa
- Punti fissi si hanno dove non c'è variazione ($\frac{dX}{dt} = 0$)
- Metodi risolutivi:
  - Qualitativi (Poincaré)
  - Computazionali (metodo di Eulero)
  - Analitici

METODO QUALITATIVO



- Uso il grafico per trovare i punti fissi e la loro stabilità
- Disegno la PL
- Provo a rappresentare le soluzioni X(t) per diverse condizioni iniziali
- Non otterrò mai una soluzione esatta, ma solo una soluzione qualitativa
- Fornire un'idea generale del comportamento delle soluzioni

METODO COMPUTAZIONALE

Euler's Method for Solving $\frac{dX}{dt} = f(X), X(0) = x_0$

1. Choose a stepsize Δt. Set $t = 0$
2. Using the current value of X, the equation tells us rate of change: $\frac{dX}{dt} = f(X)$.
3. Use this rate of change to determine next value for X:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \left(\frac{dX}{dt} \times \Delta t\right) . \qquad (1)$$

4. Increase t by Δt: $t \longrightarrow t + \Delta t$.
5. Go to step 2

Choose smaller and smaller Δt until the solution curve $X(t)$ stops changing.

METODO ANALITICO

- Trovare una formula per la soluzione X(t) usando l'analisi
- La maggior parte delle equazioni differenziali non-lineari non possono essere risolte analiticamente
- Anche per quelle risolvibili analiticamente, quello che si ottiene non è rapidamente intuibile o comprensibile
- Forse c'è troppa enfasi sui metodi analitici nei libri

UN ESEMPIO TERMODINAMICO

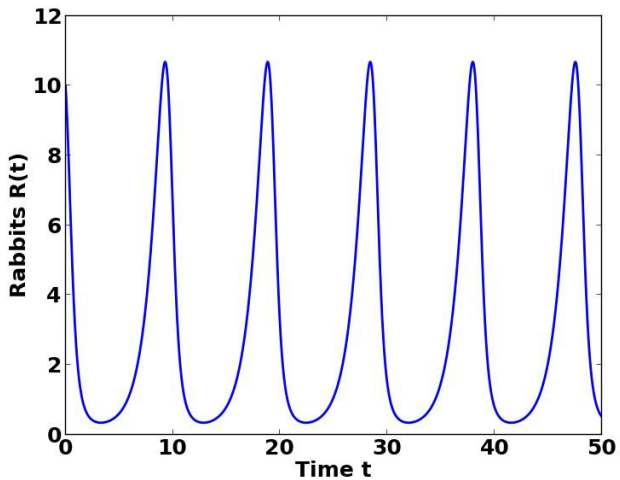
$$\frac{dT}{dt} = 0.2\left(20 - T\right)$$

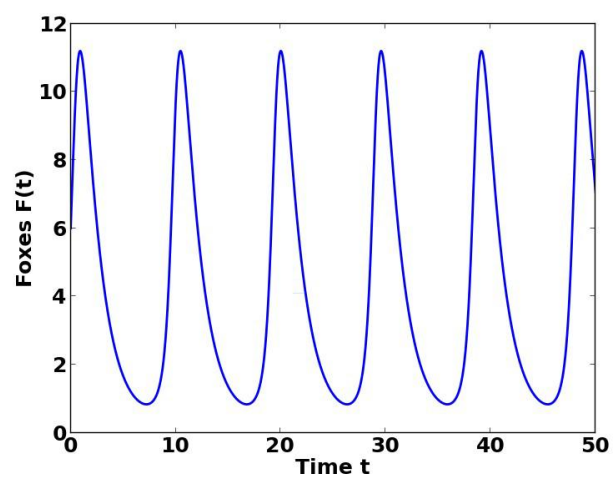
- Rapidità di riscaldamento è funzione della temperatura della birra ed è proporzionale alla differenza di temperatura tra la birra e l'ambiente
- Temperatura iniziale birra = 5°C
- Temperatura della stanza = 20°C
- Cosa accade?

EQUAZIONI DIFFERENZIALI 2-DIM

$$\frac{dR}{dt} = aR - bRF \ , \qquad \frac{dF}{dt} = cRF - dF$$

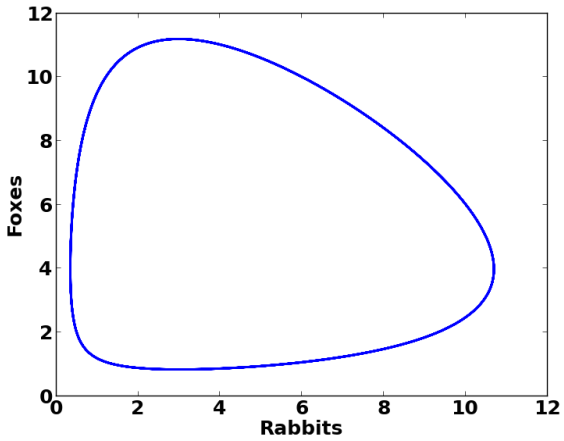
- Esempio più noto: equazioni di Lotka-Volterra
- Modello base dell'interazione predatori-prede

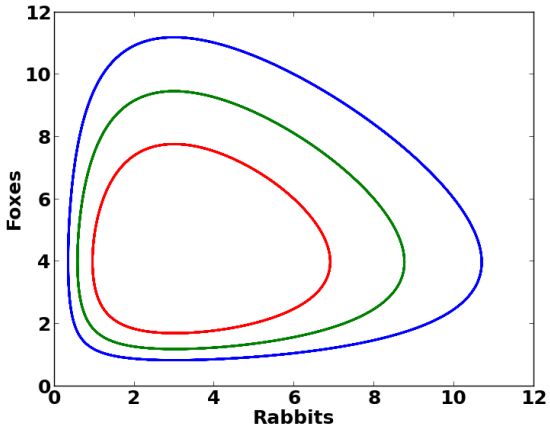


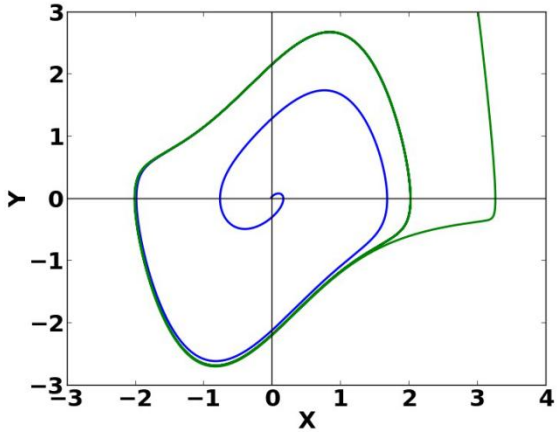


IL PHASE PLANE (PP)

- Rappresenta graficamente la relazione tra R e F
- Strumento analogo alla PL
- Spesso è utile per mostrare soluzioni differenti sullo stesso PP
- Fornisce una visione qualitativa delle caratteristiche delle equazioni differenziali







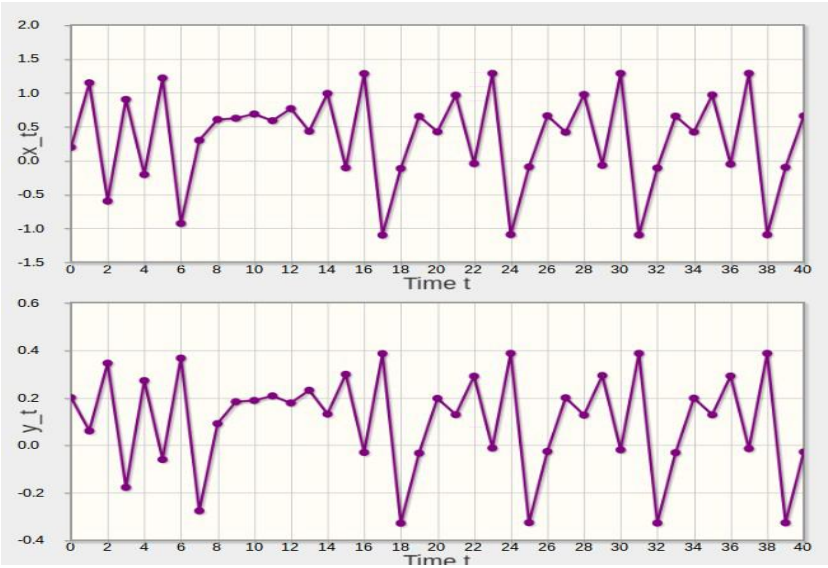
DETERMINISMO E CAOS NELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI 2-DIM

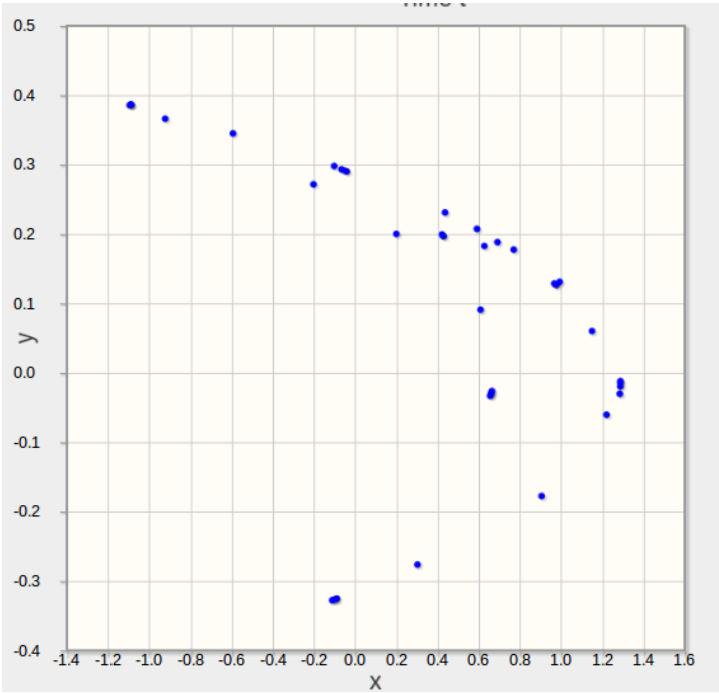
- Il sistema dinamico è deterministico
- Le condizioni iniziali e le equazioni differenziali individuano un cammino unico attraverso il PP
- Le curve sul PP non possono intersecarsi!
- L'impossibilità di intersezione delle curve limita i possibili comportamenti a lungo termine delle equazioni differenziali 2-dim
- Ci possono essere punti fissi stabili o instabili, tendenza verso l'infinito, cicli limite e comportamento ciclico attrattivo
- Il teorema di Poincaré-Bendixson: *"Orbite limitate e aperiodiche non sono possibili per equazioni differenziali 2-dim"*
- Non c'è caos!

FUNZIONI ITERATE 2-DIM

$$x_{n+1} = 1 + y_n - a x_n^2 \ , \qquad y_{n+1} = b x_n$$

- Esempio: la mappa di Henon
- Le mappe 2-dim sono simili alle mappe 1-dim
- Le orbite possono essere periodiche
- Le orbite possono essere caotiche

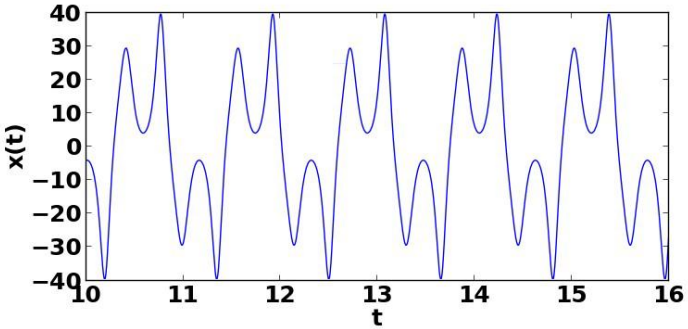


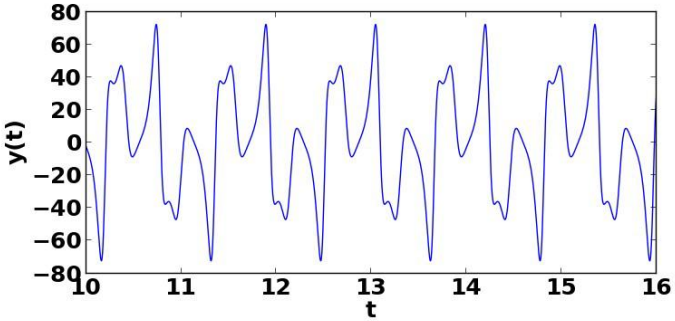


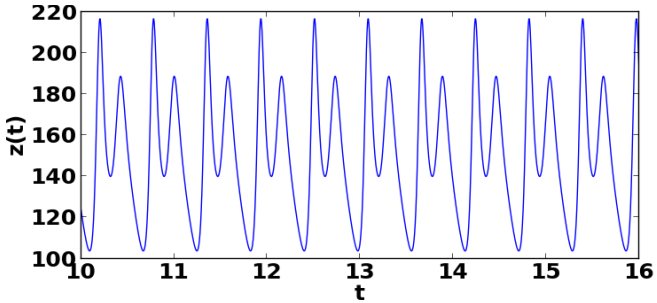
EQUAZIONI DIFFERENZIALI 3-DIM

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \qquad \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \qquad \frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

- Esempio: equazioni di Lorenz
- Modello semplificato di convezione atmosferica

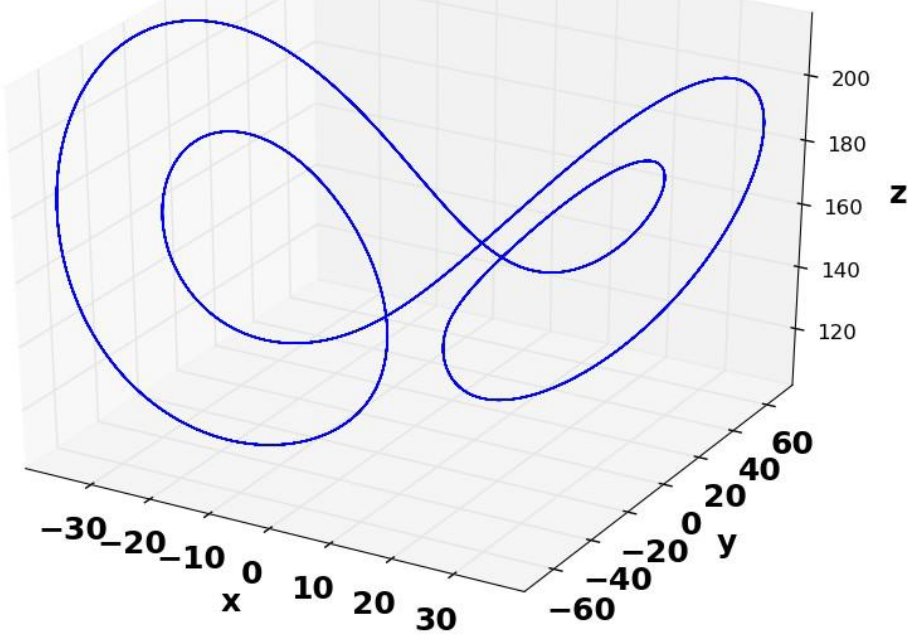






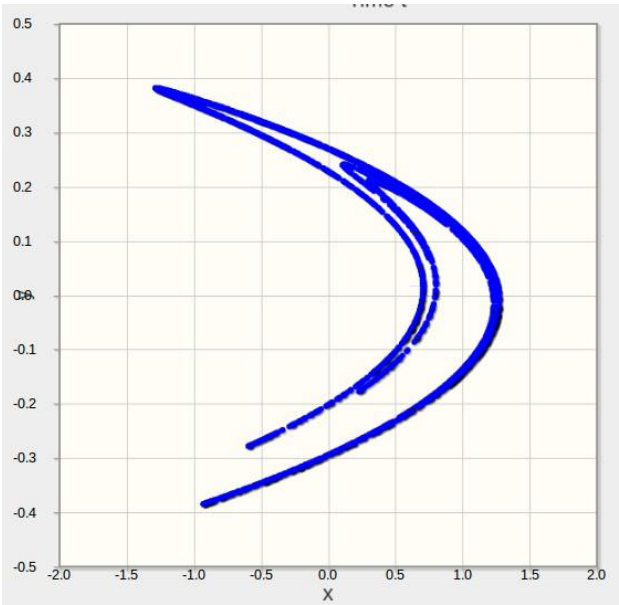
IL PHASE SPACE (PS)

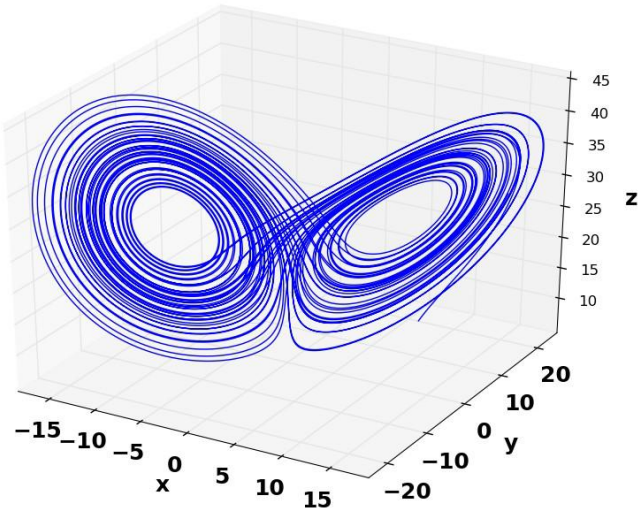
- Le curve nel PS non possono intersecarsi, ma possono passare sopra o sotto l'un l'altra
- Equazioni differenziali 3-dim ammettono comportamenti più complicati rispetto a quelle 2-dim
- Equazioni differenziali 3-dim possono essere caotiche

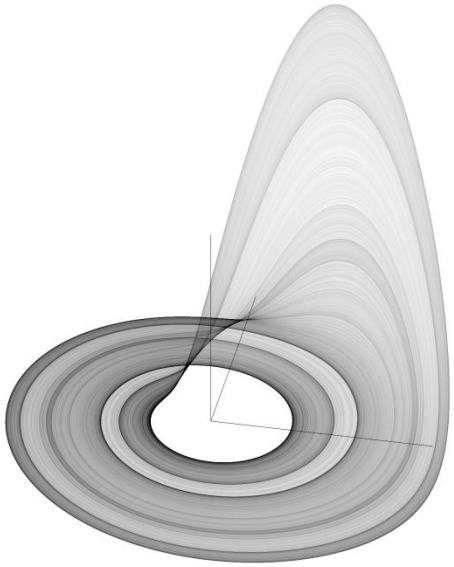


ATTRATTORI STRANI

- Strutture complesse nascono da semplici sistemi dinamici
- Il moto sull'attrattore è caotico, ma tutte le orbite vanno a cadere sull'attrattore
- Combina elementi di ordine e disordine
- Il moto è localmente instabile, ma globalmente stabile

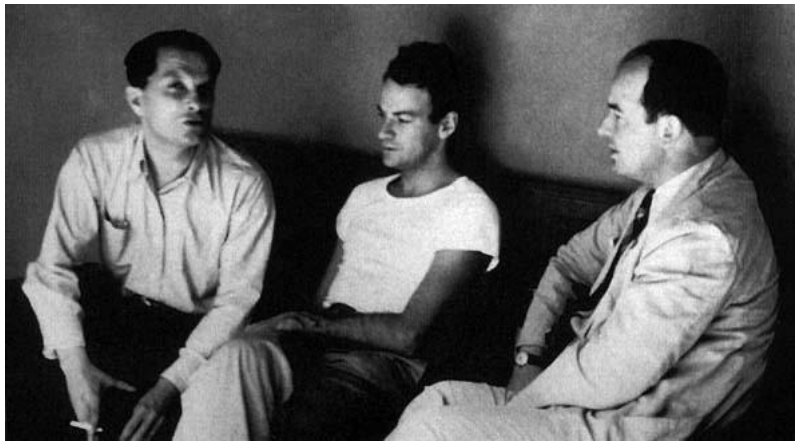


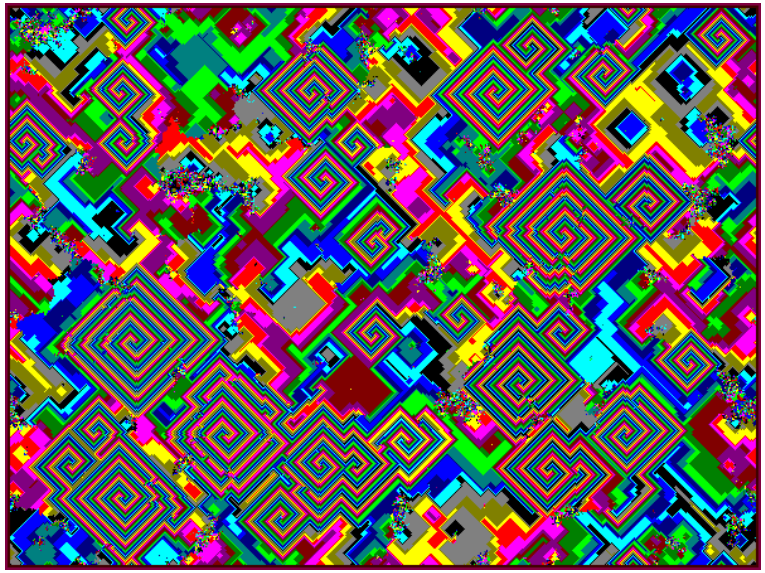




AUTOMI CELLULARI

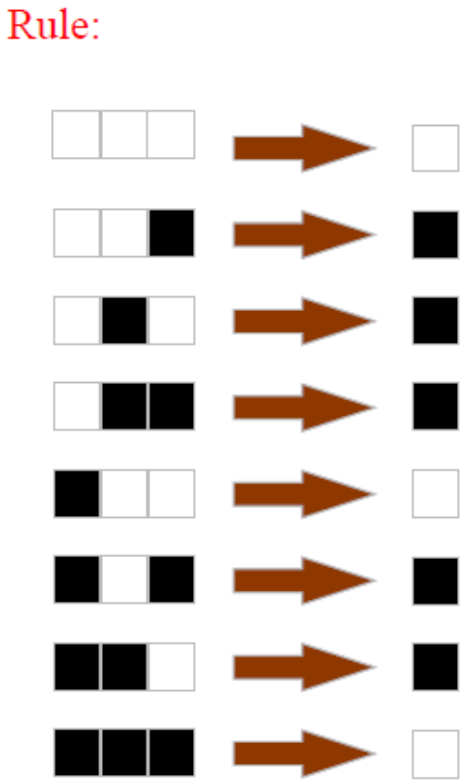
- Modelli idealizzati di sistemi complessi
  - Ampia rete di singole componenti
  - Comunicazione limitata tra le componenti
  - Nessun controllo centrale
  - Dinamica complessa a partire da regole semplici
  - Possibilità di processamento dell'informazione e di calcolo
  - Possono evolversi in Algoritmi Genetici
- Anni '40
  - Stanislaw Ulam (1909-1984)
  - John von Neumann (1903-1957)

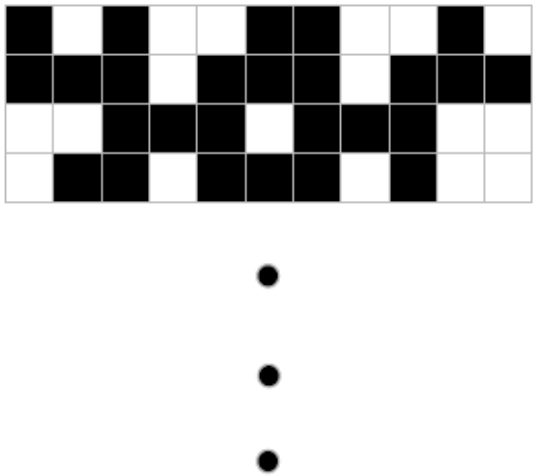




ELEMENTARY CA (1)

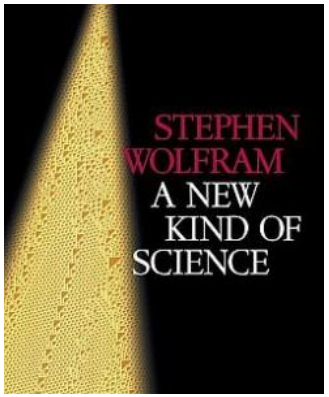
- Il più semplice modello di CA
- Unidimensionale a due stati (bianco e nero)

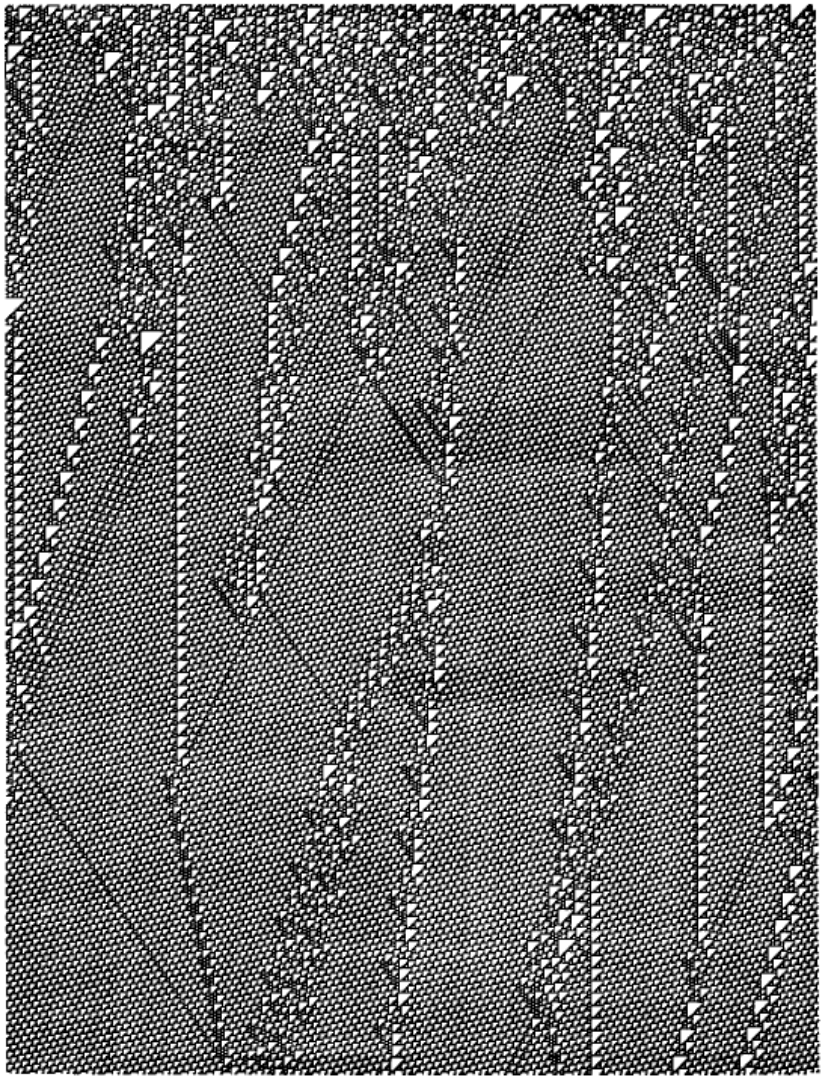




ELEMENTARY CA (2)

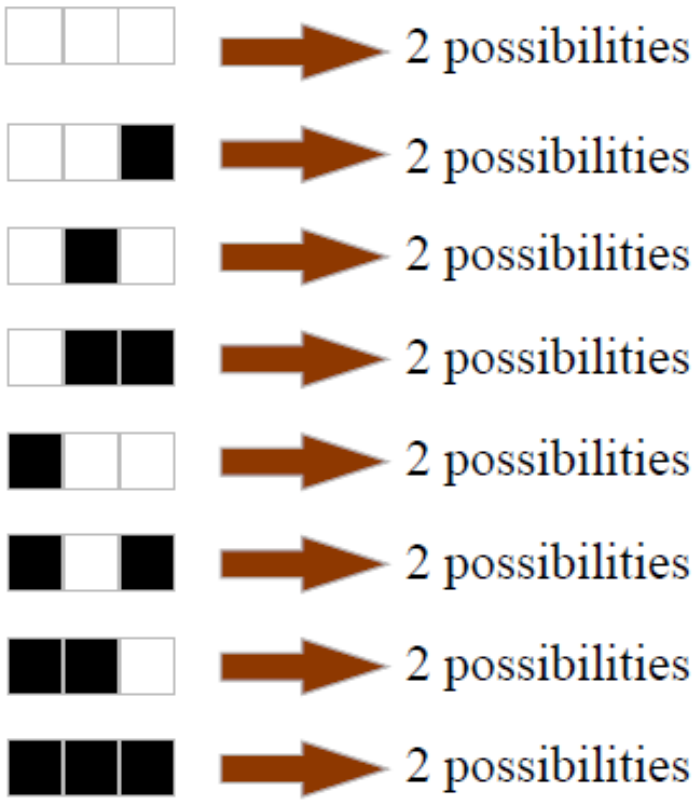
- Se generalizziamo a 200 celle e mettiamo in sequenza i vari step, l'immagine che ne risulta mostra delle regolarità difficili da descrivere!
- Mostra nel dettaglio la complessità che ne emerge
- *"A new kind of science"* di Stephen Wolfram (2002)





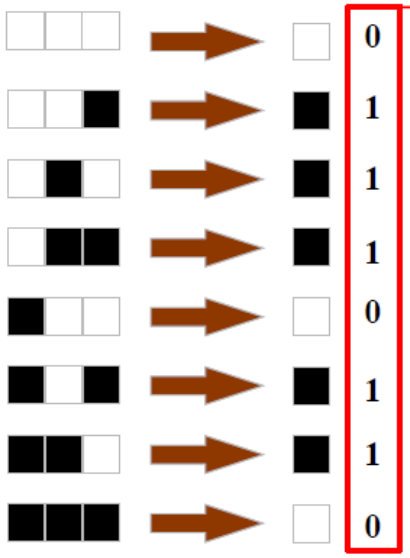
RISULTATI WOLFRAM SU ECA (1)

- Scegliere una configurazione di bianco e nero nella colonna di destra
- Associare ad ogni ECA generato un numero in codice (0=nero, 1=bianco)
- Il codice ottenuto si chiama **numero di Wolfram**



Total: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$
= 256 possible ECAs

RISULTATI WOLFRAM SU ECA (2)

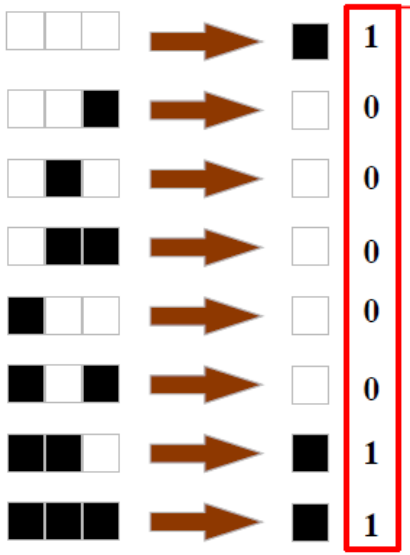


0 1 1 0 1 1 1 0

Interpret this as an integer in base 2:

$$(0\times 2^7)+(1\times 2^6)+(1\times 2^5)+(0\times 2^4)$$
$$+(1\times 2^3)+(1\times 2^2)+(1\times 2^1)+(0\times 2^0)$$
$$=110$$

"Rule 110"



1 1 0 0 0 0 0 1

Interpret this as an integer in base 2:

$$(1\times 2^7)+(1\times 2^6)+(0\times 2^5)+(0\times 2^4)$$
$$+(0\times 2^3)+(0\times 2^2)+(0\times 2^1)+(1\times 2^0)$$
$$=128+64+1=193$$

"Rule 193"

RISULTATI WOLFRAM SU ECA (3)

“The Rule 30 automaton is the most surprising thing I’ve ever seen in science....It took me several years to absorb how important this was. But in the end, I realized that this one picture contains the clue to what’s perhaps the most long-standing mystery in all of science: where, in the end, the complexity of the natural world comes from.”

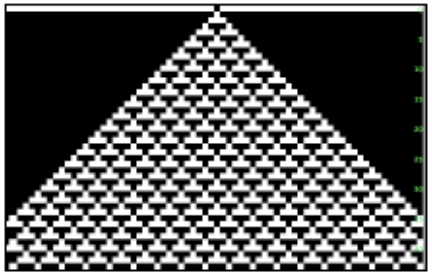
Stephen Wolfram (Quoted in *Forbes)*

Wolfram registrò il brevetto della Regola 30 per usarla come generatore di numeri pseudo-random!

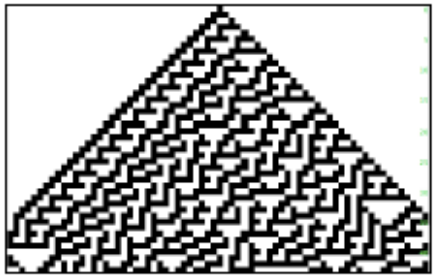
LE 4 CLASSI DI WOLFRAM

Wolfram classificò il comportamento degli ECA in 4 classi:

Class 1: Almost all initial configurations relax after a transient period to the same fixed configuration.



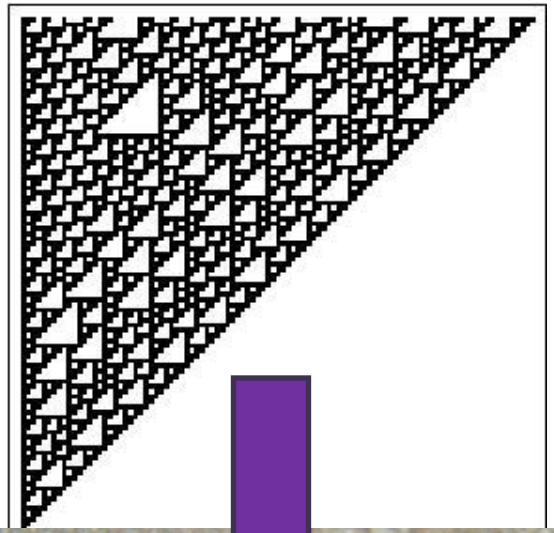
Class 2: Almost all initial configurations relax after a transient period to some fixed point or some periodic cycle of configurations, but which one depends on the initial configuration

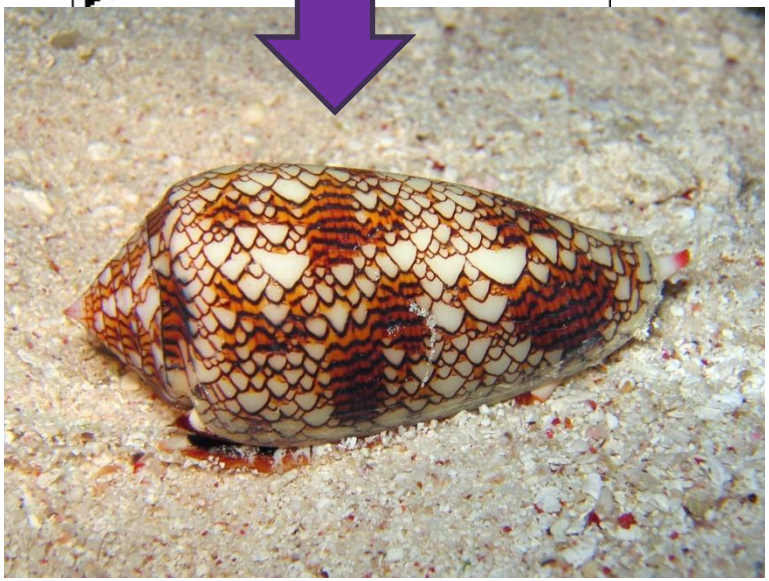


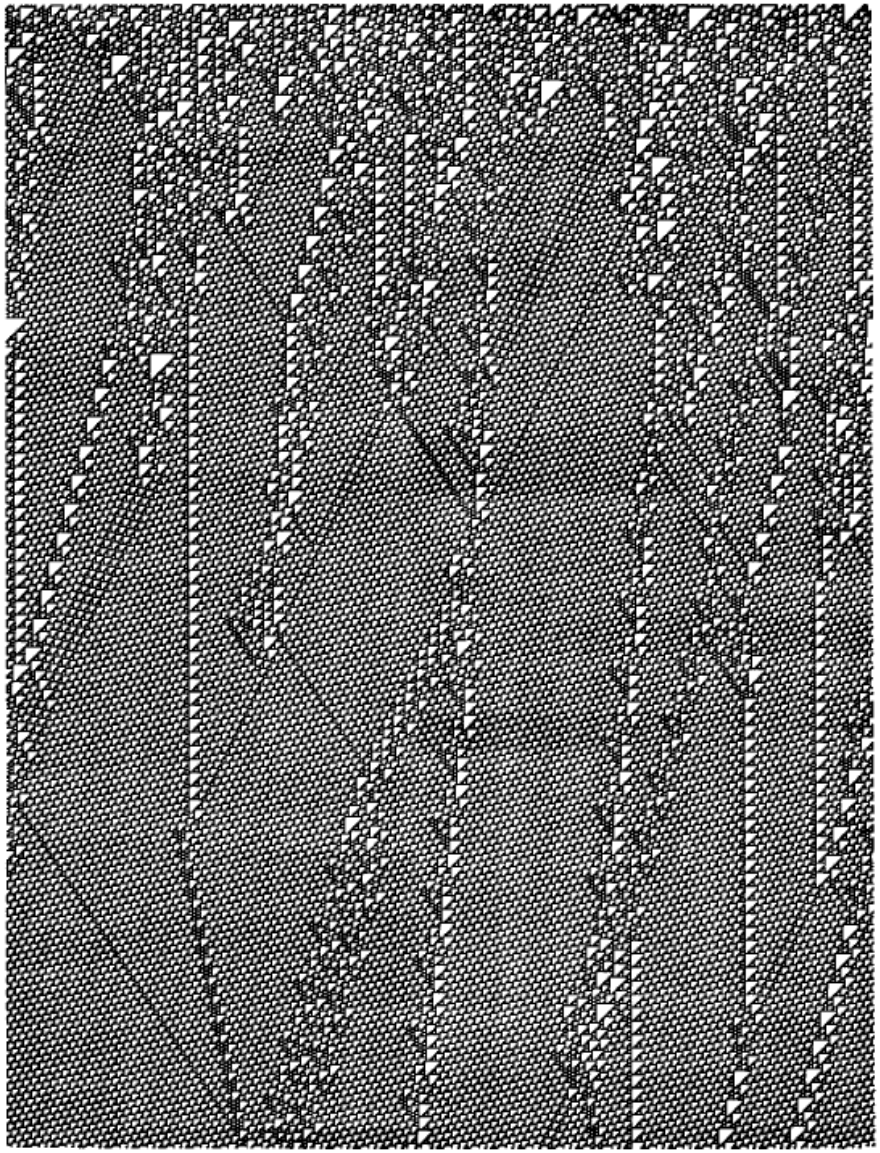
Class 3: Almost all initial configurations relax after a transient period to chaotic behavior. (The term ``chaotic'' here refers to apparently unpredictable space-time behavior.)

Class 4: Some initial configurations result in complex localized structures, sometimes long-lived.

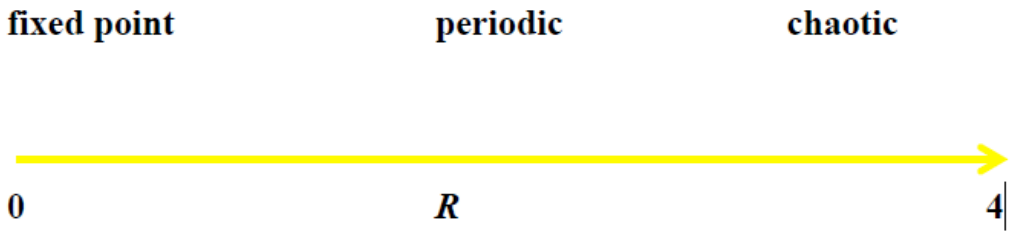
“STRANE” ANALOGIE







MAPPA LOGISTICA E ECA

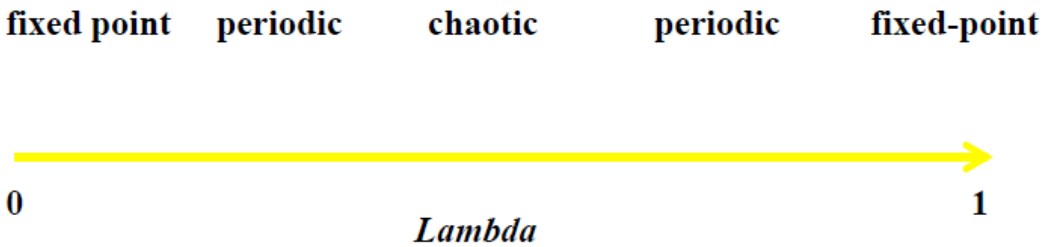


MAPPA LOGISTICA

- $x_{t+1} = f(x_t)$
- Deterministica
- Tempo discreto
- "stato" continuo (il valore della x è un numero reale)
- punto fisso, periodico, caos
- Parametro di controllo R

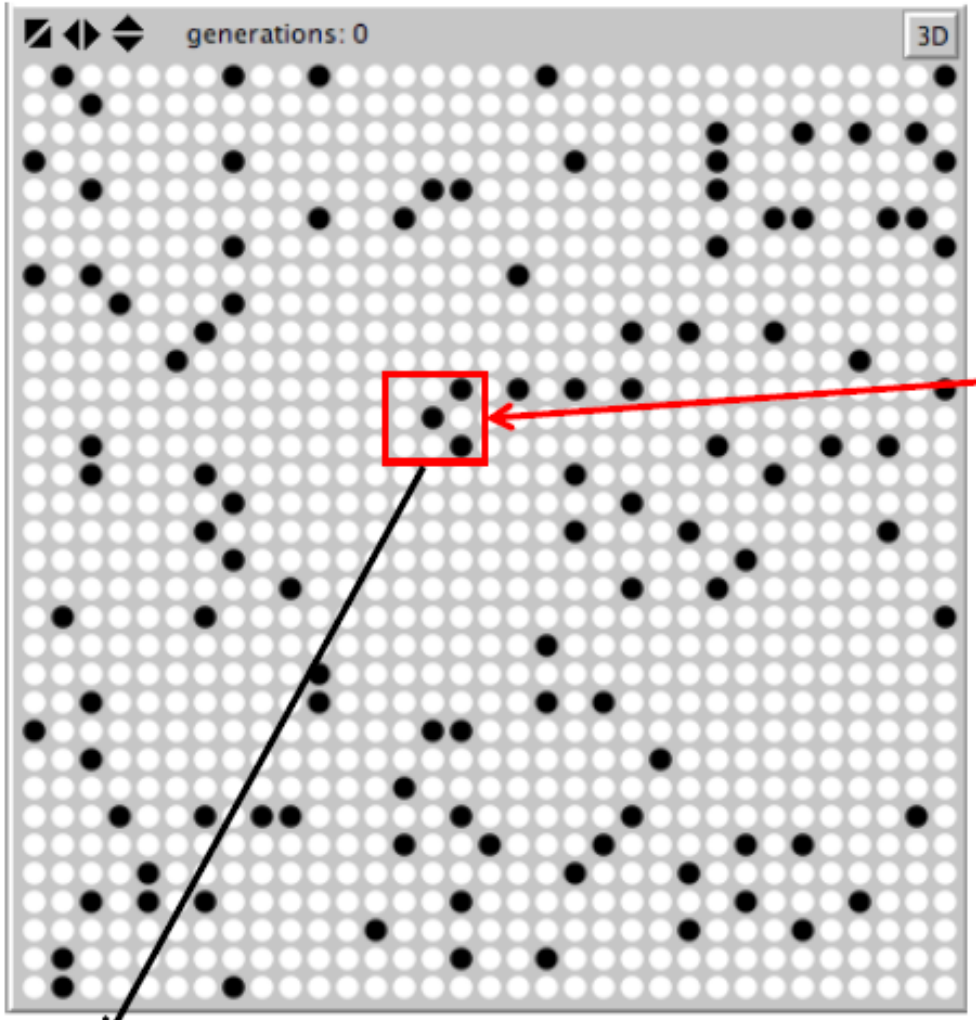
AUTOMA CELLULARE ELEMENTARE

- Lattice(t+1) = f (lattice(t)) dove f = regola ECA
- Deterministica
- Tempo discreto
- "stato" discreto (il valore della stringa è una sequenza di bianco e nero
- Punto fisso, periodico, caos
- Parametro di controllo λ



IL GIOCO DELLA VITA

- “The Game of Life” è il CA più famoso del mondo
- Non è realmente un gioco
- Inventato dal matematico britannico John Conway
- Pubblicato nel 1970 in *Scientific American* nella rubrica *“Mathematical Games”* di Martin Gardner
- “Life” è inspirato dai modelli di von Neumann di processi life-like nei CA
- Sistemi semplici mostrano comportamenti emergenti e auto-organizzazione



Black cell = "alive"
White cell = "dead"

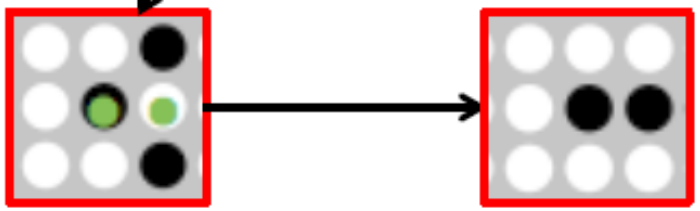
Neighborhood of a cell:
cell itself + 8 neighbors

"World" wraps around
at the edges (in this version)

Rules:

- A living cell remains alive on the next time step only if two or three neighbors are alive. Otherwise it dies.

- A dead cell becomes alive on the next step only if exactly three neighbors are alive.



RIASSUMENDO…

- I CA possono essere visti come sistemi dinamici con differenti attrattori (punti fissi, periodici, caotici, “margini del caos”)
- Questi corrispondono alle 4 classi di Wolfram
- Il λ di Langton è un “parametro di controllo” che indica quale tipo di attrattore aspettarsi
- The Game of Life è un CA di classe 4!
- Wolfram ipotizzò che i CA di classe 4 sono capaci di “computazione universale”