I paradossi di Zenone

Carlo Toffalori (Camerino)
Civitanova Marche, 18 febbraio 2020

Zenone di Elea: discepolo di Parmenide, nega la possibilità del moto

Platone, *Parmenide*, l'incontro con Socrate
"Parmenide era già molto vecchio e assai canuto, ma bello e nobile d'aspetto, all'incirca sui sessantacinque anni. Zenone invece era allora vicino ai quaranta, di notevole statura e gradevole a vedersi…"

I quattro ***paradossi***: contro movimento, molteplicità, mutabilità.

Aristotele, *Fisica*, VI 9, 239b
"Quattro sono gli argomenti di Zenone intorno al movimento che offrono difficoltà di soluzione. Primo, quello sulla inesistenza del movimento per la ragione che il mosso deve giungere prima alla metà che non al termine."

"Il secondo argomento di Zenone è quello chiamato di Achille. Ragiona che il più lento non sarà raggiunto dal più veloce perché l'inseguitore deve passare per il luogo che l'inseguito ha appena abbandonato, di modo che il più lento ha sempre un certo vantaggio."

Seguono i paradossi della freccia e dei corridori nello stadio.

Il paradosso della freccia: *"Il terzo è* […] *che la freccia, nell'atto in cui è spostata, sta ferma. Ma questa conclusione si ottiene solo se si considera il tempo come composto da istanti."*

Istante per istante la freccia è immobile. Come possono infinite immobilità generare un movimento?

Il paradosso dei corridori nello stadio: *"Il quarto è quello delle masse uguali che si muovono nello stadio in senso contrario a quello di altre* *masse uguali, le une dalla fine dello stadio, le altre dal mezzo, con uguale velocità. E con questo ragionamento* [Zenone] *crede nel risultato che la metà del tempo sia uguale al suo doppio.”*

La velocità relativa e la velocità assoluta…

A proposito di Achille e della tartaruga

Jorge Luis Borges, *Discussione*, *Metempsicosi della tartaruga*
“Mi piacerebbe conoscere il nome del poeta che lo dotò [l’argomento] *di un eroe e di una tartaruga”*

Ancora Borges: il fascino insidioso (e perverso?) dell’infinito

- *Discussione*, *La perpetua corsa di Achille e della tartaruga*
  “[...] infinito, parola (e poi concetto) di spavento che abbiamo generato temerariamente e che una volta ammessa in un pensiero esplode e lo uccide.”
- *Discussione*, *Metempsicosi della tartaruga*
  “C’è un concetto che corrompe e fa ammattire gli altri. Non parlo del Male il cui limitato impero è l’etica: parlo dell’infinito.”

Sempre Borges, *Discussione*, *La perpetua corsa di Achille e della tartaruga*
“Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille il millimetro, la tartaruga un decimo di millimetro, e così all’infinito; di modo che Achille non può correre per sempre senza raggiungerla.”

Tentativi di soluzione: molteplici e sottili (B. Russell, *Misticismo e logica*, *La matematica e i metafisici*: *“Zenone affrontava 3 problemi più astratti del moto: gli* ***infinitesimi,*** *l’****infinito,*** *la* ***continuità****”*)

Diogene, IV secolo a. C. (riferito da Kierkegaard, *La ripetizione*, vedi anche Hegel, *Lezioni sulla storia della filosofia*): *"Visto che gli Eleati negavano il movimento, intervenne Diogene nel suo ruolo di oppositore [...] Non disse una parola, ma camminò semplicemente avanti e indietro due o tre volte, col che stimò di averli confutati a sufficienza"*

Aristotele *"confuta Zenone con brevità quasi sdegnosa"* (Borges)

- infinito in potenza e infinito in atto
- infinitamente divisibile ≠ infinito o eterno

Anche L. Tolstoj, *Guerra e pace*
*"È noto il così detto sofisma degli antichi consistente in questo, che Achille non raggiungerà mai la tartaruga, la quale cammina davanti a lui, nonostante che Achille vada 10 volte più in fretta della tartaruga. [...] L'assurdità della situazione scaturiva dal fatto che si ammettevano arbitrariamente delle unità dis**continue** di moto, mentre il movimento sia di Achille sia della tartaruga avveniva **senza interruzione**.*
Prendendo unità di moto sempre più piccole, ci avviciniamo soltanto alla soluzione del quesito, ma non la raggiungiamo mai. Solo ammettendo una grandezza infinitamente piccola" e sommando una progressione infinita *"noi raggiungiamo la soluzione."*

Da confrontare con Borges
"Basta fissare la velocità di Achille a un metro al secondo, per stabilire il tempo di cui ha bisogno

$$10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10000 + \ldots$$

***Il limite della somma di questa progressione geometrica è dodici**, ma non viene mai raggiunto. Cioè, il tragitto dell'eroe sarà infinito e questi correrà per sempre, ma il suo percorso si esaurirà prima di dodici metri, e la sua eternità non vedrà il termine di dodici secondi. Questa dissoluzione metodica, questa illimitata caduta in precipizi sempre più minuscoli, non è in realtà ostile al problema: è immaginarselo bene."*

Spiegazioni matematiche: somme infinite

S = spazio percorso dalla tartaruga
$= 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n} + \ldots$
S' = spazio percorso da Achille

$= 10 + 1 \ + \ 10^{-1} + 10^{-2} + \ \ldots + 10^{-n} + \ \ldots$

Due somme di infiniti addendi: la seconda si ottiene dalla prima moltiplicando per 10

$$S' \ = \ 10\, S$$

Sottraendo l'una dall'altra

$$9S \ = \ 10\, S - S \ = \ S' - S \ = \ 10$$

da cui

$$S \ = \frac{10}{9}, \qquad S' = \ S \ + \ 10 \ = \frac{10}{9} + \ 10 \ = \mathbf{\frac{100}{9}} \neq \mathbf{12}$$

Quando la tartaruga ha percorso 10/9 di un metro, Achille la raggiunge. La cosa avviene dopo 10/9 secondi se assumiamo che Achille corra alla velocità di 1 metro al secondo, e la tartaruga proceda 1 decimetro al secondo.

Da notare: l'argomento resta valido per serie geometriche $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ di ragione q con $0 \ < \ q \ < \ 1$. Nel nostro caso $q \ = \ 1/10$.

In generale in Zenone, se per q si intende il rapporto delle due velocità della tartaruga e di Achille, si ha appunto $0 \ < \ q \ < \ 1$:

- $q \ > \ 0$ significa che la tartaruga si muove (semmai $q \ = \ 0$ corrisponde al caso di una tartaruga immobile e quindi al primo paradosso di Zenone)
- $q \ < \ 1$ se assumiamo che Achille sia più veloce.

Inoltre $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$. Comunque necessario: calcolo di ***somme infinite***.

Esempi (la serie geometrica)

- $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ diverge (le somme parziali $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n$ tendono a $+\infty$). Idem se 1 è sostituito da ogni valore positivo, come 1/2 .

- Per $q \geq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ diverge (per le somme parziali si ha $1 + q + q^2 + \cdots + q^n \geq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n$). Infatti per $q \geq 1$ le potenze q^n crescono con *n* e sono tutte ≥ 1.

- Eppure… per $q = 2$, consideriamo la somma di infiniti addensi positivi $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n + \cdots$. Moltiplicando ambo i membri per 2, otteniamo
$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1$$
dunque
$$S = -1.$$
Ma come può una somma di addendi positivi risultare negativa? La necessità di una teoria rigorosa e non troppo disinvolta…
- (*Guido Grandi*) Per $q = -1$, $1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n + \cdots = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ ha somme parziali che valgono alternativamente 1 (per n pari) e 0 (per n dispari). Quale può essere il limite?

Torniamo alla serie geometrica con $0 < q < 1$.

Jorge Luis Borges, *Discussione*, *L'eterna corsa di Achille e della tartaruga*
"Ci sono altri moniti antichi contro il commercio di una parola tanto perfida [l'infinito]*: c'è la leggenda cinese dello scettro dei re di Liang, che diminuiva di una metà ad ogni nuovo re; lo scettro, mutilato da dinastie, esiste ancora".*

Appunto: per n che varia tra i numeri naturali, la successione $1/2^n$
- è decrescente,
- converge a 0,
- ha termini tutti positivi (e minori di 1).

Idem se $1/2$ è sostituito da un qualsiasi q con $0 < q < 1$.

Attenzione! Una successione a_n (n naturale)
- decrescente,
- convergente a 0,
- a termini positivi

non determina necessariamente una serie convergente a somma finita.

La ***serie armonica*** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ (n intero positivo) ammette addendi $\frac{1}{n}$ che sono positivi ma decrescono con n e tendono a 0. Tuttavia

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots>$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\quad\frac{2}{4}\quad+\qquad\frac{4}{8}\qquad+\qquad\frac{8}{16}\qquad+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\quad\frac{1}{2}\quad+\qquad\frac{1}{2}\qquad+\qquad\frac{1}{2}\qquad+\cdots$$

Nel caso della **serie geometrica** di ragione q, vale per ogni n

$$(1-q)\ \times\ (1+q+q^2+\cdots+q^n)=$$

$$\begin{aligned}=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n&\\ -q-q^2-q^3-\cdots-q^n-q^{n+1}&=\end{aligned}$$

$$=1-q^{n-1}$$

per cui la somma parziale n-ma vale

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

e, per n che tende all'infinito, converge al valore finito $\frac{1}{1-q}$,

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots=\frac{1}{1-q}\ .$$

Casi particolari

- Per $q = \frac{1}{10}$ (Achille e la tartaruga),

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

- Per $q = \frac{1}{2}$ (il mobile),

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Un'altra spiegazione matematica: Bertrand Russell, *Misticismo e logica e altri saggi*

- *La matematica e i metafisici*, 1901 (con rettifiche del 1917)
- *Lo studio della matematica*, 1902 (pubblicato nel 1907)

Si celebra il ruolo di ***Karl Weierstrass*** (con Dedekind e Cantor) nella definizione di numero reale, nel chiarimento del concetto di continuo, nell'aritmetizzazione dell'analisi e nella determinazione di un calcolo differenziale rigoroso

Spazio e tempo come ***continui*** di punti o istanti, non come ***sequenze discrete***: i numeri reali al posto degli interi.

Intermezzo: un aneddoto dalla vita di Leibniz (uno dei padri del calcolo infinitesimale). Russell riferisce

- *"come Leibniz parlasse alla regina Sofia Carlotta di Prussia dell'infinitamente piccolo"*
- *"come ella replicasse che in proposito non aveva niente da imparare: il comportamento dei suoi cortigiani l'aveva pienamente familiarizzata con l'argomento"*.

Laurence Sterne, *Vita e opinioni di Tristram Shandy, gentiluomo*

- Un'autobiografia da scrivere
- Due anni per raccontare i primi due giorni di vita
- La rincorsa di Tristram Shandy a se stesso (come Achille e la tartaruga)

Bertrand Russell, *Misticismo e logica*, *La matematica e i metafisici*

Se Shandy fosse stato eterno *"nessuna parte della biografia sarebbe rimasta non scritta. Infatti: nel centesimo anno avrebbe descritto il centesimo giorno, nel millesimo anno il millesimo giorno, e così via"*.

Allo stesso modo *"la tartaruga, se le concedete del tempo, andrà altrettanto lontano di Achille."*

Come Russell spiega il paradosso di Achille e della tartaruga

- *"Se [...] Achille acchiappasse la tartaruga, i luoghi in cui la tartaruga è stata sarebbero soltanto una parte dei luoghi in cui è stato Achille"*
- *"Ma abbiamo visto che, in ogni periodo, egli deve stato esattamente in altrettanti luoghi della tartaruga"*.

Da superare: il classico principio che ***il tutto è maggiore delle sue parti***. Ma così succede tra i numeri transfiniti di Cantor, per esempio nel continuo $2^{\aleph_0}$, e il tempo è continuo e non discreto.

Un'escursione nell'infinito secondo Cantor: aggiungere 1 fa differenza

- per ogni numero naturale n (che è sempre diverso dal suo successore $n + 1$);
- non più all'infinito (l'***albergo di Hilbert***): già il primo numero cardinale transfinito $\aleph_0$ (numerabile) coincide con $\aleph_0 + 1$

Notevole: Cantor rifiuta gli infinitesimi (che altri, da Giuseppe Veronese ad Abraham Robinson, introducono).

Ma la matematica coglie realmente la provocazione di Zenone? L'argomento mantiene una grande fortuna letteraria anche dopo la metà dell'ottocento

Søren Kierkegaard (da Borges, *Altre inquisizioni*, *Kafka e i suoi precursori*)
"I parroci danesi dichiarano dai pulpiti che partecipare alle spedizioni [al Polo Nord] *conviene alla salvezza eterna dell'anima. Ammettono, tuttavia, che arrivare al Polo è difficile e forse impossibile e che non tutti possono*

cimentarsi in tale impresa. Finalmente, annunciano che qualsiasi viaggio – dalla Danimarca a Londra, ad esempio, nel vapore di linea, – o una passeggiata domenicale in vettura di piazza, sono, a guardar bene, vere spedizioni al Polo Nord." [Cristianesimo e cristianità…]

Franz Kafka

Borges, *Altre inquisizioni, Kafka e i suoi precursori*
"La forma di questo illustre problema è, esattamente, quella del Castello… Achille è tra i primi personaggi kafkiani della letteratura"

Il *Castello* e l'agrimensore K.

Altri racconti …

- *Una confusione quotidiana* (due vicini che si rincorrono inutilmente: più che l'impossibilità del moto, l'incomunicabilità e l'incapacità di incontro)
- *Un messaggio dell'imperatore*: *"L'imperatore – così si racconta – ha inviato a te, a un singolo, a un misero suddito, minima ombra sperduta nella più lontana delle lontananze dal sole imperiale, proprio a te l'imperatore ha inviato un messaggio dal suo letto di morte."*
- *Il prossimo villaggio* (lo spazio di tempo per arrivare a cavallo al villaggio vicino)
- *La costruzione della grande muraglia cinese*
  Borges, *Prologhi, Kafka: La metamorfosi*
  "Per arrestare l'avvicinarsi di eserciti infinitamente lontani, un imperatore infinitamente remoto nel tempo e nello spazio comanda che infinite generazioni costruiscano una muraglia infinita che circoscriva il suo infinito impero".

E ancora: *Davanti alla legge* (*Il processo*)

Carlo Emilio Gadda, ***Il primo libro delle favole***: *"Ma la tortuca, in fra tanto, avacciò di chel vantaggio un millesimo. Achille fece il millesimo. Ma la Tortuca, in fra tanto, avacciò un millesimo di chel millesimo. Mai dunque poté chiapparla: e ancor oggi e' fuggano."*

Italo Calvino, ***Ti con zero***

Dino Buzzati, ***I sette messaggeri***

Paul Valery, *Le cimitière marin (Il cimitero marino)*, 1920

"Crudel Zenone, Zenone eleata!
M'hai trafitto con questa freccia alata
Che vibra, vola, e che non vola affatto!
Al suo scoccar son nato, e già m'uccide!
Ombra di tartaruga, il sole irride
L'anima-Achille, ferma nello scatto!*"*

Una versione della fisica moderna: l'effetto Zenone quantistico

Il principio di indeterminazione di Heisenberg (1927): in meccanica quantistica, impensabile misurare assieme con esattezza la posizione e la velocità di una particella
Ogni tentativo di misura altera il fenomeno e rallenta la particella osservata

B. Misra – E. Sudarshan, 1977 (ma anche *Turing*): una particella troppo osservata non evolve (come la freccia di Zenone)

Varie conferme sperimentali, ma… *Kirizki-Kofman*, 2000

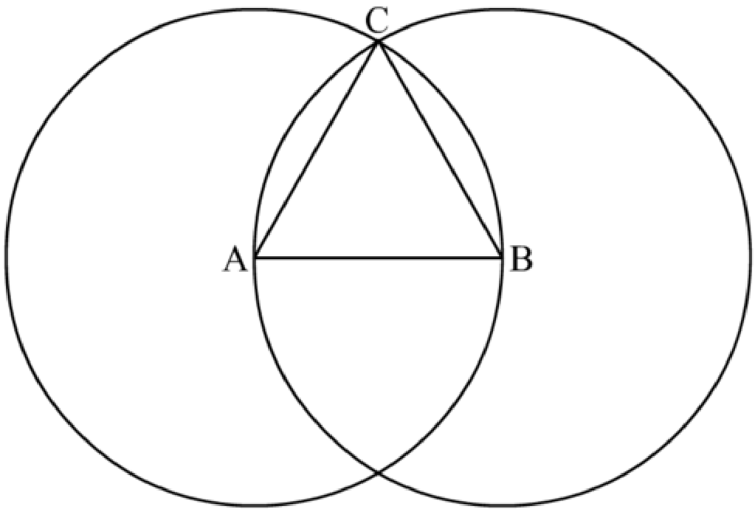
- Vale solo per una classe molto ristretta di decadimenti quantistici
- *L'effetto anti-Zenone*: accelerazione del decadimento del sistema osservato

Varianti matematiche: per cominciare Lewis Carroll, *Quel che la tartaruga disse ad Achille*, *Mind*, 1895

La trasposizione degli argomenti di Zenone al mondo dei ragionamenti

- da percorrere: un sillogismo logico,
- il punto di partenza: la premessa,
- l'irraggiungibile punto di arrivo: la conclusione.

Abbandonata la loro inconcludente rincorsa, Achille e la tartaruga prendono a discutere della *"prima proposizione di Euclide"*: la costruzione di un triangolo rettangolo di lato assegnato AB.



La costruzione

- Si tracciano le circonferenze con raggio AB e centro A, B rispettivamente.
- Si considera uno C dei punti di intersezione (*un passaggio controverso*).
- Si osserva che AC è raggio della prima circonferenza, e quindi uguale ad AB.
- Allo stesso modo BC è raggio della seconda circonferenza, e come tale ancora uguale ad AB.
- Si conclude che AC e BC, in quanto uguali ad AB, sono uguali tra loro.

La tartaruga e Achille discutono il sillogismo finale

a) due cose uguali a una terza sono uguali tra loro;
b) i due segmenti AC e BC sono uguali ad AB;
z) i due segmenti AC e BC sono uguali tra loro.

La tartaruga accetta le premesse a e b, ma nega che da sole giustifichino la conclusione. Sottolinea la necessità di interporre una proposizione ipotetica:

a) due cose uguali a una terza sono uguali tra loro;
b) i due segmenti AC e BC sono uguali ad AB;
c) se a e b sono valide, z è valida;
z) i due segmenti AC e BC sono uguali tra loro.

Ma a questo punto la tartaruga dichiara di accettare la validità di a, b e c, ma non di z. Achille interpola:

d) se a, b e c, sono valide, z è valida.

Il gioco prosegue senza fine: *"Alcuni mesi più tardi [...] Achille era ancora seduto sul guscio della paziente tartaruga e scriveva sul taccuino, che sembrava tutto riempito."*

A proposito di Lewis Carroll: *Una storia intricata* (con le illustrazioni di Arthur B. Frost), 1895. Tra i personaggi ***Balbus***: come Carroll è balbuziente, ama la matematica, ha il gusto dell'assurdo, è malinconico e solitario

Il saggio di Balbus (secondo problema del nodo 9)
"Quando un solido è immerso in un liquido, è noto che esso sposta una parte del liquido pari al proprio volume e che il livello del liquido sale di tanto quanto salirebbe se vi fosse stata una quantità di liquido pari al volume del solido."

"Poniamo che venga retto un solido sopra la superficie di un liquido e che esso sia immerso parzialmente: una parte del liquido si sposta e il livello del liquido sale. Ma, con la salita di livello, si immerge naturalmente ancora un po' del solido, e così c'è di nuovo lo spostamento di una seconda porzione del liquido con conseguente salita di livello. Di nuovo, questa seconda salita di livello causa un'immersione ancora maggiore e di conseguenza un altro spostamento di liquido e un'altra salita. Va da sé che questo processo debba continuare finché non è immerso tutto il solido [...] Prendiamo dunque l'immagine familiare di un uomo in piedi in riva al mare, durante il riflusso della mare, che immerge parzialmente un solido che tiene in mano: egli rimane saldo e fermo lì e tutti noi sappiamo che prima o poi annegherà [...]"

Problema. *Balbus afferma che se un certo solido viene immerso in un certo recipiente contenente acqua, l'acqua si alzerà di una serie di distanze, due pollice, un pollice, mezzo pollice eccetera, e questa serie non ha fine. Egli conclude che l'acqua salirà all'infinito. È vero?*

Soluzione. *No. Questa serie non può mai raggiungere i 4 pollici poiché, quale che sia il numero di termini, siamo sempre lontani dai 4 pollici di una quantità pari all'ultimo termine assunto.*

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 4,$$

$$4 - \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \ .$$

Soprattutto i *Teoremi di Incompletezza* di Kurt Gödel, 1931
Consideriamo una teoria matematica alla Hilbert

- coerente
- umanamente comprensibile
- capace di trattare un minimo di aritmetica (non l'infinito, ma i numeri naturali con addizione e moltiplicazione).

Allora questa teoria non sarà mai *completa*.

I limiti della conoscenza umana (anche di quella matematica)

Leopardi, *L'infinito*

"*… siepe, che da tanta parte*
de l'ultimo orizzonte il guardo esclude",
"... interminato
spazio di là da quella, e sovrumani
silenzi, e profondissima quiete"

Ma anche una rincorsa ideale nella quale

- la tartaruga è la verità dell'aritmetica,
- Achille il tentativo umano di assiomatizzarla in modo coerente e completo.